Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК 512.5

АЛГЕБРЫ ЛИ, ДОПУСКАЮЩИЕ МЕТАЦИКЛИЧЕСКУЮ ФРОБЕНИУСОВУ ГРУППУ АВТОМОРФИЗМОВ

Н. Ю. Макаренко, Е. И. Хухро

Аннотация. Пусть алгебра Ли L допускает конечную фробениусову группу автоморфизмов FH с циклическим ядром F и дополнением H, причем характеристика основного поля не делит $|H|$. Доказано, что если подалгебра $C_L(F)$ неподвижных точек ядра имеет конечную размерность m, а подалгебра $C_L(H)$ неподвижных точек дополнения нильпотентна ступени c, то L обладает нильпотентной подалгеброй конечной коразмерности, ограниченной в терминах m, c, $|H|$ и $|F|$, ступень нильпотентности которой ограничена в терминах только $|H|$ и c. Примеры показывают, что условие цикличности ядра F существенно.

Ключевые слова: фробениусова группа, автоморфизм, алгебра Ли, ступень нильпотентности.

Виктору Даниловичу Мазурову по случаю его 70-летия

1. Введение

Напомним, что конечная *фробениусова группа* FH с ядром F и дополнением H — это полупрямое произведение нормальной подгруппы F и подгруппы H, в котором каждый элемент из H действует без нетривиальных неподвижных точек на F, т. е. $C_F(h) = 1$ для всех $h \in H \setminus \{1\}$. Строение фробениусовых групп хорошо известно. В частности, все абелевы подгруппы из H циклические, и если F — циклическая группа, то H также циклическая.

Проблема В. Д. Мазурова 17.72 в «Коуровской тетради» [1] послужила стимулом для ряда недавних работ, где рассматриваются группы G, допускающие фробениусову группу автоморфизмов FH с ядром F и дополнением H, в которой F действует без нетривиальных неподвижных точек, $C_G(F) = 1$. Целью этих работ [2–10] являются ограничения на порядок, ранг, нильпотентную длину, ступень нильпотентности и период группы G в терминах соответствующих свойств и параметров централизатора $C_G(H)$ и порядка $|H|$. Для оценки ступени нильпотентности группы G в случае нильпотентного централизатора дополнения $C_G(H)$ используются методы колец Ли. Соответствующие теоремы о кольцах и алгебрах Ли L с фробениусовой группой автоморфизмов FH, для которой $C_L(F) = 0$, имеют и самостоятельное значение.

Естественным и важным обобщением этой ситуации является рассмотрение колец Ли и групп с фробениусовой группой автоморфизмов FH, ядро которой F имеет ограниченное число или размерность множества неподвижных точек. Тогда целью является получение аналогичных ограничений на подгруппу или подалгебру ограниченного индекса или коразмерности. В настоящей работе рассматривается случай алгебр Ли, для которых получаются сильные ограничения на ступень нильпотентности подалгебры ограниченной коразмерности.

Предположим, что алгебра Ли L произвольной, не обязательно конечной, размерности допускает конечную фробениусову группу автоморфизмов FH с циклическим ядром F и дополнением H такую, что подалгебра $C_L(H)$ неподвижных точек дополнения нильпотентна ступени c. Если $C_L(F) = 0$, т. е. фробениусово ядро F действует *регулярно* (без нетривиальных неподвижных точек) на L, то по теореме Макаренко — Хухро — Шумяцкого [5, 6] алгебра Ли L нильпотентна ступени, ограниченной некоторой функцией, зависящей только от $|H|$ и c. В этой статье мы обобщаем теорему Макаренко — Хухро — Шумяцкого на случай, когда фробениусово ядро F действует «почти регулярно» на L. Мы доказываем, что если размерность $C_L(F)$ конечна и характеристика L не делит $|H|$, то L почти нильпотентна с оценками коразмерности нильпотентной подалгебры и ее ступени нильпотентности.

Теорема 1.1. *Пусть FH — фробениусова группа с циклическим ядром F порядка n и дополнением H порядка q. Предположим, что FH действует автоморфизмами на алгебре Ли L характеристики, не делящей q, таким образом, что подалгебра $C_L(F)$ неподвижных точек ядра имеет конечную размерность m, а подалгебра $C_L(H)$ неподвижных точек дополнения нильпотентна ступени c. Тогда L обладает нильпотентной подалгеброй конечной коразмерности, ограниченной некоторой функцией, зависящей только от m, n, q и c, ступень нильпотентности которой ограничена некоторой функцией, зависящей только от q и c.*

Существуют примеры, показывающие, что результат неверен, если ядро F не циклическое (см. примеры в [5]). Функции от m, n, q, c и от q и c в теореме 1.1 можно оценить сверху явным образом, хотя мы и не выписываем здесь эти оценки.

В доказательстве теоремы 1.1 используется метод обобщенных, или градуированных, централизаторов, первоначально созданный в [11] для почти регулярных автоморфизмов простого порядка (см. также [12–15] и гл. 4 в [16]). Этот метод заключается в следующем. В доказательстве теоремы 1.1 можно считать, что основное поле содержит примитивный корень n-й степени из единицы ω. Пусть $F = \langle\varphi\rangle$. Тогда L разлагается в прямую сумму подпространств собственных векторов $L_j = \{a \in L \mid a^{\varphi} = \omega^j a\}$, которые являются также компонентами $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуировки: $[L_s, L_t] \subseteq L_{s+t}$, где $s+t$ вычисляется по модулю n. В каждой из L_i, $i \neq 0$, последовательно строятся некоторые подпространства $L_i(k)$ ограниченной коразмерности — «градуированные централизаторы» — возрастающих уровней k и одновременно фиксируются некоторые элементы (представители) $x_i(k)$, все это до некоторого (c, q)-ограниченного уровня T. Элементы из $L_j(k)$ обладают централизаторным свойством по отношению к фиксированным элементам меньших уровней: если коммутатор (ограниченного веса), в который входят ровно один элемент $y_j(k) \in L_j(k)$ уровня k и некоторые фиксированные элементы $x_i(s) \in L_i(s)$ меньших уровней $s < k$, лежит в L_0, то этот коммутатор равен 0. Искомая подалгебра — это подалгебра Z, порожденная всеми $L_i(T)$, $i \neq 0$, наивысшего уровня T. Доказательство того, что подалгебра Z нильпотентна ограниченной ступени, основано на предложении 3.3, которое является комбинаторным следствием теоремы Макаренко — Хухро — Шумяцкого [5, 6] и сводит вопрос нильпотентности к рассмотрению коммутаторов специального вида. Применяемые при этом различные собирательные процессы и другие рассуждения основаны именно на вышеупомянутом централизаторном свойстве.

Результаты об алгебрах (кольцах) Ли с фробениусовыми группами автоморфизмов применимы к различным классам групп. Из теоремы Макаренко — Хухро — Шумяцкого [5], в частности, следует, что если конечная группа (или локально нильпотентная группа или группа Ли) G допускает фробениусову группу автоморфизмов FH с циклическим ядром F порядка n и дополнением H порядка q такую, что $C_G(F) = 1$ и $C_G(H)$ нильпотентна ступени c, то G нильпотентна (c, q)-ограниченной ступени. Теорема 1.1 также применима к локально нильпотентным группам без кручения с метациклической фробениусовой группой автоморфизмов (теорема 7.2).

Кратко опишем план статьи. После напоминания определений и введения обозначений в § 2 сначала доказываем в § 3 комбинаторные следствия из теоремы Макаренко — Хухро — Шумяцкого (теорема 3.2 и предложение 3.3), которые являются ключевыми в доказательстве теоремы. Затем в § 4, 5 строятся обобщенные централизаторы и фиксированные элементы и доказываются их основные свойства. За основу взята оригинальная конструкция из [11], которую пришлось, однако, значительно модифицировать в соответствии с условиями задачи. В § 6 строится искомая подалгебра и доказывается нильпотентность этой подалгебры. В § 7 доказывается теорема 7.2 о локально нильпотентных группах без кручения.

2. Предварительные сведения

Напомним некоторые определения и понятия. Для краткости будем говорить, что некоторая величина (c, q)-*ограничена* (или, скажем, (m, n, q, c)-*ограничена*), если она ограничена сверху некоторой функцией, зависящей только от c и q (соответственно только от m, n, q и c).

Произведения в алгебре Ли будем называть *коммутаторами*. Через $\langle S\rangle$ будем обозначать подалгебру Ли, порожденную подмножеством S.

Члены нижнего центрального ряда алгебры Ли L определяются по индукции: $\gamma_1(L) = L$; $\gamma_{i+1}(L) = [\gamma_i(L), L]$. По определению алгебра Ли L *нильпотентна ступени* h, если $\gamma_{h+1}(L) = 0$.

Простой коммутатор $[a_1, a_2, \dots, a_s]$ веса (длины) s по определению есть коммутатор $[\dots[[a_1, a_2], a_3], \dots, a_s]$. По тождеству Якоби $[a, [b, c]] = [a, b, c] - [a, c, b]$ любой (сложный, многократный) коммутатор от некоторых элементов в любой алгебре Ли может быть выражен в виде линейной комбинации простых коммутаторов того же веса от тех же элементов. Используя еще и антикоммутативность $[a, b] = -[b, a]$, можно добиться, чтобы в этой линейной комбинации все простые коммутаторы начинались с некоторого наперед заданного элемента, входящего в первоначальный коммутатор. В частности, если $L = \langle S\rangle$, то пространство L порождается простыми коммутаторами от элементов из S.

Пусть A — аддитивно записанная абелева группа. Алгебра Ли L A-*градуирована*, если

$$L = \bigoplus_{a\in A} L_a \quad \text{и} \quad [L_a, L_b] \subseteq L_{a+b},\ a, b \in A,$$

где L_a — подпространства L. Элементы подпространств L_a называются *однородными*, коммутаторы от однородных элементов — *однородными коммутаторами*. Подпространство H пространства L называется *однородным*, если

$H = \bigoplus_a (H \cap L_a)$; тогда полагаем $H_a = H \cap L_a$. Очевидно, что любая подалгебра или идеал, порожденные однородными подпространствами, однородны. Однородную подалгебру и фактор-алгебру по однородному идеалу можно рассматривать как A-градуированные алгебры с индуцированной градуировкой.

Предположим, что фробениусова группа FH с циклическим ядром $F = \langle \varphi \rangle$ порядка n и дополнением H порядка q действует на алгебре Ли L таким образом, что подалгебра неподвижных точек $C_L(F)$ имеет конечную размерность $\dim C_L(F) = m$, а подалгебра неподвижных точек $C_L(H)$ нильпотентна ступени c.

Пусть ω — примитивный корень n-й степени из 1. Расширим основное поле с помощью ω и обозначим через $\widetilde{L}$ алгебру $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\omega]$. Группа FH естественным образом действует на $\widetilde{L}$, причем подалгебра неподвижных точек $C_{\widetilde{L}}(H)$ нильпотентна ступени c, а подалгебра неподвижных точек $C_{\widetilde{L}}(F)$ имеет размерность m.

Определение. Определим *φ-однородные компоненты* L_k для $k = 0, 1, \dots, n-1$ как подпространства собственных векторов

$$L_k = \{a \in L \mid a^{\varphi} = \omega^k a\}.$$

Известно, что если характеристика поля не делит n, то

$$L = L_0 \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_{n-1}$$

(см., например, [17, гл. 10]). Это разложение является $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуировкой в силу очевидных включений

$$[L_s,\, L_t] \subseteq L_{s+t\,(\mathrm{mod}\,n)},$$

где $s + t$ вычисляется по модулю n.

Соглашение об индексах. Всюду далее строчная буква с индексом i будет обозначать элемент φ-однородной компоненты L_i, при этом индекс будет только указывать на ту φ-однородную компоненту, которой принадлежит данный элемент: $x_i \in L_i$. Для облегчения обозначений мы не будем использовать нумерующие индексы для элементов из L_j, так что различные элементы могут обозначаться одинаковым символом тогда, когда имеет значение только то, какой φ-однородной компоненте эти элементы принадлежат. Например, x_1 и x_1 могут быть различными элементами из L_1, так что $[x_1,\, x_1]$ может быть ненулевым элементом из L_2. Эти индексы обычно будут рассматриваться как вычеты по модулю n, например, $a_{-i} \in L_{-i} = L_{n-i}$.

Заметим, что в рамках соглашения об индексах φ-однородный коммутатор лежит в φ-однородной компоненте L_s, где s — сумма по модулю n индексов всех элементов, входящих в данный коммутатор.

3. Комбинаторная теорема

В этом разделе докажем некий комбинаторный факт, который вытекает из следующей теоремы Макаренко — Хухро — Шумяцкого [5].

Теорема 3.1 [5]. *Пусть FH — фробениусова группа с циклическим ядром F порядка n и дополнением H порядка q. Предположим, что FH действует автоморфизмами на алгебре Ли L таким образом, что $C_L(F) = 0$ и подалгебра неподвижных точек $C_L(H)$ нильпотентна ступени c. Тогда для некоторого*

(q,c)-ограниченного числа $f = f(q,c)$ алгебра L нильпотентна ступени не выше f.

Рассмотрим фробениусову группу FH с циклическим ядром $F = \langle\varphi\rangle$ порядка n и дополнением H порядка q, которая действует на алгебре Ли L таким образом, что подалгебра неподвижных точек $C_L(F)$ имеет конечную размерность m, а подалгебра неподвижных точек $C_L(H)$ нильпотентна ступени c. Так как ядро F фробениусовой группы FH — циклическая подгруппа, подгруппа H также циклическая. Пусть $H = \langle h\rangle$ и $\varphi^{h^{-1}} = \varphi^r$ для некоторого $1 \le r \le n-1$. Тогда r — примитивный корень q-й степени из 1 в кольце $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и, более того, образ элемента r в $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ — примитивный корень q-й степени из 1 для каждого делителя d числа n, поскольку h действует без нетривиальных неподвижных точек на каждой подгруппе группы F.

Группа H переставляет однородные компоненты L_i следующим образом: ${L_i}^h = L_{ri}$ для всех $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Действительно, если $x_i \in L_i$, то $\left(x_i^h\right)^\varphi = x_i^{h\varphi h^{-1}h} = \left(x_i^{\varphi^r}\right)^h = \omega^{ir}x_i^h$.

Для данного $u_k \in L_k$ в дальнейшем будем обозначать элемент $u_k^{h^i}$ через u_{r^ik} в рамках соглашения об индексах, поскольку ${L_k}^{h^i} = L_{r^ik}$. Так как сумма по любой H-орбите принадлежит централизатору $C_L(H)$, то $u_k + u_{rk} + \dots + u_{r^{q-1}k} \in C_L(H)$.

Теорема 3.2. *Пусть FH — фробениусова группа с циклическим ядром $F = \langle\varphi\rangle$ порядка n и дополнением $H = \langle h\rangle$ порядка q и $\varphi^{h^{-1}} = \varphi^r$ для некоторого натурального числа $1 \le r \le n-1$. Пусть $f(q,c)$ — функция из теоремы 3.1, $\mathbb{F}$ — поле, содержащее примитивный корень n-й степени из 1, характеристика которого не делит q и n, и L — алгебра Ли над $\mathbb{F}$. Предположим, что FH действует автоморфизмами на L таким образом, что подалгебра неподвижных точек $C_L(H)$ нильпотентна ступени c, и $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$, где $L_i = \{x \in L \mid x^\varphi = \omega^i x\}$ — φ-однородные компоненты (собственные подпространства для собственных значений ω^i). Тогда любой φ-однородный коммутатор $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_T}]$ веса $T = f(q,c)+1$ может быть представлен как линейная комбинация φ-однородных коммутаторов того же самого веса T, каждый из которых для каждого $s = 1, \dots, T$ включает ровно столько элементов из орбиты*

$$O(x_{i_s}) = \left\{x_{i_s},\ x_{i_s}^h = x_{ri_s}, \dots, x_{i_s}^{h^{q-1}} = x_{r^{q-1}i_s}\right\},$$

сколько исходный коммутатор, и содержит подкоммутатор с нулевой суммой индексов по модулю n.

Доказательство. Идея доказательства состоит в применении теоремы 3.1 к свободной алгебре Ли с операторами FH. Пусть $\mathbb{F}$ — поле, содержащее примитивный корень n-й степени из 1, характеристика которого не делит q и n, и пусть n, q, r, T — числа из условия теоремы 3.2. В кольце $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ выберем произвольным образом (не обязательно различные) элементы $i_1, i_2, \dots, i_T \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Рассмотрим свободную алгебру Ли K над полем $\mathbb{F}$ с qT свободными порождающими из множества

$$Y = \{\underbrace{y_{i_1}, y_{ri_1}, \dots, y_{r^{q-1}i_1}}_{O(y_{i_1})},\ \underbrace{y_{i_2}, y_{ri_2}, \dots, y_{r^{q-1}i_2}}_{O(y_{i_2})}, \dots, \underbrace{y_{i_T}, y_{ri_T}, \dots, y_{r^{q-1}i_T}}_{O(y_{i_T})}\},$$

где подмножества $O(y_{i_s}) = \{y_{i_s}, y_{ri_s}, \dots, y_{r^{q-1}i_s}\}$ будем называть *r-орбитами* элементов $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_T}$. Здесь, как и в соглашении об индексах, не используем нумерующие индексы, т. е. все элементы $y_{r^k i_j}$ по определению — это различные свободные порождающие, даже если индексы совпадают. (Соглашение об индексах вступит в силу в следующий момент.) Для каждого $i = 0, 1, \dots, n-1$ определим подпространство K_i алгебры Ли K, порожденное всеми коммутаторами от порождающих y_{j_s}, у которых сумма индексов входящих в них элементов по модулю n равна i. Тогда $K = K_0 \oplus K_1 \oplus \dots \oplus K_{n-1}$. Очевидно также, что $[K_i, K_j] \subseteq K_{i+j \,(\mathrm{mod}\, n)}$, поэтому это $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуировка. Алгебра Ли K также имеет естественную $\mathbb{N}$-градуировку относительно порождающего множества Y:

$$K = \bigoplus_i G_i(Y),$$

где $G_i(Y)$ — подпространство, порожденное всеми коммутаторами веса i от элементов из порождающего множества Y.

Определим действие фробениусовой группы FH на K. Положим $k_i^\varphi = \omega^i k_i$ для $k_i \in K_i$ и продолжим это действие на K по линейности. Так как K — прямая сумма подпространств K_i и характеристика основного поля не делит n, то

$$K_i = \{k \in K \mid k^\varphi = \omega^i k\},$$

т. е. K_i — собственное подпространство для собственного значения ω^i. Действие подгруппы H определяется на порождающем множестве Y следующим образом: H переставляет циклически элементы r-орбит $O(y_{i_s})$, $s = 1, \dots, T$:

$$(y_{r^k i_s})^h = y_{r^{k+1} i_s}, \; k = 0, \dots, q-2; \quad (y_{r^{q-1} i_s})^h = y_{i_s}.$$

Таким образом, r-орбита элемента y_{i_s} является также H-орбитой этого элемента. Ясно, что H переставляет компоненты K_i в соответствии со следующим правилом: ${K_i}^h = K_{ri}$ для всех $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Пусть $J = {}_{\mathrm{id}}\langle K_0 \rangle$ — идеал, порожденный φ-однородной компонентой K_0. По определению идеал J состоит из всевозможных линейных комбинаций коммутаторов от элементов из Y, каждый из которых содержит подкоммутатор с нулевой суммой индексов по модулю n. Ясно, что идеал J порождается однородными элементами относительно градуировок $K = \bigoplus\limits_i G_i(Y)$ и $K = \bigoplus\limits_{i=0}^{n-1} K_i$ и, следовательно, однороден относительно обоих градуировок, т. е.

$$J = \bigoplus_i J \cap G_i(Y) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} J \cap K_i.$$

Заметим также, что идеал J, очевидно, FH-инвариантен.

Пусть $I = {}_{\mathrm{id}}\langle \gamma_{c+1}(C_K(H)) \rangle^F$ — наименьший F-инвариантный идеал, содержащий подалгебру $\gamma_{c+1}(C_K(H))$ (который можно назвать *F-замыканием идеала*, порожденного этой подалгеброй). Покажем, что идеал I является однородным относительно градуировки $K = \bigoplus\limits_{i=0}^{n-1} K_i$. Так как q не делится на характеристику основного поля $\mathbb{F}$, имеет место равенство $C_K(H) = \{a + a^h + \dots + a^{h^{q-1}} \mid a \in K\}$. Легко понять, что идеал I состоит из линейных комбинаций всевозможных элементов вида

$$\big[\underbrace{(u_a + u_a^h + \dots + u_a^{h^{q-1}}), (v_b + \dots + v_b^{h^{q-1}}), \dots, (w_d + \dots + w_d^{h^{q-1}})}_{c+1}, y_{j_1}, y_{j_2}, \dots\big]^{\varphi^i}, \tag{1}$$

где $u_a, v_b, \ldots, w_d$ — φ-однородные коммутаторы (возможно, разных весов) от элементов из Y и $y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots \in Y$.

Продолжаем использовать тот факт, что H переставляет компоненты K_i по правилу: ${K_i}^h = K_{ri}$ для всех $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, и обозначаем $a_k^{h^i}$ через a_{r^ik} (в рамках соглашения об индексах). Важно, что при этом образ коммутатора от элементов из порождающего множества Y под действием автоморфизма h снова является коммутатором от элементов из Y. Переписывая (1) в новых обозначениях, получаем, что идеал I состоит из линейных комбинаций всевозможных элементов вида

$$\bigl[\underbrace{\bigl(u_a + \cdots + u_{r^{q-1}a}\bigr), \bigl(v_b + \cdots + v_{r^{q-1}b}\bigr), \ldots, \bigl(w_d + \cdots + w_{r^{q-1}d}\bigr)}_{c+1}, y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots\bigr]^{\varphi^i}, \tag{2}$$

где $u_a, v_b, \ldots, w_d$ — однородные коммутаторы (возможно, разных весов) от элементов из множества Y и $y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots \in Y$.

Обозначим элемент (2) через z и представим его как сумму φ-однородных элементов вида $k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-1}$, где $k_i \in K_i$. Для каждого $i = 0, \ldots, n-1$ положим $z_i = \sum\limits_{s=0}^{n-1} \omega^{-is} z^{\varphi^s}$. Легко проверить, что z_i лежит в собственном подпространстве для собственного значения ω^i, т. е. в K_i. Кроме того, $nz = \sum\limits_{j=0}^{n-1} z_i$. Так как характеристика поля не делит n, элемент n обратим в поле $\mathbb{F}$, т. е. $z = 1/n \sum\limits_{j=0}^{n-1} z_i$. Сравнивая два представления z, получаем, что $k_i = (1/n) z_i = (1/n) \sum\limits_{s=0}^{n-1} \omega^{-is} z^{\varphi^s}$. Но элемент $(1/n) \sum\limits_{s=0}^{n-1} \omega^{-is} z^{\varphi^s}$, будучи линейной комбинацией элементов $z, z^{\varphi}, \ldots, z^{\varphi^{n-1}}$ из I, также лежит в I. Следовательно, $k_i \in I$, т. е. идеал I однороден относительно градуировки $K = \bigoplus\limits_{i=0}^{n-1} K_i$.

Отметим, что I также однороден относительно градуировки $K = \bigoplus\limits_i G_i(Y)$ и FH-инвариантен.

Рассмотрим фактор-алгебру Ли $M = K/(J + I)$. Так как идеалы J и I однородны относительно градуировок $K = \bigoplus\limits_i G_i(Y)$ и $K = \bigoplus\limits_{i=0}^{n-1} K_i$, фактор-алгебра M обладает соответствующими индуцированными градуировками. Группа FH действует на M таким образом, что $C_M(F) = 0$ и $\gamma_{c+1}(C_M(H)) = 0$. По теореме 3.1 фактор-алгебра $K/(J+I)$ нильпотентна (q,c)-ограниченной ступени $f = f(q,c)$. Следовательно,

$$[y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_T}] \in J + I = {}_{\mathrm{id}}\langle K_0 \rangle + {}_{\mathrm{id}}\langle \gamma_{c+1}(C_K(H)) \rangle^F.$$

Это означает, что коммутатор $[y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_T}]$ можно представить по модулю идеала I как линейную комбинацию коммутаторов веса T от элементов из Y, принадлежащих φ-однородной компоненте $K_{i_1+i_2+\cdots+i_T}$, которые содержат подкоммутатор с нулевой суммой индексов по модулю n. Утверждается, что для каждого $s = 1, \ldots, T$ любой такой коммутатор включает ровно один элемент из орбиты

$$O(y_{i_s}) = \bigl\{y_{i_s}, y_{i_s}^h, \ldots, y_{i_s}^{h^{q-1}}\bigr\}.$$

Для каждого $s = 1, \dots, T$ рассмотрим гомоморфизм θ_s, продолжающий отображение
$$O(y_{i_s}) \to 0; \quad y_{i_k} \to y_{i_k}, \quad \text{если } k \neq s.$$
Ясно, что ядро $\operatorname{Ker}\theta_s$ равно идеалу, порожденному орбитой $O(y_{i_s})$. Кроме того, ясно, что идеал I инвариантен относительно θ_s (как и любой однородный идеал). Применим гомоморфизм θ_s к коммутатору $[y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_T}]$ и его представлению по модулю I в виде линейной комбинации коммутаторов веса T от элементов из Y, которые содержат подкоммутатор с нулевой суммой индексов по модулю n. Получим, что образ $\theta_s([y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_T}])$ равен 0 так же, как и образ любого коммутатора, содержащего элементы орбиты $O(y_{i_s})$. Отсюда следует, что сумма всех тех коммутаторов в представлении элемента $[y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_T}]$, которые не содержат элементов орбиты $O(y_{i_s})$, равна нулю, и можно исключить все такие коммутаторы из рассмотрения. Применяя последовательно θ_s, $s = 1, \dots, T$, и исключая коммутаторы, не содержащие элементов из $O(y_{i_s})$, $s = 1, \dots, T$, в конце концов получим по модулю I линейную комбинацию коммутаторов, каждый из которых содержит по крайней мере один элемент из каждой орбиты $O(y_{i_s})$, $s = 1, \dots, T$. Так как вес коммутаторов при произведенных преобразованиях остается одним и тем же и равен T, никаких других элементов появиться не может и каждый коммутатор будет содержать ровно один элемент из каждой орбиты $O(y_{i_s})$, $s = 1, \dots, T$.

Таким образом, доказали, что в свободной алгебре Ли K, порожденной элементами множества Y, коммутатор $[y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_T}]$ по модулю идеала I может быть представлен в виде линейной комбинации коммутаторов веса T от элементов из Y, причем для каждого $s = 1, \dots, T$ любой из коммутаторов этой линейной комбинации содержит точно один элемент из орбиты $O(y_{i_s})$ и обладает подкоммутатором с нулевой суммой индексов по модулю n.

Предположим теперь, что L — произвольная алгебра Ли, удовлетворяющая условию теоремы 3.2. Пусть $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_T}$ — произвольные φ-однородные элементы из подпространств $L_{i_1}, L_{i_2}, \dots, L_{i_T}$ соответственно. Определим гомоморфизм δ из свободной алгебры Ли K в L:
$$\delta(y_{i_s}) = x_{i_s}, \quad \delta(y_{r^k i_s}) = x_{i_s}^{h^k} \quad \text{для } s = 1, \dots, T,\ k = 1, \dots, q-1.$$
Тогда
$$\delta[y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_T}] = [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_T}],$$
$$\delta(I) = 0, \quad \delta(J) = {}_{\mathrm{id}}\langle L_0\rangle, \quad \delta(O(y_{i_s})) = O(x_{i_s}).$$
Применяя δ к построенному выше представлению коммутатора $[y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_T}]$, в качестве образа получаем представление коммутатора $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_T}]$ в виде линейной комбинации коммутаторов от элементов из множества $X = O(x_{i_1}) \cup O(x_{i_2}) \cup \dots \cup O(x_{i_T})$. Поскольку $\delta(I) = 0$, каждый коммутатор в этой линейной комбинации имеет вес T, содержит ровно столько элементов из каждой орбиты $O(x_{i_s})$, $s = 1, \dots, T$, сколько исходный коммутатор, и обладает подкоммутатором с нулевой суммой индексов по модулю n. Теорема доказана. $\square$

Назовем *МХШ-преобразованием* коммутатора $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}]$ его представление по теореме 3.2 в виде линейной комбинации простых коммутаторов от элементов из $X = O(x_{i_1}) \cup O(x_{i_2}) \cup \dots \cup O(x_{i_T})$, которые содержат ровно столько элементов из каждой орбиты $O(x_{i_s})$, $s = 1, \dots, T$, сколько исходный коммутатор, и имеют начальные отрезки из L_0 веса $\leq T = f(q, c) + 1$, т. е. коммутаторов вида $[c_0, y_{j_{w+1}}, \dots, y_{j_v}]$, где
$$c_0 = [y_{j_1}, \dots, y_{j_w}] \in L_0, \quad w \leq T,\ j_1 + j_2 + \dots + j_w = 0 \ (\operatorname{mod} n),\ y_{j_k} \in X,$$

с последующим переобозначением

$$z_1 = -[c_0, y_{j_{w+1}}], \quad z_s = y_{i_{w+s}} \text{ при } s > 1.$$

Следующее утверждение получается путем многократного применения МХШ-преобразования.

Предложение 3.3. *Пусть FH — фробениусова группа с циклическим ядром $F = \langle \varphi \rangle$ порядка n и дополнением $H = \langle h \rangle$ порядка q и $\varphi^{h^{-1}} = \varphi^r$ для некоторого $1 \le r \le n-1$. Пусть $\mathbb{F}$ — поле, содержащее примитивный корень n-й степени из 1, характеристика которого не делит q и n, и L — алгебра Ли над $\mathbb{F}$. Предположим, что FH действует автоморфизмами на L таким образом, что подалгебра неподвижных точек $C_L(H)$ нильпотентна ступени c и $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$, где $L_i = \{x \in L \mid x^\varphi = \omega^i x\}$ — собственные подпространства для собственных значений ω^i автоморфизма φ. Тогда для любых натуральных чисел t_1 и t_2 существует такое натуральное (t_1, t_2, q, c)-ограниченное число $V = V(t_1, t_2, q, c)$, что любой коммутатор веса V от φ-однородных элементов $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_V}]$ может быть представлен в виде линейной комбинации φ-однородных коммутаторов от элементов из множества $X = \bigcup_{s=1}^{V} O(x_{i_s})$, где*

$$O(x_{i_s}) = \left\{ x_{i_s},\ x_{i_s}^h = x_{ri_s}, \dots, x_{i_s}^{h^{q-1}} = x_{r^{q-1}i_s} \right\},$$

и каждый такой коммутатор обладает либо подкоммутатором вида

$$[u_{k_1}, \dots, u_{k_s}], \tag{3}$$

где имеется t_1 различных начальных отрезков с нулевой суммой индексов по модулю n, т. е.

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{r_i} \equiv 0 (\operatorname{mod} n), \quad i = 1, 2, \dots, t_1,$$

$$1 < r_1 < r_2 < \dots < r_{t_1} = s,$$

либо подкоммутатором вида

$$[u_{k_0}, c_1, \dots, c_{t_2}], \tag{4}$$

где $u_{k_0} \in X$, каждый c_i лежит в L_0, $i = 1, \dots, t_2$, и имеет вид $[x_{k_1}, \dots, x_{k_i}]$, $x_{k_j} \in X$, с нулевой суммой индексов по модулю n:

$$k_1 + \dots + k_i \equiv 0 \ (\operatorname{mod} n).$$

При этом можно положить $V(t_1, t_2, c, q) = \sum_{i=1}^{t_1} ((f(q,c)+1)^2 t_2)^i + 1$.

Доказательство практически дословно повторяет доказательство предложения из [11] (см. также [16, предложение 4.4.2]), но вместо ХКК-преобразования необходимо многократно применять МХШ-преобразование. В отличие от ХКК-преобразования, в результате которого всегда получаются коммутаторы от первоначальных элементов $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_V}$, в нашем случае после МХШ-преобразования в коммутаторах могут появляться какие-то образы элементов $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_V}$ под действием автоморфизма h. Это деталь не влияет на ход доказательства, но именно поэтому в заключении предложения 3.3 фигурируют коммутаторы от элементов из h-орбит первоначальных элементов. □

4. Представители и обобщенные централизаторы

Пусть FH — фробениусова группа с ядром $F = \langle\varphi\rangle$ порядка n и дополнением $H = \langle h\rangle$ порядка q и $\varphi^{h^{-1}} = \varphi^r$ для некоторого $1 \le r \le n-1$. Предположим, что группа FH действует автоморфизмами на алгебре Ли L, причем подалгебра $C_L(H)$ неподвижных точек дополнения нильпотентна ступени c, а подалгебра $L_0 = C_L(\varphi)$ неподвижных точек ядра имеет конечную размерность m. Сначала предположим, что $L = \bigoplus\limits_{i=0}^{n-1} L_i$, где $L_i = \{x \in L \mid x^\varphi = \omega^i x\}$ — собственные подпространства для собственных значений ω^i автоморфизма φ (что на самом деле является главным случаем).

Начнем построение обобщенных централизаторов индукцией по уровню — параметру, принимающему целые значения от 0 до T, где число $T = T(q,c) = f(q,c)+1$ определено в теореме 3.2. Обобщенный централизатор $L_j(s)$ уровня s — это некоторое подпространство φ-однородной компоненты L_j. Одновременно с построением обобщенных централизаторов фиксируются некоторые их элементы — представители различных уровней, общее количество которых (m,n,q,c)-ограничено.

Определение. *Шаблоном* коммутатора от φ-однородных элементов (из L_i) назовем его скобочное строение вместе с расстановкой индексов в рамках соглашения об индексах. *Вес* шаблона — это вес коммутатора. Сам коммутатор называется *значением* своего шаблона на данных элементах.

Определение. Пусть $\vec{x} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ — некоторый упорядоченный набор элементов $x_{i_s} \in L_{i_s}$, $i_s = 1, \dots, n-1$, такой, что $i_1 + \dots + i_k \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, n)$. Положим $j = -i_1 - \dots - i_k \,(\mathrm{mod}\, n)$ и определим отображения

$$\vartheta_{\vec{x}} : y_j \to [y_j, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]. \tag{5}$$

В силу линейности все они являются гомоморфизмами подпространства L_j в L_0. Поскольку $\dim L_0 = m$, имеем $\dim(L_j/\operatorname{Ker}\vartheta_{\vec{x}}) \le m$.

Обозначение. Обозначим через $U = U(q,c)$ число $V(T, T-1, q, c)$, где V— функция из заключения предложения 3.3.

Определение уровня 0. На уровне 0 фиксируем только представителей уровня 0. Сначала для каждого шаблона $\mathbf{P}$ простого коммутатора веса $\le U$ с индексами $i \ne 0$ и нулевой суммой индексов среди всех его значений на φ-однородных элементах из L_i, $i \ne 0$, выбираем коммутаторы c, образующие базис подпространства, натянутого на все значения этого шаблона на φ-однородных элементах из L_i, $i \ne 0$. Элементы из L_j, $j \ne 0$, участвующие в этих фиксированных представлениях коммутаторов c, называются *представителями уровня* 0. Представители уровня 0 обозначаются через $x_j(0)$ в рамках соглашения об индексах (напомним, что один и тот же символ может обозначать разные элементы). Далее вместе с каждым представителем $x_j(0) \in L_j$, $j \ne 0$, зафиксируем также все элементы орбиты $O(x_j(0))$ этого элемента под действием автоморфизма h:

$$O(x_j(0)) = \{x_j(0), x_j(0)^h, \dots, x_j(0)^{h^{q-1}}\},$$

и также назовем их *представителями уровня* 0. Элементы из таких орбит обозначаются через $x_{r^s j}(0) := x_j(0)^{h^s}$ в рамках соглашения об индексах (поскольку $L_i^h \le L_{ri}$).

Так как общее число рассматриваемых шаблонов $\mathbf{P}$ (n,q,c)-ограничено, размерность L_0 не превосходит m, а количество элементов в каждой h-орбите равно q, то количество представителей 0-го уровня (m,n,q,c)-ограничено.

Определение уровня 1. Определим *обобщенные централизаторы* $L_j(1)$ *уровня* 1, полагая для каждого $j \neq 0$

$$L_j(1) = \bigcap_{\vec{x}} \operatorname{Ker} \vartheta_{\vec{x}},$$

где $\vec{x} = (x_{i_1}(0), \ldots, x_{i_k}(0))$ пробегает всевозможные упорядоченные наборы длины k для всех $k \leq U$, состоящие из представителей уровня 0 таких, что $j + i_1 + \cdots + i_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; n)$. Так как число представителей 0-го уровня (m,n,q,c)-ограничено, здесь пересечение берется по (m,n,q,c)-ограниченному числу подпространств коразмерности $\leq m$ в L_j. Поэтому $L_j(1)$ — подпространство (m,n,q,c)-ограниченной коразмерности в L_j. Элементы из $L_j(1)$ также будем называть для краткости *централизаторами уровня* 1 и зафиксируем для них обозначение $y_j(1)$ (в рамках соглашения об индексах).

В силу построения любой элемент $y_j(1) \in L_j(1)$ обладает централизаторным свойством по отношению к представителям уровня 0:

$$[y_j(1), x_{i_1}(0), \ldots, x_{i_k}(0)] = 0,$$

как только $k \leq U$ и $j + i_1 + \cdots + i_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; n)$.

Зафиксируем теперь представители уровня 1. Для каждого шаблона $\mathbf{P}$ простого коммутатора веса $\leq U$ с ненулевыми индексами и нулевой суммой индексов по модулю n среди всех его значений на однородных элементах из $L_i(1)$, $i \neq 0$, выбираем коммутаторы, которые образуют базис подпространства, натянутого на все значения этого шаблона на однородных элементах из $L_i(1)$, $i \neq 0$. Элементы, участвующие в записи этих коммутаторов, назовем *представителями уровня* 1 и обозначим их через $x_j(1)$ (в рамках соглашения об индексах). Кроме того, для каждого (уже зафиксированного) представителя $x_j(1)$ уровня 1 зафиксируем все элементы h-орбиты:

$$O(x_j(1)) = \{x_j(1), x_j(1)^h, \ldots, x_j(1)^{h^{q-1}}\},$$

и назовем их также *представителями уровня* 1. Эти элементы будут обозначаться через $x_{r^s j}(1) := x_j(1)^{h^s}$ в рамках соглашения об индексах (поскольку $L_i^h \leq L_{ri}$).

Так как число рассматриваемых шаблонов (n,q,c)-ограничено, а размерность подпространства L_0 равна m, общее число представителей 1-го уровня (m,n,q,c)-ограничено.

Определение уровня $t > 1$. Предположим, что уже зафиксировано $(m,n,$ $q,c)$–ограниченное число представителей уровней $< t$. Определим *обобщенные централизаторы уровня* t, для каждого $j \neq 0$ полагая

$$L_j(t) = \bigcap_{\vec{x}} \operatorname{Ker}\, \vartheta_{\vec{x}},$$

где $\vec{x} = (x_{i_1}(\varepsilon_1), \ldots, x_{i_k}(\varepsilon_k))$ пробегает всевозможные упорядоченные наборы всех длин $k \leq U$, состоящие из представителей (возможно, разных) уровней $< t$ таких, что

$$j + i_1 + \cdots + i_k \equiv 0 \;(\mathrm{mod}\, n).$$

Элементы из $L_j(t)$ также будем называть для краткости *централизаторами уровня* t и зафиксируем для них обозначение $y_j(t)$ (в рамках соглашения об индексах).

Число представителей всех уровней $< t$ (m,n,q,c)-ограничено, и, кроме того, $\dim L_j/\operatorname{Ker}\vartheta_{\vec{x}} \leq m$ для всех $\vec{x}$. Поэтому пересечение здесь берется по (m,n,q,c)-ограниченному числу подпространств коразмерности $\leq m$ в L_j и, значит, $L_j(t)$ также имеет (m,n,q,c)-ограниченную коразмерность в подпространстве L_j.

По определению централизатор $y_j(t)$ уровня t обладает следующим централизаторным свойством по отношению к представителям меньших уровней:

$$[y_j(t), x_{i_1}(\varepsilon_1), \ldots, x_{i_k}(\varepsilon_k)] = 0, \tag{6}$$

как только $j+i_1+\cdots+i_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; n)$, $k \leq U$, а элементы $x_{i_s}(\varepsilon_s)$ — представители любых (возможно, различных) уровней $\varepsilon_s < t$.

Теперь зафиксируем представителей уровня t. Для каждого шаблона $\mathbf{P}$ простого коммутатора веса $\leq U$ с ненулевыми индексами и нулевой суммой индексов среди всех его значений на φ-однородных элементах из $L_i(t)$, $i \neq 0$, выберем коммутаторы, которые образуют базис подпространства, натянутого на все значения шаблона $\mathbf{P}$ на φ-однородных элементах из $L_i(t)$, $i \neq 0$. Однородные элементы, участвующие в записи этих коммутаторов, называются *представителями уровня* t и обозначаются через $x_j(t)$ (в рамках соглашения об индексах). Далее, для каждого (уже зафиксированного) представителя $x_j(t)$ уровня t зафиксируем элементы h-орбиты:

$$O(x_j(t)) = \{x_j(t), x_j(t)^h, \ldots, x_j(t)^{h^{q-1}}\},$$

и назовем их также *представителями уровня* t. Эти элементы будут обозначаться через $x_{r^s j}(t) := x_j(t)^{h^s}$ в рамках соглашения об индексах (поскольку $L_j^{h^s} \leq L_{r^s j}$). Так как число рассматриваемых шаблонов (n,q,c)-ограничено, а размерность подпространства L_0 равна m, общее число представителей уровня t (m,n,q,c)-ограничено. Построение централизаторов и представителей уровней $\leq T$ завершено.

5. Свойства централизаторов и представителей

Напомним, что мы зафиксировали обозначения $T = T(q,c) = f(q,c)+1$ (для максимального уровня) и $U = V(T, T-1, q, c)$, где f, V — функции из заключений теоремы 3.1 и предложения 3.3 соответственно.

Из построения обобщенных централизаторов ясно, что

$$L_j(k+1) \leq L_j(k) \tag{7}$$

для всех $j \neq 0$ и всех $k = 1, \ldots, T$.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определений уровня 0 и уровней $t > 0$ и из включений (7); обычно будем ссылаться на нее как на процедуру «замораживания».

Лемма 5.1 (процедура замораживания). *Любой простой коммутатор*

$$[y_{j_1}(k_1), y_{j_2}(k_2), \ldots, y_{j_w}(k_w)]$$

веса $w \leq U$ от централизаторов уровней $k_1, k_2, \ldots, k_w$ с нулевой по модулю n суммой индексов

$$j_1 + \cdots + j_w \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, n)$$

может быть представлен (заморожен) в виде линейной комбинации коммутаторов $[x_{j_1}(s), x_{j_2}(s), \ldots, x_{j_w}(s)]$ *того же шаблона от представителей любого уровня* s*, удовлетворяющего* $0 \leq s \leq \min\{k_1, k_2, \ldots, k_w\}$.

Определение. Назовем *квазипредставителем веса* w *и уровня* k любой коммутатор веса $w \geq 1$, в который входят ровно один представитель $x_i(k)$ уровня k и $w-1$ представителей $x_s(\varepsilon_s)$ любых меньших уровней $\varepsilon_s < k$. Квазипредставители уровня k (и только они) обозначаются через $\hat{x}_j(k) \in L_j$ в рамках соглашения об индексах; при этом, очевидно, индекс j равен по модулю n сумме индексов всех входящих в квазипредставитель элементов. Квазипредставители веса 1 — это в точности представители. □

Лемма 5.2. *Если* $y_j(t) \in L_j(t)$ *— централизатор уровня* t*, то* $(y_j(t))^h$ *— централизатор уровня* t*. Если* $\hat{x}_j(t)$ *— квазипредставитель уровня* t*, то* $(\hat{x}_j(t))^h$ *— квазипредставитель уровня* t*.*

Доказательство. Так как $(y_j(t))^h \in L_{rj}$, можем обозначить $(y_j(t))^h$ через y_{rj}. Пусть $x_{i_1}(\varepsilon_1), \ldots, x_{i_k}(\varepsilon_k)$, $k \leq U$, — произвольно выбранные представители любых (возможно, разных) уровней $\varepsilon_s < t$ такие, что $rj + i_1 + i_2 + \cdots + i_k \equiv 0 \pmod{n}$. По построению элементы $(x_{i_s}(\varepsilon_s))^{h^{q-1}} = x_{r^{q-1}i_s}(\varepsilon_s)$, $s = 1, \ldots, k$, также являются представителями соответствующих уровней ε_s. По условию элемент $y_j(t) = (y_{rj})^{h^{q-1}}$ — централизатор уровня t, поэтому он обладает централизаторным свойством (6) по отношению к представителям меньших уровней:

$$[y_j(t), x_{r^{q-1}i_1}(\varepsilon_1), \ldots, x_{r^{q-1}i_k}(\varepsilon_k)] = 0,$$

так как $j + r^{q-1}i_1 + \cdots + r^{q-1}i_k \equiv 0 \pmod{n}$ и $k \leq U$. Применяя автоморфизм h к последнему равенству, получаем, что

$$[y_{rj}, x_{i_1}(\varepsilon_1), \ldots, x_{i_k}(\varepsilon_k)] = 0,$$

т. е. элемент $(y_j(t))^h = y_{rj}$ является централизатором уровня t.

Рассмотрим теперь квазипредставитель $\hat{x}_j(t)$ веса w уровня t. По определению этот элемент является коммутатором, включающим ровно один представитель $x_{i_1}(t)$ уровня t и какие-то представители $x_{i_2}(\varepsilon_2), \ldots, x_{i_k}(\varepsilon_k)$ меньших (возможно различных) уровней $\varepsilon_s < t$. Под действием h получаем коммутатор от образов этих представителей. По построению образ $(x_{i_1}(t))^h = x_{ri_1}(t)$ снова является представителем уровня t, а образы $(x_{i_s}(\varepsilon_s))^h = x_{ri_s}(\varepsilon_s)$, $s = 2, \ldots, k$, являются представителями тех же уровней $\varepsilon_s < t$. Поэтому образ $(\hat{x}_j(t))^h$ также является коммутатором, включающим ровно один представитель $x_{ri_1}(t)$ уровня t и представителей $x_{ri_2}(\varepsilon_2), \ldots, x_{ri_k}(\varepsilon_k)$ меньших уровней $\varepsilon_s < t$. Значит, $(\hat{x}_j(t))^h$ — также квазипредставитель уровня t. □

В дальнейшем, пользуясь леммой 5.2, будем по умолчанию обозначать элементы $y_j(t)^{h^s}$ через $y_{r^s j}(t)$, а элементы $\hat{x}_j(t)^{h^s}$ — через $\hat{x}_{r^s j}(t)$.

Из леммы 5.2 также вытекает, что представители уровня t, элементы $x_j(t)$, $x_j(t)^h, \ldots, x_j(t)^{h^{q-1}}$, являются централизаторами уровня t.

Лемма 5.3. *Любой коммутатор, в который входят ровно один централизатор* $y_i(t)$ *уровня* t *и квазипредставители уровней* $< t$*, равен* 0*, если сумма индексов входящих в него элементов равна* 0*, а сумма весов этих элементов не превосходит* $U+1$*.*

Доказательство. Исходя из определений по тождествам Якоби и антикоммутативности, можно представить этот коммутатор в виде линейной комбинации простых коммутаторов веса $\leq U+1$, начинающихся с централизатора уровня t и включающих еще только какие-то представители уровней $< t$. Поскольку сумма индексов всех этих элементов также равна 0, все эти коммутаторы равны 0 в силу (6). $\square$

6. Основная теорема

В доказательстве теоремы 1.1 основным является случай, когда L — φ-однородная $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли, т. е. $L = L_0 \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_{n-1}$.

Предложение 6.1. *Теорема* 1.1 *справедлива для φ-однородных $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Ли $L = L_0 \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_{n-1}$.*

Доказательство. Напомним, что T — фиксированное обозначение для наивысшего уровня, который является (q, c)-ограниченным числом.

В § 4 мы построили обобщенные централизаторы $L_j(T)$. Полагаем

$$Z = \langle L_1(T),\, L_2(T), \dots, L_{n-1}(T)\rangle.$$

Для каждого $k = 0, 1, \dots, n-1$ обозначим подпространство $Z \cap L_k$ через Z_k. Ясно, что

$$Z = \bigoplus_{k=0}^{n-1} Z_k$$

и, в частности, Z порождена подпространствами Z_k. Кроме того, подалгебра Z является H-инвариантной по лемме 5.2, и $(Z_k)^h = Z_{rk}$, поскольку $(L_i)^h = L_{ri}$, $i \neq 0$.

Каждое подпространство $L_j(T)$ имеет (m, n, q, c)-ограниченную коразмерность в L_j, в то время как размерность L_0 равна m по условию. Так как $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$ и подалгебра Z порождается подпространствами $L_j(T)$, $j \neq 0$, то Z имеет (m, n, q, c)-ограниченную коразмерность в L. Докажем, что подалгебра Z к тому же нильпотентна (c, q)-ограниченной ступени и потому искомая.

Пусть $U = V(T, T-1, q, c)$, где V— функция из заключения предложения 3.3. Достаточно доказать, что любой простой коммутатор веса U вида

$$[y_{i_1}(T), \dots, y_{i_U}(T)], \tag{8}$$

где $y_{i_j}(T) \in L_{i_j}(T)$, равен нулю. Пусть X — объединение h-орбит элементов $y_{i_1}(T), \dots, y_{i_U}(T)$, т. е.

$$X = \bigcup_{j=1}^{U} O(y_{i_j}(T)),$$

где, напомним,

$$O(y_{i_j}(T)) = \{y_{i_j}(T),\ y_{i_j}(T)^h = y_{ri_j}(T), \dots, y_{i_j}(T)^{h^{q-1}} = y_{r^{q-1}i_j}(T)\}.$$

По предложению 3.3 коммутатор (8) можно представить в виде линейной комбинации φ-однородных коммутаторов от элементов, принадлежащих множеству X, каждый из которых либо обладает подкоммутатором вида (3), в котором имеется T различных начальных отрезков из L_0, либо подкоммутатором вида (4), в котором имеется $T-1$ вхождений элементов из L_0. Достаточно доказать, что коммутаторы (3) и (4) равны нулю.

Рассмотрим сначала коммутатор

$$[u_{k_0}, c_1, \dots, c_{T-1}], \tag{9}$$

где $u_{k_0} \in X$, каждый $c_i \in L_0$ с нумерующими индексами $i = 1, \ldots, T-1$ имеет вид

$$[x_{k_1}, \ldots, x_{k_i}],$$

где $x_{k_j} \in X$ и $k_1 + \cdots + k_i \equiv 0 \, (\operatorname{mod} n)$.

Используя лемму 5.1, «заморозим» каждый элемент c_k, где $k = 1, \ldots, T-1$, в виде линейной комбинации коммутаторов того же самого шаблона веса $< U$ от представителей уровня k. Затем, раскрывая внутренние скобки по тождеству Якоби $[a, [b, c]] = [a, b, c] - [a, c, b]$, представим коммутатор (9) в виде линейной комбинации коммутаторов вида

$$[u_{k_0}(T), x_{j_1}(1), \ldots, x_{j_k}(1), x_{j_{k+1}}(2), \ldots, x_{j_s}(2), \ldots, x_{j_{l+1}}(T-1), \ldots, x_{j_u}(T-1)]. \tag{10}$$

Подвергнем коммутатор (10) некоторому собирательному процессу. Нашей целью является представление коммутатора в виде линейной комбинации коммутаторов с начальными отрезками, состоящими из представителей разных уровней $1, 2, \ldots, T-1$ и элемента $u_{k_0}(T)$. Для этого по формуле $[a, b, c] = [a, c, b] + [a, [b, c]]$ в коммутаторе (10) начнем передвигать элемент $x_{j_{k+1}}(2)$ (первый слева элемент уровня 2) налево с целью поместить его сразу же после элемента $x_{j_1}(1)$. В ходе этих преобразований будут возникать дополнительные слагаемые специального вида. На первом шаге, скажем, получим сумму

$$[u_{k_0}(T), \ldots, x_{j_{k+1}}(2), x_{j_k}(1), \ldots] + [u_{k_0}(T), \ldots, [x_{j_k}(1), x_{j_{k+1}}(2)], \ldots].$$

В первом слагаемом продолжим перенос элемента $x_{j_{k+1}}(2)$ налево через все представители уровня 1. Во втором слагаемом заменим подкоммутатор $[x_{j_k}(1), x_{j_{k+1}}(2)]$ квазипредставителем $\hat{x}(2) = \hat{x}_{j_k + j_{k+1}}(2)$ и будем передвигать уже этот квазипредставитель налево через все представители уровня 1. Так как квазипредставитель уровня 2 переносим через представители уровня 1, в дополнительных слагаемых каждый раз возникают подкоммутаторы, которые являются квазипредставителями 2-го уровня, которые берут на себя роль перемещаемого элемента. В результате получим линейную комбинацию коммутаторов вида

$$[[u_{k_0}(T), x(1), \hat{x}(2)], x(1), \ldots, x(1), x(2), \ldots, x(2), \ldots, x(T-1), \ldots, x(T-1)]$$

с собранным начальным отрезком $[u_{k_0}(T), x(1), \hat{x}(2)]$. (Для простоты опустили в формуле индексы.) Далее начинаем передвигать в начало первый слева представитель 3-го уровня с целью поместить его на четвертое место. Важно, что этот элемент также перемещается только через представители меньшего уровня и в дополнительных слагаемых подкоммутаторы являются квазипредставителями уровня 3. Заменяя эти подкоммутаторы квазипредставителями уровня 3, продолжаем передвигать их налево и т. д. В конце этого процесса получим линейную комбинацию коммутаторов с начальным отрезком вида

$$[y_{k_0}(T), \, \hat{x}_{k_1}(1), \hat{x}_{k_2}(2), \ldots, \hat{x}_{k_{T-1}}(T-1)]. \tag{11}$$

По теореме 3.2 коммутатор (11) веса T равен линейной комбинации φ-однородных коммутаторов того же самого веса T от элементов из h-орбит элементов $y_{k_0}(T)$, $\hat{x}_{k_1}(1)$, $\hat{x}_{k_2}(2), \ldots, \hat{x}_{k_{T-1}}(T-1)$, которые обладают подкоммутаторами с нулевой суммой индексов по модулю n. По лемме 5.2 каждый элемент $(\hat{x}_{k_i}(i))^{h^l}$ является квазипредставителем вида $\hat{x}_{r^l k_i}(i)$ уровня i, а любой $(y_{k_0}(T))^{h^l}$ — централизатором вида $y_{r^l k_0}(T)$ уровня T. Так как каждый уровень возникает только один раз в (11) и имеется начальный отрезок с нулевой суммой индексов, каждый коммутатор этой линейной комбинации равен 0 по лемме 5.3.

Покажем теперь, что коммутатор вида

$$[y_{k_1}(T), \dots, y_{k_s}(T)], \tag{12}$$

где $y_{k_j} \in X$ и имеется T различных начальных отрезков с нулевой суммой индексов по модулю n:

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{r_i} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; n), \quad i = 1, 2, \dots, T,$$

$$1 < r_1 < r_2 < \dots < r_T = s,$$

равен нулю. Коммутатор (12) лежит в L_0 и является коммутатором от элементов из централизаторов $L_i(T)$ уровня T, поэтому по лемме 5.1 его можно «заморозить» в уровне T, т. е. представить в виде линейной комбинации коммутаторов того же самого шаблона веса $\leq U$ от представителей уровня T:

$$[x_{k_1}(T), \dots, x_{k_s}(T)]. \tag{13}$$

Далее, начальный отрезок коммутатора (13) длины r_{T-1} также лежит в L_0 и является коммутатором от элементов из централизаторов $L_i(T-1)$ уровня $T-1$, поскольку $L_i(T-1) \leq L_i(T)$, поэтому по лемме 5.1 его можно «заморозить» в уровне $T-1$, т. е. представить в виде линейной комбинации коммутаторов того же самого шаблона веса $\leq U$ от представителей уровня $T-1$, и т. д. В результате получим линейную комбинацию коммутаторов вида

$$[x(1), \dots, x(1), x(2), \dots, x(2), \dots, x(T), \dots, x(T)]. \tag{14}$$

(Мы опустили здесь индексы для простоты.) Подвергнем коммутатор (14) точно таким же преобразованиям, что и коммутатор (10). Сначала будем передвигать самый левый элемент уровня 2 налево на второе место, затем — самый левый элемент уровня 3 на третье место, и т. д. В дополнительных слагаемых возникающие квазипредставители $\hat{x}(i)$ берут на себя роль перемещаемого элемента и также передвигаются налево на i-е место. В конце получим линейную комбинацию коммутаторов вида

$$[\hat{x}_{k_1}(1), \hat{x}_{k_2}(2), \dots, \hat{x}_{k_T}(T)]. \tag{15}$$

По теореме 3.2 коммутатор (15) веса T равен линейной комбинации φ-однородных коммутаторов того же самого веса T от элементов из h-орбит элементов $\hat{x}_{k_1}(1)$, $\hat{x}_{k_2}(2), \dots, \hat{x}_{k_T}(T)$, которые обладают подкоммутаторами с нулевой суммой индексов по модулю n. По лемме 5.2 каждый элемент $(\hat{x}_{k_i}(i))^{h^l}$ является квазипредставителем вида $\hat{x}_{r^l k_i}(i)$ уровня i. Пусть $\hat{x}_{k_s}(s)$ — квазипредставитель максимального уровня s, входящий в начальный отрезок с нулевой суммой индексов. Представляя коммутатор в виде линейной комбинации простых коммутаторов, начинающихся с $\hat{x}_{k_s}(s)$, с тем же множеством входящих в него элементов, получим 0 по лемме 5.3. □

Завершим доказательство теоремы 1.1. Нам потребуется следующая

Лемма 6.2. *Пусть p — простое число, и пусть ψ — линейное преобразование конечного порядка p^k векторного пространства V над полем характеристики p, пространство неподвижных точек которого имеет конечную размерность m. Тогда размерность V конечна и не превосходит mp^k.*

Доказательство. Это хорошо известный факт, доказательство которого основано на рассмотрении жордановой формы преобразования ψ (см., например, [16, 1.7.4]). □

Предположим вначале, что характеристика поля $\mathbb{F}$ равна простому делителю p числа n. Пусть $\langle\psi\rangle$ — силовская p-подгруппа группы $\langle\varphi\rangle$, и пусть $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle \times \langle\chi\rangle$, где порядок χ не делится на p. Рассмотрим подалгебру неподвижных точек $A = C_L(\chi)$. Она ψ-инвариантна и $C_A(\psi) \subseteq C_L(\varphi)$. Поэтому $\dim C_A(\psi) \leq m$ и по лемме 6.2 размерность $\dim A = \dim C_L(\chi)$ ограничена некоторым (m,n)-ограниченным числом $u(m,n)$. При этом χ — полупростой автоморфизм алгебры Ли L порядка $\leq n$. Таким образом, L допускает фробениусову группу автоморфизмов $\langle\chi\rangle H$, и $\dim C_L(\chi) \leq u(m,n)$. Заменяя F на $\langle\chi\rangle$, можно предполагать, что p не делит n.

Пусть ω — примитивный корень n-й степени из 1. Расширим основное поле с помощью ω и обозначим через $\widetilde{L}$ алгебру $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\omega]$. Группа FH естественным образом действует на $\widetilde{L}$, причем подалгебра неподвижных точек $C_{\widetilde{L}}(H)$ нильпотентна той же самой ступени c, а подалгебра неподвижных точек $C_{\widetilde{L}}(F)$ имеет ту же самую размерность m. Так как характеристика поля не делит n, то

$$\widetilde{L} = L_0 \oplus L_1 \oplus \cdots \oplus L_{n-1},$$

где $L_k = \{a \in \widetilde{L} \mid a^{\varphi} = \omega^k a\}$, и это разложение является $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуировкой в силу

$$[L_s,\, L_t] \subseteq L_{s+t\,(\mathrm{mod} n)},$$

где $s+t$ вычисляется по модулю n.

По предложению 6.1 алгебра $\widetilde{L}$ обладает нильпотентной подалгеброй Z (m,n,q,c)-ограниченной коразмерности и (q,c)-ограниченной ступени нильпотентности. Очевидно, что подалгебра $L \cap Z$ — искомая подалгебра (m,n,q,c)-ограниченной коразмерности и (q,c)-ограниченной ступени нильпотентности в L. Теорема доказана.

7. Локально нильпотентные группы без кручения

Любая локально нильпотентная группа без кручения G может быть вложена в полную группу $\sqrt{G}$, состоящую из всех корней неединичных элементов из G, так называемое пополнение Мальцева группы G (см., например, [18, гл. 10]). Любой автоморфизм группы G единственным образом продолжается до автоморфизма группы $\sqrt{G}$. Полные группы без кручения могут рассматриваться как $\mathbb{Q}$-группы с дополнительными операциями извлечения рациональных корней. Соответствие Мальцева, данное формулой Бейкера — Хаусдорфа и ее обращением, устанавливает эквивалентность категории локально нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп и категории локально нильпотентных $\mathbb{Q}$-алгебр Ли (см., например, [18, гл. 10]). Можно считать, что соответствующие объекты в этих двух категориях имеют одно и то же основное множество. Пусть G и L — категорно эквивалентные друг другу $\mathbb{Q}$-группа и $\mathbb{Q}$-алгебра Ли соответственно с одним и тем же основным множеством. Тогда $\mathbb{Q}$-подгруппы G (т. е. полные подгруппы) являются (как подмножества) $\mathbb{Q}$-подалгебрами алгебры L и обратно, нормальные $\mathbb{Q}$-подгруппы G — это в точности идеалы в L, и т. д. Ступень нильпотентности подгруппы из G совпадает с ее ступенью нильпотентности как подалгебры Ли из L.

Напомним, что группа имеет конечный ранг r, если любая ее конечно порожденная подгруппа порождается r элементами (и r — наименьшее число с этим свойством). По теореме Мальцева [19, теорема 5] локально нильпотентная группа без кручения G имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда она нильпотентна и имеет конечный секционный ранг. Нам потребуется следующая версия теоремы Мальцева, доказанная в [14].

Лемма 7.1 [14, лемма 9]. *Если локально нильпотентная группа без кручения C имеет конечный ранг r, то $\mathbb{Q}$-алгебра Ли U, эквивалентная $\sqrt{C}$ в категорном соответствии Мальцева, имеет конечную r-ограниченную размерность.*

Теорема 7.2. *Пусть FH — фробениусова группа с циклическим ядром F порядка n и дополнением H порядка q. Если FH действует автоморфизмами на локально нильпотентной группе без кручения G таким образом, что подгруппа неподвижных точек $C_G(F)$ имеет конечный ранг r, а подгруппа неподвижных точек $C_G(H)$ нильпотентна ступени c, то G обладает нильпотентной подгруппой T, ступень нильпотентности которой ограничена некоторой функцией, зависящей только от q и c, такой, что T имеет конечный «коранг» $t = t(r, n, q, c)$ в G, ограниченный сверху в терминах r, n, q и c в том смысле, что имеется t элементов $g_1, \dots, g_t$ таких, что каждый элемент из G является корнем элемента подгруппы $\langle g_1, \dots, g_t, T\rangle$.*

Доказательство. Будем обозначать теми же буквами F и H продолжения групп автоморфизмов на группу $\sqrt{G}$. Пусть L — $\mathbb{Q}$-алгебра Ли с тем же самым основным множеством $\sqrt{G}$, построенная с помощью соответствия Мальцева. Автоморфизмы алгебры Ли L — это автоморфизмы группы $\sqrt{G}$, действующие на том же самом множестве и точно таким же образом. Так как

$$\sqrt{C_G(H)} = C_{\sqrt{G}}(H) = C_L(H), \quad \sqrt{C_G(F)} = C_{\sqrt{G}}(F) = C_L(F),$$

подалгебра $C_L(H)$ нильпотентна ступени c, а подалгебра $C_L(F)$ имеет r-ограниченную размерность по лемме 7.1. По теореме 1.1 алгебра L обладает нильпотентной подалгеброй Z (c, q)-ограниченной ступени нильпотентности и (r, n, q, c)-ограниченной коразмерности. Пересечение $Z \cap G$ и будет искомой подгруппой в G. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нерешенные задачи* теории групп. Коуровская тетрадь. 17-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2010.
2. *Khukhro E. I.* Graded Lie rings with many commuting components and an application to 2-Frobenius groups // Bull. London Math. Soc. 2008. V. 40. P. 907–912.
3. *Makarenko N. Y., Shumyatsky P.* Frobenius groups as groups of automorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 2010. V. 138. P. 3425–3436.
4. *Хухро Е. И.* Нильпотентная длина конечной группы, допускающей фробениусову группу автоморфизмов с ядром без неподвижных точек // Алгебра и логика. 2010. Т. 49. С. 819–833.
5. *Khukhro E. I., Makarenko N. Y., Shumyatsky P.* Frobenius groups of automorphisms and their fixed points // Forum Math. 2011; DOI: 10.1515/FORM.2011.152; arxiv.org/abs/1010.0343.
6. *Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И., Шумяцкий П.* Неподвижные точки фробениусовых групп автоморфизмов // Докл. АН. 2011. Т. 437, № 1. С. 20–23.
7. *Shumyatsky P.* On the exponent of a finite group with an automorphism group of order twelve // J. Algebra. 2011. V. 331. P. 482–489.
8. *Shumyatsky P.* Positive laws in fixed points of automorphisms of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2011. V. 215. P. 2550–2566.
9. *Khukhro E. I.* Fitting height of a finite group with a Frobenius group of automorphisms // J. Algebra. 2012. V. 366. P. 1–11.
10. *Хухро Е. И.* Автоморфизмы конечных групп, допускающих расщепление // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 3. С. 392–411.
11. *Хухро Е. И.* Кольца Ли и группы, допускающие почти регулярный автоморфизм простого порядка // Мат. сб. 1990. Т. 181. С. 1207–1219.

12. *Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И.* Кольца Ли, допускающие автоморфизм порядка 4 с малым числом неподвижных точек // Алгебра и логика. 1996. Т. 35. С. 41–78.
13. *Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И.* Кольца Ли, допускающие автоморфизм порядка 4 с малым числом неподвижных точек. II // Алгебра и логика. 1998. Т. 37. С. 144–166.
14. *Khukhro E. I., Makarenko N. Yu.* Lie rings with almost regular automorphisms // J. Algebra. 2003. V. 264. P. 641–664.
15. *Makarenko N. Yu., Khukhro E. I.* Almost solubility of Lie algebras with almost regular automorphisms // J. Algebra. 2004. V. 277. P. 370–407.
16. *Khukhro E. I.* Nilpotent groups and their automorphisms. Berlin: De Gruyter, 1993.
17. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. II. Berlin: Springer-Verl., 1982.
18. *Khukhro E. I.* p-Automorphisms of finite p-groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
19. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб. 1951. Т. 28. С. 567–588.

Статья поступила 31 октября 2012 г.

Макаренко Наталья Юрьевна, Хухро Евгений Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
natalia_makarenko@yahoo.fr, khukhro@yahoo.co.uk