Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК 512.54

ГРУППЫ ПЕРИОДА 12 БЕЗ ЭЛЕМЕНТОВ ПОРЯДКА 12

А. С. Мамонтов

Аннотация. Доказано, что группы периода 12 без элементов порядка 12 локально конечны.

Ключевые слова: периодическая группа, локально конечная группа, спектр.

К 70-летию В. Д. Мазурова

1. Введение

Группой периода n называется группа, в которой выполняется тождество $x^n = 1$. Вопрос Бернсайда о локальной конечности групп данного периода n решен положительно И. Н. Сановым [1] для $n = 4$ и Холлом [2] для $n = 6$. В [3, 4] показано, что группы, период которых больше 8000, могут не быть локально конечными.

Спектром периодической группы G называется множество $\omega(G)$ порядков ее элементов. Естественный интерес представляют результаты, устанавливающие локальную конечность группы G по заданному спектру $\omega(G)$. Ряд ярких результатов в этом направлении принадлежит В. Д. Мазурову. Так, например, им доказана локальная конечность групп со спектром $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ [5] и групп со спектром $\{1, 2, 3, 4, 8\}$ [6]. Обзор исследований в этом направлении можно найти в [7].

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема. *Пусть G — группа, для которой $\omega(G) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Тогда G локально конечна.*

Данная теорема обобщает теоремы И. Н. Санова [1] и Холла [2].

2. Обозначения и предварительные результаты

Если X — группа и $x, y, z \in X$, то обозначим через $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ коммутатор элементов x, y, через $|x|$ — порядок элемента x, через $Z(X), O_p(X)$ — центр и наибольшую нормальную p-подгруппу (здесь p — простое число) группы X. Запись $x \sim y$ обозначает, что элементы x и y удовлетворяют соотношению $xyx = yxy$. Положим также $[x, y, z] = [[x, y], z]$, $x^y = y^{-1}xy$.

Лемма 1 (теорема Шмидта [8, теорема 6]). *Расширение локально конечной группы посредством локально конечной группы локально конечно.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–31222, 12–01–33102).

Лемма 2 [9]. 1. $A_4 \simeq \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^2\rangle$.

2. (а) *Пусть x, y — элементы порядка 3, порождающие $SL_2(3)$. Тогда $x \sim y$ или $x \sim y^{-1}$.*

(б) $SL_2(3) \simeq \langle x, y \mid 1 = x^3 = y^3,\ x \sim y\rangle$.

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 3. *Пусть x и y — инволюции, порядок произведения которых конечен и равен n. Тогда*

1) *если n нечетно, то x и y сопряжены;*

2) *если $n = 2k$ четно, то $(xy)^k$ — инволюция из центра группы $\langle x, y\rangle$.*

Следующая лемма, доказанная в [10], является аналогом теоремы Бэра — Сузуки для групп периода 12.

Лемма 4. *Пусть G — группа периода 12 и $a \in G$. Если для любого $g \in G$ подгруппа $\langle a, a^g\rangle$ нильпотентна, то $\langle a^G\rangle$ нильпотентна.*

3. Подгруппа A_4

В данном разделе доказывается следующее

Предложение 1. *Пусть $\omega(G) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 6\}$ и G содержит подгруппу H, изоморфную A_4. Тогда $O_2(H) \subseteq O_2(G)$.*

Заметим, что отображение

$$u = (1, 2)(3, 4) \to x, \quad v = (1, 2, 3) \to a$$

продолжается до изоморфизма группы A_4 на группу $\langle x, a \mid 1 = x^2 = a^3 = [x, x^a] = xx^a x^{a^2}\rangle$.

Далее в этом разделе G — группа такая, что $\omega(G) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 6\}$, элементы x и a группы G порождают подгруппу H, изоморфную A_4, и удовлетворяют соотношениям $1 = x^2 = a^3 = [x, z] = xzaxa^2$, где $z = x^a$.

Отметим, что $\langle x, z\rangle = O_2(H)$ и для доказательства предложения достаточно показать, что $\langle x^G\rangle$ является 2-группой.

Если для всех $y \in x^G$ подгруппа $\langle x, y\rangle$ является 2-группой, то $\langle x^G\rangle$ — 2-группа по лемме 4. Пусть далее $y \in x^G$ такой, что $(xy)^3 = 1$. Для доказательства предложения достаточно показать, что $y \in \langle x, a\rangle$.

Лемма 5. *Выполнено одно из следующих утверждений.*

1. *$(yz)^6 = (xyz)^6 = 1$ и порядок подгруппы $\langle x, y, z\rangle$ делит 108. Если $w = y^{zyx}$, то $(wx)^3 = [w, z] = 1$ и порядок подгруппы $\langle x, w, z\rangle$ делит 12.*

2. *Порядок $\langle x, y, z\rangle$ делит 48 и с точностью до замены z на xz выполнены соотношения $(yz)^6 = (xyz)^4 = 1$.*

Доказательство. 1. Пусть $(yz)^6 = (xyz)^6 = 1$. Группа $F = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (yz)^3 = [x, z] = (yx)^6 = (yzx)^6 = 1\rangle$ является расширением экстраспециальной группы порядка 27 и периода 3 посредством элементарной абелевой группы порядка 4. Отображение

$$u = (3, 4)(5, 6)(7, 9) \to x, \quad v = (2, 3)(4, 5)(6, 8) \to y, \quad w = (1, 2)(5, 7)(6, 9) \to z$$

продолжается до изоморфизма ϕ группы подстановок $\langle u, v, w\rangle$ на F [10, лемма 2]. Таким образом, выполнен п. 1 леммы.

2. Пусть $(yz)^6 = 1$, $|xyz| = 4$ и $b = xy$. Тогда $bb^z = (xyz)^2$ — элемент порядка 2 и по лемме 2 подгруппа $S = \langle b, b^z\rangle$ изоморфна A_4. Поскольку $b^{zy} =$

$yzxyzy = yx(zy)^2 = b^{-1}(b^z)^{-1}b \in S$, то S нормальна в $\langle x, y, z\rangle$. Любой смежный класс по S содержит представителя из элементарной абелевой подгруппы $\langle x, z\rangle$, поэтому индекс S в $\langle x, y, z\rangle$ не превосходит 4.

3. Если $|yz| = 4$ и $(xyz)^6 = 1$, то после замены в этих равенствах z на xz получаем случай 2, разобранный выше.

4. Пусть $|yz| = 4$ и $|xyz| = 4$. Из равенств $1 = (xyz)^4 = (yx(yz)^2)^2 = (yx(yz)^{-2})^2 = (yx(zy)^2)^2 = yxzyzxzyzy = ((xy)^2)^{zy}$ и условия $(xy)^3 = 1$ следует, что $x = y$.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $(yz)^6 = (xyz)^6 = 1$. Тогда $y \in \langle x, a\rangle \simeq A_4$.*

Доказательство. Пусть $w = y^{zyx}$. По лемме 5 группа $\langle w, x, a\rangle$ является гомоморфным образом группы $F(i, j, k) = \langle x, a, w \mid 1 = x^2 = w^2 = a^3 = (wx)^3 = (xz)^2 = xzaxa^2 = (wa)^i = (wz)^2 = (wa^{-1}wa)^j = (xwa)^k\rangle$, где $i, j, k \in \{4, 6\}$. Вычисления по алгоритму перечисления смежных классов [11] показывают, что $|F(6, 6, 6)| = |F(6, 4, 6)| = 12$. Во всех остальных случаях порядок $F(i, j, k)$ равен 1, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, $w \in \langle x, a\rangle \simeq A_4$. В группе A_4 всего 3 инволюции. Поскольку $(wx)^3 = 1$, элемент w не может совпадать ни с z, ни с xz. Стало быть, $w = x$, откуда $x = y^{zy} \in \langle y, z\rangle$ и выполнены соотношения $(xy)^3 = [y, xz] = 1$. Заменяя в предыдущем рассуждении w на y и z на xz, получим $y \in \langle x, a\rangle$.

Лемма доказана.

Введем ряд обозначений для слов, которые будут использоваться в соотношениях ниже: $w_1 = ab$, $w_2 = ab^{-1}$, $w_3 = abab^{-1}$, $w_4 = aba^{-1}b$, $w_5 = aba^{-1}b^{-1}$, $w_6 = ababa^{-1}b^{-1}$, $w_7 = abab^{-1}a^{-1}b$, $w_8 = abab^{-1}a^{-1}b^{-1}$, $w_9 = aba^{-1}bab^{-1}$, $w_{10} = aba^{-1}ba^{-1}b^{-1}$, $w_{11} = aba^{-1}b^{-1}ab^{-1}$.

Запись $k = [k_1, \dots, k_{11}]$ обозначает, что в группе выполнены соотношения ${w_i}^{k_i} = 1$.

Также введем следующие обозначения: $v_1 = ([a, b][a^{-1}, b])^2$,

$$v_2 = ab(ab^{-1})^2ab(a^{-1}b^{-1})^2(a^{-1}b)^2[a, b], \quad v_3 = (ab(ab^{-1})^2a^{-1}b^{-1}ab^{-1})^2.$$

Лемма 7. *Пусть $K = \langle a, b\rangle$, где a и b — элементы порядка 3 из группы G. Тогда выполнено одно из следующих утверждений.*

1. *Порядок K делит $2^{10}3^3$, K — группа периода 6 и выполнены соотношения $v_1 = v_2 = v_3 = 1$.*

2. *Порядок K делит $2^{12}3^2$ и* $[6, 6, 6, 6, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 6]$.

3. *Порядок K делит $2^7 3^5$ и с точностью до замены b на b^{-1} выполнены соотношения* $[6, 4, 6, 6, 4, 6, 6, 6, 6, 4, 4]$.

4. *Порядок K делит $2^{11}3$ и* $[6, 4, 6, 6, 4, 6, 6, 4, 6, 4, 4]$.

5. *Порядок K делит 12.*

Доказательство. Группа K является гомоморфным образом группы $F(k) = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = 1, k\rangle$, где $k = [k_1, \dots, k_{11}]$ и все k_i принадлежат $\{4, 6\}$. В [12] показано, что если все k_i равны 6, то выполнен п. 1 леммы. Остальные пункты леммы получаются с использованием алгоритма ToddCoxeter перечисления смежных классов [13] (в случаях $[6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 4, 6, 6]$, $[6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 4, 6, 6, 6]$, $[6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 4, 4, 6, 6]$ смежные классы перечислялись по подгруппе $\langle a\rangle$).

Лемма доказана.

В следующей лемме разбирается оставшийся случай в доказательстве предложения 1.

Лемма 8. *Пусть* $(yz)^4 = (xyz)^6 = 1$. *Тогда* $y \in \langle x, a\rangle \simeq A_4$.

Доказательство. Группа $K = \langle x, y, a\rangle$ является гомоморфным образом группы $F(k; l, m, n) = \langle x, y, a \mid 1 = x^2 = y^2 = a^3 = (xy)^3 = (yz)^4 = (xyz)^6 = (xz)^2 = xzaxa^2 = (ya)^l = (xya)^m = (ayxy)^n, k\rangle$, где $l, m, n \in \{4, 6\}$, $z = x^a$, $b = xy$, соотношения k из пп. 1–4 леммы 7. Если не все k_i равны 6, то вычисления по алгоритму перечисления смежных классов [gap, magma] (для п. 2 из леммы 7 вычисления ведутся в magma) показывают, что $|F(k; l, m, n) : \langle x, a\rangle| = 1$. Если все k_i равны 6, то по п. 1 леммы 7 группа $F(k; l, m, n)$ является гомоморфным образом группы $S(l, m, n) = \langle x, y, a \mid 1 = x^2 = y^2 = a^3 = (xy)^3 = (yz)^4 = (xyz)^6 = (xz)^2 = xzaxa^2 = (ya)^l = (xya)^m = (ayxy)^n = v_1 = v_2 = v_3\rangle$. Вычисления по алгоритму перечисления смежных классов [11] показывают, что $|S(l, m, n) : \langle x, a\rangle| = 1$.

Лемма 8 завершает доказательство предложения 1.

4. Вспомогательные результаты

По теореме Шмидта, предложению 1 и [1] далее можно считать, что группа G не содержит подгрупп, изоморфных A_4, и порождается инволюциями.

Лемма 9. *Пусть a и t — элементы группы G такие, что $a^3 = t^2 = 1$. Тогда $(at)^6 = [a, t]^3 = 1$ и $\langle a, t\rangle$ — подгруппа порядка, делящего* 54.

Доказательство. Группа $\langle a, t\rangle$ является гомоморфным образом группы $H(i, j) = \langle a, t \mid 1 = a^3 = t^2 = (at)^i = [a, t]^j\rangle$, где $i, j \in \{4, 6\}$. В группе $H(6, 6)$ подгруппа $\langle [a, t]^3, a\rangle$ изоморфна A_4, поэтому $[a, t]^3 = 1$ и выполнено заключение леммы. В группе $H(6, 4)$ подгруппа $\langle [a, t]^2, a\rangle$ изоморфна A_4, поэтому $[a, t]^2 = 1$. В группе $H(6, 4)/\langle ([a, t]^2)^{H(6,4)}\rangle$ образы $[a, t]$ и a порождают подгруппу, изоморфную A_4, поэтому $[a, t] = 1$ и выполнено заключение леммы. В группе $H(4, 6)$ подгруппа $\langle (at)^2, a\rangle$ изоморфна A_4, тем самым $(at)^2 = 1$. Группа $H(4, 4)$ имеет порядок 2.

Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть a и b — элементы порядка 3 из G. Тогда выполнено одно из следующих утверждений.*

1. *Подгруппа $\langle a, b\rangle$ является гомоморфным образом экстраспециальной группы периода 3 и порядка 27 и $(ab)^3 = (aba)^3$.*

2. *Подгруппа $\langle a, b\rangle$ является гомоморфным образом расширения элементарной абелевой 3-группы порядка 81 при помощи $SL_2(3)$ и с точностью до замены b на b^{-1} выполнены следующие соотношения: $(ab)^6 = (ab^{-1})^4 = [a, b]^4 = (abab^{-1}a^{-1}b^{-1})^3 = 1$. Если $x = (ab)^2$, то $x \sim x^a$, подгруппа $\langle x, x^a\rangle$ изоморфна $SL_2(3)$ и фактор-группа группы $\langle a, b\rangle$ по нормальному замыканию подгруппы, порожденной элементом $(xx^a)^3$, лежащим в центре подгруппы $\langle x, x^a\rangle$, является гомоморфным образом A_4.*

Доказательство. Группа $H = \langle a, b\rangle$ является гомоморфным образом группы K из леммы 7. Для доказательства леммы для каждого из случаев леммы 7 построим серию элементов $x_1, \ldots, x_k$ и $c_1, \ldots, c_k$ таких, что группа $K/\langle x_1^K, \ldots, x_k{}^K\rangle$ удовлетворяет заключению леммы, при этом элемент x_i для $1 \le i \le k$ является инволюцией в группе $K/\langle x_1^K, \ldots, x_{i-1}{}^K\rangle$ и x_i вместе с элементом c_i порождает подгруппу группы $K/\langle x_1^K, \ldots, x_{i-1}{}^K\rangle$, изоморфную A_4. Нумерация следует лемме 7. Образы элементов при факторизации обозначаются той же буквой.

1. Пусть $x_1 = [a, b]^3$, $c_1 = a$; $x_2 = (ab)^3$, $c_2 = [a, b]$. Тогда группа $K/\langle x_1^K, x_2^K\rangle$ удовлетворяет п. 1 леммы.

2. Пусть $x_1 = [a, (ab)^3]^2$, $c_1 = a$; $x_2 = [a, (aba)^3]^2$, $c_2 = a$; $x_3 = (a^{ba}b)^3$, $c_3 = b$. Тогда группа $K/\langle x_1^K, x_2^K, x_3^K\rangle$ удовлетворяет п. 1 леммы.

3. Пусть $x_1 = (abab^{-1}a^{-1}b^{-1})^3$, $c_1 = a$. Тогда группа H является гомоморфным образом группы $L = \langle a, b \mid 1 = a^3 = b^3 = (ab)^6 = (ab^{-1})^4 = [a, b]^4 = (abab^{-1}a^{-1}b^{-1})^3\rangle$. Вычисления по алгоритму перечисления смежных классов [11] показывают, что порядок группы L равен 1944. Отображение

$$u = (2, 4, 5)(3, 6, 7)(8, 13, 14)(9, 15, 12)(10, 16, 17)(11, 18, 19)(20, 28, 29)(21, 30, 26)(22, 25, 31)(23, 32, 33)(34, 36, 35) \to a,$$

$$v = (1, 2, 3)(4, 7, 8)(5, 9, 10)(6, 11, 12)(13, 20, 14)(15, 21, 22)(16, 23, 19)(17, 24, 25)(18, 26, 27)(28, 34, 32)(29, 33, 35)(30, 36, 31) \to b$$

продолжается до изоморфизма подстановочной группы $\langle u, v\rangle$ на L, и выполнен п. 2 леммы.

4. Пусть $x_1 = [a, (ab)^3]^2$, $x_2 = [a, (aba)^2]^2$, $x_3 = [a, (ab^{-1})^2]$ и $c_1 = c_2 = c_3 = a$. Тогда группа $K/\langle {x_1}^K, {x_2}^K, {x_3}^K\rangle$ изоморфна $SL_2(3)$ и выполнен п. 2 леммы.

Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть x, y, z — инволюции из G. Если $(xy)^3 = (yz)^3 = 1$, то $(xz)^3 = 1$.*

Доказательство. Пусть $(xyz)^4 = 1$. Тогда $(xy(xy)^z)^2 = 1$ и по лемме 2 подгруппа $\langle xy, (xy)^z\rangle$ является гомоморфным образом A_4, что невозможно. Таким образом, $(xyz)^6 = 1$.

Если $(xz)^4 = 1$, то положим $u = (xz)^2$; если $|xz| = 6$, то положим $u = (xz)^3$. По лемме 9 выполнено соотношение $[xy, u]^3 = 1$. Группа $S = \langle x, y, z\rangle$ является гомоморфным образом группы $F(i, j) = \langle x, y, z \mid 1 = x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (yz)^3 = (xz)^i = (yx^z)^j = (xyz)^6 = [xy, u]^3\rangle$, где $i, j \in \{4, 6\}$. Вычисления по алгоритму перечисления смежных классов [11] показывают, что порядок $F(6, 6)$ равен 54. В этом случае S является гомоморфным образом расширения экстраспециальной 3-группы порядка 27 при помощи инволюции и выполнено заключение леммы. Во всех остальных случаях порядок $F(i, j)$ делит 6.

Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть a и b — элементы порядка 3 из группы G, порождающие подгруппу, изоморфную $SL_2(3)$. Тогда любая инволюция $t \in C_G(Z(\langle a, b\rangle))$ централизует всю подгруппу $\langle a, b\rangle$.*

Доказательство. По лемме 2 можно считать, что $a \sim b$. Обозначим через $x = (ab)^3$ инволюцию из центра $\langle a, b\rangle$. По условию $[t, x] = 1$. По лемме 9 выполнены следующие соотношения: $(at)^6 = [a, t]^3 = (bt)^6 = [b, t]^3 = (a^bt)^6 = [a^b, t]^3 = (b^at)^6 = [b^a, t]^3$. Положим $a_1 = a^t$, $a_2 = a^{ta}$, $a_3 = a^{ta^{-1}}$, $a_4 = a^{tat}$, $a_5 = [a, t]$, $a_6 = (at)^2$. Поскольку $\omega(G) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 6\}$, то $([a, b]b^t)^{12} = 1$. По лемме 10 группа $\langle a, b, t\rangle$ является гомоморфным образом группы $F(k_1, \ldots, k_6) = \langle a, b, t \mid a \sim b, 1 = t^2 = a^3 = b^3 = [x, t] = (at)^6 = (bt)^6 = [a, t]^3 = [b, t]^3 = (a^bt)^6 = [a^b, t]^3 = (b^at)^6 = [b^a, t]^3 = ([a, b]b^t)^{12} = u_i = s_i\rangle$, где $k_i \in \{1, 2, 3\}$, причем если $k_i = 1$, то $u_i = (a_ib)^6$, $s_i = (a_ib^{-1})^4$; если $k_i = 2$, то $u_i = (a_ib)^4$, $s_i = (a_ib^{-1})^6$; если $k_i = 3$, то $u_i = (a_ib)^3$, $s_i = (a_iba_i)^3$.

Вычисления по алгоритму перечисления смежных классов [11] показывают, что $|F(1, 1, 1, 1, 3, 2)| = 48$. При остальных значениях k_i соответствующая группа тривиальна. Таким образом, t — автоморфизм порядка 2 группы $\langle a, b\rangle$, изоморфной $SL_2(3)$. Поскольку в G нет элементов порядка 8, выполнено заключение леммы.

Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть a и b — элементы порядка 3 из группы G, порождающие подгруппу, изоморфную $SL_2(3)$, и t — инволюция. Тогда если $\langle t, C_G(Z(\langle a, b\rangle))\rangle$ — 2-подгруппа, то t централизует подгруппу $\langle a, b\rangle$.*

Доказательство. Можно считать, что $a \sim b$. Пусть $x = (ab)^3$ — инволюция из центра $\langle a, b\rangle$. По условию $(xt)^4 = 1$. Пусть $y = (tx)^2$. По леммам 3 и 12 выполнено соотношение $[a, y] = [b, y] = 1$. По леммам 9 и 10 группа $\langle a, b, t\rangle$ является гомоморфным образом группы $F(k_1, \dots, k_6) = \langle a, b, t \mid a \sim b, 1 = t^2 = a^3 = b^3 = [y, a] = [y, b] = (xt)^4 = (at)^6 = (bt)^6 = [a, t]^3 = [b, t]^3 = (a^b t)^6 = [a^b, t]^3 = (b^a t)^6 = [b^a, t]^3 = ([a, b]b^t)^{12} = u_i = s_i\rangle$. Используются обозначения леммы 12 и $y = (tx)^2$.

Вычисления по алгоритму перечисления смежных классов [11] показывают, что $|F(1, 1, 1, 1, 3, 2)| = 48$. При остальных значениях k_i соответствующая группа тривиальна. Таким образом, t — автоморфизм порядка 2 группы $\langle a, b\rangle$, изоморфной $SL_2(3)$. Поскольку в G нет элементов порядка 8, выполнено заключение леммы.

Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы

Пусть $\omega(G) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 6\}$, группа G не содержит подгрупп, изоморфных A_4, и порождается инволюциями.

Покажем, что для любой инволюции i, лежащей в центре подгруппы, изоморфной $SL_2(3)$, порядок произведения ii^g для любого $g \in G$ делит 3. Доказательство проведем по минимальной длине n разложения элемента g в произведение инволюций.

Пусть $n = 1$, тогда g — инволюция. Если порядок $ii^g = (ig)^2$ не делит 3, то $|ig|$ не делит 6, стало быть, $(ig)^4 = 1$. По лемме 13 $[i, g] = 1$ и $|ii^g| = 1$ делит 3; противоречие.

Пусть теперь $n > 1$ и $g = t_1, \dots, t_n$, где $t_1, \dots, t_n$ — инволюции. По предположению порядки элементов $ii^{t_1 \cdots t_{n-1}}$ и $i^{t_1 \cdots t_{n-1}} i^{t_1 \cdots t_n}$ делят 3. Тогда по лемме 11 порядок ii^g делит 3.

Таким образом, если i — инволюция из центра подгруппы, изоморфной $SL_2(3)$, то i^G образует класс сопряженных инволюций такой, что порядок произведения любых двух элементов из i^G делит 3. В [10] показано, что в таком случае $\langle i^G\rangle$ является расширением 3-группы при помощи элемента порядка 2. В частности, $\langle i^G\rangle$ локально конечна.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа в G. Тогда H порождается конечным множеством инволюций I. Рассмотрим множество $K = \{i \in I \mid i$ лежит в центре подгруппы из H, изоморфной $SL_2(3)\}$. По доказанному группа $L = \langle K^H\rangle$ локально конечна как произведение конечного числа нормальных локально конечных подгрупп. Пусть $\overline{H} = H/L$. По предложению 1 и лемме 10 в $\overline{H}/O_2(\overline{H})$ любые два элемента порядка 3 порождают 3-группу. По лемме 4 группа $\overline{H}/O_2(\overline{H})$ локально конечна. По лемме 1 H конечна. Стало быть, G локально конечна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Санов И. Н.* Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Уч. зап. Ленингр. гос. ун-та. Сер. мат. 1940. № 55. С. 166–170.

2. *Hall M.* Solution of the Burnside problem for exponent six // Ill. J. Math. 1958. V. 2, N 48. P. 764–786.

3. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.

4. *Лысенок И. Г.* Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. РАН. Сер. мат. 1996. Т. 60, № 3. С. 3–224.

5. *Мазуров В. Д.* О группах периода 60 с заданными порядками элементов // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 329–346.

6. *Мазуров В. Д.* О группах периода 24 // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 6. С. 766–781.

7. *Журтов А. Х., Мазуров В. Д.* Локальная конечность некоторых групп с заданными порядками элементов // Владикавк. мат. журн. 2009. Т. 11, № 4. С. 11–15.

8. *Шмидт О. Ю.* Бесконечные разрешимые группы // Мат. сб. 1945. Т. 17, № 2. С. 145–162.

9. *Максименко А. А., Мамонтов А. С.* Локальная конечность некоторых групп, порожденных классом сопряженных элементов порядка 3 // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 631–644.

10. *Мазуров В. Д., Мамонтов А. С.* Инволюции в группах периода 12 // Алгебра и логика (в печати).

11. *GAP*: Groups, algorithms, and programming. http://www.gap-system.org.

12. *Havas G., Newman M. F., Niemeyer A. C., Sims C. C.* Groups with exponent six // Comm. Algebra. 1999. V. 27, N 8. P. 3619–3638.

13. *Magma* computational algebra system. http://magma.maths.usyd.edu.au/magma.

Статья поступила 28 октября 2012 г.

Мамонтов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
andreysmamontov@gmail.com