Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК 512.542

О ГРУППАХ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ КОНЕЧНЫХ ПОДГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ПАРАМИ 2–ЭЛЕМЕНТОВ

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Аннотация. Доказано, что периодическая группа, в которой любая конечная подгруппа, порожденная парой 2-элементов, является либо двуступенно нильпотентной группой, либо группой периода 4, обладает нормальной силовской 2-подгруппой, которая либо двуступенно нильпотентна, либо периода 4.

Ключевые слова: локально конечная группа, 2-энгелева группа, инволюция.

В [1] доказана локальная конечность 2-группы, в которой каждая конечная подгруппа двуступенно нильпотентна. Цель настоящей работы — следующим образом обобщить этот результат.

Теорема. *Пусть G — группа, в которой порядок произведения любых двух инволюций конечен. Если любая конечная подгруппа из G, порожденная парой 2-элементов, является либо двуступенно нильпотентной группой, либо группой периода 4, то все 2-элементы группы G составляют нормальную подгруппу T, которая либо двуступенно нильпотентна, либо периода 4. В частности, T локально конечна.*

Здесь *группой периода* 4 мы называем группу, в которой для любого элемента x выполняется равенство $x^4 = 1$, а под *двуступенно нильпотентной группой* понимаем группу, в которой выполнено тождество $[[x, y], z] = 1$. В этом смысле, например, элементарная абелева 2-группа является одновременно двуступенно нильпотентной группой и группой периода 4.

1. Предварительные результаты

Лемма 1.1. *Пусть G — группа и $R_2(G) = \{a \in G \mid [[a, x], x] = 1$ для всех $g \in G\}$.*

(a) *$R_2(G)$ является нормальной в G подгруппой.*

(b) *Если $R_2(G)$ не содержит элементов порядка 3, то $R_2(G)$ двуступенно нильпотентна.*

(c) *Если $a \in R_2(G)$, то $[[x, a], a] = 1$ для любых $x \in G$ и $\langle a^G \rangle$ — коммутативная группа.*

Доказательство. Пп. (a) и (c) доказаны в [2], п. (b) см. в [3, разд. III.6.5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11–01–00456, 11–01–91158, 12–01–90006), ФЦП «Научно-образовательные кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт 14.740.11.0346), а также программы СО РАН проектов партнерских фундаментальных исследований на 2012–2014 гг. (проект № 14).

Лемма 1.2. *Пусть*

$$F = \langle x, y, z \mid 1 = x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^4 = (yz)^4 = (xz)^4$$
$$= ((xy)^2 \cdot z)^4 = ((xz)^2 \cdot y)^4 = ((yz)^2 \cdot x)^4 = (x \cdot z^y)^4 = (x \cdot y^z)^4 = (z \cdot y^x)^4\rangle.$$

Тогда F — конечная 2-группа.

Доказательство. Перечисление смежных классов F по тривиальной подгруппе в пакете GAP [4] показывает, что $|F| = 2^{11}$.

Лемма 1.3. *Пусть $H = \langle x, y\rangle$ — двуступенно нильпотентная группа. Если порядки x, y и xy равны 8, 4 и 4 соответственно, то $x^y = x^{-1}u$, где $u^2 = 1$.*

Доказательство. Пусть $c = [x, y^{-1}] = [x, y]^{-1}$. Тогда

$$(xy)^2 = xyxy = x^2x^{-1}yxy^{-1}y^2 = x^2 \cdot y^2 \cdot c \neq 1$$

и

$$1 = (xy)^4 = x^4 \cdot c^2,$$

т. е. $c^2 = x^4$ и порядок $[x, y] = c^{-1}$ равен 4.

Теперь $\langle x, [x, y]\rangle = \langle x\rangle \times \langle v\rangle$, где $v^2 = 1$, а $[x, y] = x^{2a}v^b$, где $a \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$. Поэтому $[x, y] = x^{-2}u$, где $u^2 = 1$ и $x^y = x^{-1}u$. Лемма доказана.

Лемма 1.4 [5]. *Группа периода 4 локально конечна.*

2. Доказательство теоремы

Лемма 2.1. *Если $a, b \in G$ и $a^4 = b^2 = 1$, то $(ab)^4 = 1$.*

Доказательство. Пусть вначале $a^2 = 1$. Тогда $H = \langle a, b\rangle$ — конечная группа диэдра. По условию $|H| \leqslant 8$ и $(ab)^4 = 1$.

Пусть теперь a — элемент порядка 4. Тогда подгруппа $H = \langle a^2, b, b^a\rangle$ инвариантна относительно $\langle a\rangle$. По предыдущему абзацу отображение $x \to a^2$, $y \to b$, $z \to b^a$ продолжается до гомоморфизма группы F из леммы 1.2 на H. Так как F по лемме 1.2 конечна, конечна и H, а вместе с ней и $K = \langle a, b\rangle$.

Если K — группа периода 4, то, очевидно, $(ab)^4 = 1$. Если же K двуступенно нильпотентна, то $(ab)^2 = a^2[a, b]$. Поскольку $[a, b] \in Z(K)$, то $[a, b]^2 = [a, b^2] = 1$ и $(ab)^4 = a^4 = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Период подгруппы I_1, порожденной всеми инволюциями из G, делит число 4. В частности, I_1 локально конечна.*

Доказательство. Любой элемент из I_1 является произведением $t_1 \cdots t_n$ инволюций, $t_1, \ldots, t_n \in G$. Теперь справедливость заключения леммы вытекает из леммы 2.1 индукцией по n, а локальная конечность — из следующей леммы.

Лемма 2.3. *Если X — локально конечная нормальная 2-подгруппа из G, то G/X удовлетворяет условиям теоремы.*

Доказательство. Пусть aX, bX — 2-элементы из G/X, порождающие конечную подгруппу в G/X. Тогда $H = \langle a, b, X\rangle$ — расширение локально конечной группы X посредством конечной группы и тем самым она локально конечна. Поэтому $\langle a, b\rangle$ — конечная группа, порожденная 2-элементами a и b. По условию $\langle a, b\rangle$ — двуступенно нильпотентная группа или группа периода 4. Это свойство сохраняется и при гомоморфизме в G/X. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Все* 2*-элементы из* G *порождают локально конечную* 2*-подгруппу.*

Доказательство. Пусть I_1 — подгруппа, порожденная всеми инволюциями из G. Определим по индукции I_{n+1}/I_n как подгруппу, порожденную всеми инволюциями из G/I_n, $n = 1, 2, \ldots$. Индукция по n вместе с леммами 2.2 и 2.3 показывает, что I_{n+1}/I_n — локально конечная 2-группа, откуда следует, что I_n — локально конечная 2-группа для любого $n = 1, 2, \ldots$.

Далее $I = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_n$ — нормальная локально конечная 2-подгруппа из G. Если x — элемент порядка 2^n из G, то, очевидно, $x \in I_n$, поэтому I содержит все 2-элементы из G. Лемма доказана.

Пусть T — множество всех 2-элементов из G. По лемме 2.4 T — локально конечная подгруппа в G.

Пусть T_0 — множество элементов z из T, для которых $[[z, x], x] = 1$ при любом $x \in T$.

Лемма 2.5. T_0 *— нормальная в* T *подгруппа, содержащая все элементы порядка, большего четырех.*

Доказательство. Из п. (a) леммы 1.1 вытекает, что T_0 — нормальная в T подгруппа. Если z — элемент из T, порядок которого больше четырех, а x — произвольный элемент из T, то $H = \langle z, x \rangle$ — конечная 2-подгруппа из G, период которой больше четырех. Поэтому H двуступенно нильпотентна и, следовательно, $[[z, x], x] = 1$. Отсюда $z \in T_0$. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Если* T *не является группой периода* 4*, то* T_0 *содержит все инволюции из* T *и* T/T_0 *— элементарная абелева* 2*-группа.*

Доказательство. Можно считать, что $T_0 \neq T$. Пусть $\bar{x} = T_0 x \in T/T_0$ и $\bar{x}^2 \neq 1$. Тогда $x^2 \neq 1$. По лемме 2.5 $x^4 = 1$ и $t = x^2$ — инволюция. Пусть y — элемент порядка 8 из T_0, t — инволюция из G. Тогда $\langle y, t \rangle$ — двуступенно нильпотентная группа и поэтому $(yt)^2 = y^2[y, t]$, а

$$(yt)^4 = y^4[y, t]^2 = y^4[y, t^2] = y^4 \neq 1.$$

По лемме 2.5 $yt \in T_0$ и $t \in T_0$.

Предположим, что T/T_0 содержит элемент $\bar{x} = T_0 x$, порядок которого больше двух. Тогда $x \notin T_0$, $x^2 \neq 1$ и по лемме 2.5 $x^4 = 1$. Но тогда $t = x^2$ — инволюция и по предыдущему абзацу $t \in T_0$, откуда $\bar{x}^2 = 1$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Если* T *не является группой периода* 4*, то* $|T : T_0| \leqslant 2$.

Доказательство. Предоположим противное. Тогда существуют такие элементы x, y из T, что $x, y, xy \notin T_0$. Пусть z — элемент порядка 8 из T. Тогда $z \in T_0$ и zx, zy, zxy — элементы порядка 4. Кроме того, $\langle z, x \rangle$, $\langle z, y \rangle$, $\langle z, xy \rangle$ — двуступенно нильпотентные группы. По лемме 1.1(c) $\langle z^T \rangle$ — коммутативная группа, а по лемме 1.3

$$z^x = z^{-1}u, \quad z^y = z^{-1}v, \quad z^{xy} = z^{-1}w,$$

где $u^2 = v^2 = w^2 = 1$, откуда $z^{-2} = vu^y w$. Так как v, u^y, w — инволюции, лежащие в коммутативной группе $\langle z^T \rangle$, то

$$z^{-4} = v^2 (u^y)^2 w^2 = 1.$$

Полученное противоречие с выбором z доказывает лемму.

Лемма 2.8. *Если T не является группой периода 4, то $T = T_0$.*

Доказательство. Предположим противное. По лемме 2.7 $|T : T_0| = 2$. Пусть $x, y \in T$. Покажем, что $\langle x, y\rangle$ двуступенно нильпотентна. Если $x \in T_0$ или $y \in T_0$, то по лемме 1.1(c)

$$[[x, y], y] = [[y, x], x] = [[x, y]^{-1}, x] = 1,$$

откуда $[x, y] \in Z(\langle x, y\rangle)$ и $\langle x, y\rangle$ двуступенно нильпотентна. Если же $x, y \notin T_0$, то по лемме 2.7 $y = xy_0$, где $y_0 \in T_0$, поэтому $\langle x, y\rangle = \langle x, y_0\rangle$ — двуступенно нильпотентная группа.

Итак, в T выполнено тождество $[[x, y], y] = 1$, т. е. $T = T_0$. Лемма доказана.

Если T не является группой периода 4, то по лемме 2.7 $T = T_0$. По лемме 1.1(b) T_0 двуступенно нильпотентна. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лыткина Д. В.* О 2-группах, конечные подгруппы которых обладают заданными свойствами // Владикавк. мат. журн. 2011. Т. 13, № 4. С. 35–39.
2. *Kappe W. P.* Die *A*-Norm einer Gruppe // Ill. J. Math. 1961. V. 5, N 1. P. 187–191.
3. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979.
4. *GAP*: Groups, algorithms, and programming. http://www/gap-system.org.
5. *Санов И. Н.* Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. 1940. Т. 55. С. 166–170.

Статья поступила 26 июня 2012 г.

Лыткина Дарья Викторовна, Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090;
Сибирский гос. университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102
daria.lytkin@gmail.com, mazurov@math.nsc.ru