Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 517.54

К ЗАДАЧЕ О НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЯХ

В. А. Пчелинцев

Аннотация. Решается задача о нахождении множества E значений одного функционала на классе пар функций, однолистных в системе круг — внешность круга при произвольных параметрах, характеризующих функционал. Устанавливается, что множество E связное и ограниченное. С помощью метода внутренних вариаций и параметрического метода находится уравнение границы множества E. Полученные результаты распространяют исследования Н. А. Лебедева [1].

Ключевые слова: функционал, класс $\mathfrak{M}$, неналегающие области, множество значений, метод внутренних вариаций, параметрический метод, эллиптические интегралы.

§ 1. Введение

Пусть G и G^* — односвязные области в w-плоскости, не имеющие общих точек и такие, что $0 \in G$, а $\infty \in G^*$. Пусть $f(z) : U \to G$, а $F(\zeta) : U^* \to G^*$ — голоморфные однолистные функции, нормированные условиями $f(0) = 0$ и $F(\infty) = \infty$, где $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $U^* = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$. Совокупность пар функций $(f(z), F(\zeta))$ указанного вида называется *классом* $\mathfrak{M}$. Класс $\mathfrak{M}$ связный [2].

В данной работе решается задача о нахождении множества E значений функционала

$$\xi(f, F) = \ln \frac{f^{\gamma}(z_0)}{F^{1-\gamma}(\zeta_0)}, \quad 0 < \gamma < 1, \tag{1}$$

при фиксированных z_0 и ζ_0, $0 < |z_0| < 1$ и $1 < |\zeta_0| < \infty$, на классе $\mathfrak{M}$, которая обобщает исследования Н. А. Лебедева области значений функционала $f(z_0)/F(\zeta_0)$ в задаче о неналегающих областях [1].

Задачи о неналегающих областях являются классическими и связаны с различными экстремальными вопросами геометрической теории аналитических функций. Толчком к развитию таких задач послужила работа М. А. Лаврентьева [3], в которой была впервые поставлена и решена задача о максимуме произведения конформных радиусов двух непересекающихся односвязных областей. Значительные результаты в решении подобного рода задач получены П. П. Куфаревым [4], Г. М. Голузиным [5], Н. А. Лебедевым [1, 6] и другими математиками. Исследования задач о неналегающих областях проводятся различными методами геометрической теории функций комплексного переменного, а именно методом площадей, параметрическим методом, методом внутренних вариаций и другими.

В § 2 с помощью вариационного метода Голузина [5] (см. также [7]) строятся варьированные пары функций $(f(z, \varepsilon), F(\zeta, \varepsilon))$ для граничных функций $(f(z), F(\zeta)) \in \mathfrak{M}$, зависящие от вещественного параметра таким образом, что

$(f(z,\varepsilon), F(\zeta,\varepsilon)) \in \mathfrak{M}$ при достаточно малом ε. Получено необходимое условие для граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$ функционала (1), с помощью которого совместно с парой простых вариаций доказано, что области G и G^* покрывают всю w-плоскость (теорема 1).

В § 3 как результат применения необходимого условия и комбинаций основных и простых вариаций получена система функционально-дифференциальных уравнений для граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$ (теорема 2). Параметрическим методом Лёвнера [8] (см. также [7, 9]) устанавливается, что коэффициенты системы положительные вещественные. Анализируя эту систему уравнений, заключаем, что области G и G^* имеют общей границей некоторую замкнутую жорданову аналитическую кривую.

Интегрируя в § 4 равенства из полученной системы по специально выбранным путям, находим уравнение границы множества E значений функционала (1) (теорема 3).

§ 2. Вариационные формулы и необходимое условие для граничных функций

В класс $\mathfrak{M}$ вместе с $(f(z), F(\zeta))$ входит пара функций $(f(ze^{i\varphi}), F(\zeta e^{i\psi}))$ при любых $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. В связи с этим имеет место независимость множества E от аргументов точек z_0 и ζ_0. Поэтому будем считать в дальнейшем, что $z_0 = r \in (0,1)$, $\zeta_0 = \rho \in (1, +\infty)$. Поскольку функционал (1) непрерывный [9], а класс $\mathfrak{M}$ связный [2], множество E связно. Для нахождения множества E достаточно найти его границу Γ.

Известно, что при нахождении границы Γ множества E достаточно рассмотреть только совокупность неособых граничных точек [10]. Нахождение неособых граничных точек множества E значений функционала (1) сводится к разысканию наименьшего значения вещественнозначного функционала

$$I(f,F) = \left| \ln \frac{f^{\gamma}(r)}{F^{1-\gamma}(\rho)} - I_e \right|, \quad 0 < \gamma < 1,$$

в классе $\mathfrak{M}$ для произвольной точки $I_e \notin E$.

Пусть I_0 — неособая граничная точка множества E и $(f(z), F(\zeta))$ — пара функций из класса $\mathfrak{M}$, для которой $I((f(z), F(\zeta))) = I_0$. Функции такой пары называются *граничными*. Если $(f(z), F(\zeta)) \in \mathfrak{M}$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ классу $\mathfrak{M}$ также принадлежат

1) пара простых вариаций

$$f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon A \frac{f(z)}{f(z) - w_0}, \quad F(\zeta,\varepsilon) = F(\zeta) + \varepsilon A \frac{F(\zeta)}{F(\zeta) - w_0}, \tag{2}$$

где w_0 — внешняя точка одновременно для областей G и G^*, A — произвольная комплексная постоянная;

2) комбинация основной и простой вариаций

$$f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon A \left(\frac{f(z)}{f(z) - f(z_0)} - \frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)} \frac{z f'(z)}{z - z_0} \right) \\ + \varepsilon \overline{A} \overline{\frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)}} \frac{z^2 f'(z)}{1 - \overline{z_0} z} + o(z,\varepsilon),$$

$$F(\zeta,\varepsilon) = F(\zeta) + \varepsilon A \frac{F(\zeta)}{F(\zeta) - f(z_0)}, \tag{3}$$

где $z_0 \in U$, A — произвольная комплексная постоянная;

3) комбинация простой и основной вариаций

$$f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon A \frac{f(z)}{f(z) - F(\zeta_0)},$$

$$F(\zeta,\varepsilon) = F(\zeta) + \varepsilon A\left(\frac{F(\zeta)}{F(\zeta) - F(\zeta_0)} - \frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0^2 f'^2(\zeta_0)}\frac{\zeta^2 F'(\zeta)}{\zeta - \zeta_0}\right) + \varepsilon\overline{A}\,\overline{\frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0^2 f'^2(\zeta_0)}}\frac{\zeta F'(\zeta)}{1 - \overline{\zeta_0}\zeta} + o(\zeta,\varepsilon), \quad (4)$$

где $\zeta_0 \in U^*$, A — произвольная комплексная постоянная.

Формулы (2)–(4) могут быть записаны в общем виде:

$$f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon P(z) + o(z,\varepsilon),$$

$$F(\zeta,\varepsilon) = F(\zeta) + \varepsilon Q(\zeta) + o(\zeta,\varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$ и $o(z,\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри U и $o(\zeta,\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри U^*.

Пусть $(f(z), F(\zeta))$ — пара граничных функций из класса $\mathfrak{M}$, соответствующих некоторой точке $I_e \notin E$, и $(f(z,\varepsilon), F(\zeta,\varepsilon))$ — варьированные функции, полученные по одной из пар формул (2), (3) или (4). Тогда

$$I_* = \left|\ln\frac{f^\gamma(r,\varepsilon)}{F^{1-\gamma}(\rho,\varepsilon)} - I_e\right| \geq \left|\ln\frac{f^\gamma(r)}{F^{1-\gamma}(\rho)} - I_e\right| = I_0. \quad (5)$$

Используя формулу Тейлора в (5), получаем, что каждая пара граничных функций удовлетворяет необходимому условию

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha}\left(\gamma\frac{P(r)}{f(r)} - (1-\gamma)\frac{Q(\rho)}{F(\rho)}\right)\right] \geq 0, \quad (6)$$

где $\alpha = \arg(\xi_0 - I_e)$.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$, $F(\zeta)$ — граничные функции функционала* (1). *Тогда объединение областей G и G^* не имеет в плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ внешних точек.*

Доказательство. Предположим, что $G \cup G^*$ имеет в $\overline{\mathbb{C}}$ хотя бы одну внешнюю точку w_0. Выбрав (2) в качестве функций сравнения, перепишем неравенство (6) в виде

$$\operatorname{Re}\left[Ae^{-i\alpha}\left(\frac{\gamma}{f(r) - w_0} - \frac{1-\gamma}{F(\rho) - w_0}\right)\right] \geq 0.$$

Поскольку выражение в скобках отлично от нуля, в силу произвольности $\arg A$ найдется такое A, что справедливо неравенство $I_* < I_0$, которое противоречит (5). Теорема 1 доказана.

§ 3. Дифференциальные уравнения для граничных функций

Применяя неравенство (6) совместно с парой вариационных формул (3) и с парой вариационных формул (4), получаем систему функционально-дифференциальных уравнений для граничных функций.

Теорема 2. *Каждая граничная пара функций $(f(z), F(\zeta))$ функционала (1) удовлетворяет в U и U^* системе функционально-дифференциальных уравнений:*

$$e^{-i\alpha}\frac{((1-2\gamma)f(z)-(1-\gamma)f(r)+\gamma F(\rho))f'^2(z)}{f(z)(f(z)-F(\rho))(f(z)-f(r))}=\frac{\gamma C}{z(r-z)(1-rz)}, \tag{7}$$

$$e^{-i\alpha}\frac{((1-2\gamma)F(\zeta)-(1-\gamma)f(r)+\gamma F(\rho))f'^2(\zeta)}{F(\zeta)(F(\zeta)-F(\rho))(F(\zeta)-f(r))}=\frac{(1-\gamma)D}{\zeta(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}, \tag{8}$$

где

$$C=e^{-i\alpha}\frac{rf'(r)}{f(r)}(1-r^2)>0, \quad D=e^{-i\alpha}\frac{\rho F'(\rho)}{f(\rho)}(\rho^2-1)>0.$$

Доказательство. Неравенство (6) в случае выбора пары вариационных формул (3) примет вид

$$\operatorname{Re}\biggl[e^{-i\alpha}\frac{\gamma A}{f(r)-f(z_0)}-e^{-i\alpha}\gamma A\frac{rf'(r)}{f(r)}\frac{f(z_0)}{z_0f'^2(z_0)}\frac{1}{r-z_0} + e^{-i\alpha}\gamma\overline{A}\frac{r^2f'(r)}{f(r)}\overline{\frac{f(z_0)}{z_0f'^2(z_0)}}\frac{1}{1-r\overline{z_0}}-e^{-i\alpha}\frac{(1-\gamma)A}{F(\rho)-f(z_0)}\biggr]\geq 0.$$

Заменяя предпоследнее слагаемое под знаком вещественной части его сопряженным значением, имеем

$$\operatorname{Re}A\biggl[e^{-i\alpha}\frac{\gamma}{f(r)-f(z_0)}-e^{-i\alpha}\gamma\frac{rf'(r)}{f(r)}\frac{f(z_0)}{z_0f'^2(z_0)}\frac{1}{r-z_0} + e^{i\alpha}\gamma\frac{\overline{r^2f'(r)}}{f(r)}\frac{f(z_0)}{z_0f'^2(z_0)}\frac{1}{1-rz_0}-e^{-i\alpha}\frac{(1-\gamma)}{F(\rho)-f(z_0)}\biggr]\geq 0.$$

В этом условии выражение в скобках равно нулю, иначе при надлежащем выборе $\arg A$ получили бы, что левая часть последнего неравенства отрицательна. Отсюда

$$e^{-i\alpha}\frac{\gamma}{f(r)-f(z_0)}-e^{-i\alpha}\gamma\frac{rf'(r)}{f(r)}\frac{f(z_0)}{z_0f'^2(z_0)}\frac{1}{r-z_0} + e^{i\alpha}\gamma\frac{\overline{r^2f'(r)}}{f(r)}\frac{f(z_0)}{z_0f'^2(z_0)}\frac{1}{1-rz_0}-e^{-i\alpha}\frac{(1-\gamma)}{F(\rho)-f(z_0)}=0.$$

Так как последнее равенство справедливо при любом z_0 из круга U, заменив в нем z_0 на z, получаем дифференциальное уравнение для граничной функции $f(z)$:

$$e^{-i\alpha}\frac{((1-2\gamma)f(z)-(1-\gamma)f(r)+\gamma F(\rho))f'^2(z)}{f(z)(f(z)-F(\rho))(f(z)-f(r))}=\gamma\frac{B-(B-\overline{B})rz-r^2\overline{B}}{z(r-z)(1-rz)}, \tag{9}$$

где

$$B=e^{-i\alpha}\frac{rf'(r)}{f(r)}.$$

Покажем, что $\operatorname{Im}B=0$. Для этого рассмотрим функцию $f_\varphi=f(re^{i\varphi})$ при различных вещественных φ. Величина

$$I(f,F)=\left|\ln\frac{f^\gamma(re^{i\varphi})}{F^{1-\gamma}(\rho)}-I_e\right|$$

при $-\pi < \varphi \le \pi$ достигает минимума в точке $\varphi = 0$. Поэтому

$$\left.\frac{dI(f,F)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = 0,$$

что в развернутом виде равносильно тому, что $\operatorname{Im} B = 0$. Итак, B — вещественное число.

Из того, что величина

$$I(f,F) = \left|\ln\frac{f^{\gamma}(\psi(r,\tau))}{F^{1-\gamma}(\rho)} - I_e\right|,$$

где $\psi(z,\tau)$ — решение уравнения Лёвнера

$$\frac{d\psi}{d\tau} = -\psi\frac{1+\varkappa\psi}{1-\varkappa\psi}, \quad \varkappa = \mathrm{const}, \quad |\varkappa| = 1, \quad \psi(z,\tau)\,|_{\tau=0} = z, \quad \tau \ge 0,$$

достигает минимума при $\tau = 0$, заключаем, что $B > 0$. Следовательно, уравнение (9) перепишется в виде

$$e^{-i\alpha}\frac{((1-2\gamma)f(z) - (1-\gamma)f(r) + \gamma F(\rho))f'^2(z)}{f(z)(f(z)-F(\rho))(f(z)-f(r))} = \frac{\gamma C}{z(r-z)(1-rz)},$$

где

$$C = e^{-i\alpha}\frac{rf'(r)}{f(r)}(1-r^2) > 0.$$

Аналогично выводится второе уравнение (8) из системы, если применить неравенство (6) совместно с парой вариационных формул (4). Теорема 2 доказана.

Из аналитической теории дифференциальных уравнений [11] следует, что всякое решение системы (7), (8) не имеет особых точек, поэтому у граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$ нет особых точек на границах ∂U и ∂U^*. Отсюда и из теоремы 1 приходим к заключению, что области G и G^* имеют в качестве общей границы некоторую замкнутую жорданову аналитическую кривую.

§ 4. Уравнение границы множества E

С целью нахождения уравнения границы множества E значений функционала (1) проинтегрируем равенства (7) и (8).

Извлечем из обеих частей равенства (7) квадратный корень и проинтегрируем его по z от 0 до r. Рассмотрим левую часть:

$$J = e^{-i\alpha/2}\int\limits_0^r \sqrt{\frac{((1-2\gamma)f(z) - (1-\gamma)f(r) + \gamma F(\rho))}{f(z)(f(z)-F(\rho))(f(z)-f(r))}}\, f'(z)\, dz.$$

Меняя переменную интегрирования $t = f(z)/f(r)$, имеем

$$J = a\int\limits_0^1 \frac{t-b}{\sqrt{t(1-t)(1-ct)(t-b)}}\, dt,$$

где

$$a = e^{-i\alpha/2}\sqrt{\frac{(1-2\gamma)f(r)}{F(\rho)}}, \quad b = \frac{(1-\gamma)f(r) - \gamma F(\rho)}{(1-2\gamma)f(r)}, \quad c = \frac{f(r)}{F(\rho)}.$$

Полагая $t = 1/x$ в J, находим

$$J = a\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{(x-1)(x-c)(1-bx)}} - ab\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-c)(1-bx)}}.$$

Делая замену переменной $y = (b-1)/(bx-1)$ в интегралах, после преобразований получаем

$$J = -2e^{-i\alpha/2}\gamma h^{-1}\Pi(n,k),$$

где

$$\Pi(n,k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1+n\sin^2 t)\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

— полный эллиптический интеграл третьего рода,

$$h = \sqrt{\frac{\gamma F(\rho) - (1-\gamma)f(r)}{F(\rho) - f(r)}}, \quad k = \sqrt{\frac{(1-\gamma)f(r)}{(1-\gamma)f(r) - \gamma F(\rho)}},$$

$$n = \frac{(1-2\gamma)f(r)}{\gamma F(\rho) - (1-\gamma)f(r)}.$$

Под выражением $\sqrt{1-k^2\sin^2 t}$ понимаем ту ветвь функции, которая при $t = 0$ принимает значение 1.

Проинтегрируем правую часть:

$$J = \sqrt{\gamma C}\int_0^r \frac{dz}{\sqrt{z(r-z)(1-rz)}}.$$

Меняя переменную интегрирования $x = z/r$, имеем $J = 2\sqrt{\gamma C}\mathbf{K}(r)$, где

$$\mathbf{K}(r) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-r^2\sin^2 t}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода.

Таким образом, после интегрирования равенство (7) принимает вид

$$-e^{-i\alpha/2}\gamma h^{-1}\Pi(n,k) = \sqrt{\gamma C}\mathbf{K}(r). \tag{10}$$

Проинтегрируем равенство (8) после извлечения квадратного корня по ζ от ρ до ∞. Рассмотрим сначала левую часть:

$$L = e^{-i\alpha/2}\int_\rho^\infty \sqrt{\frac{((1-2\gamma)F(\zeta) - (1-\gamma)f(r) + \gamma F(\rho))}{F(\zeta)(F(\zeta)-F(\rho))(F(\zeta)-f(r))}}F'(\zeta)\,d\zeta.$$

Заменяя переменную интегрирования $t = F(\zeta)/F(\rho)$, имеем

$$L = a^*\int_1^\infty \frac{t-b^*}{\sqrt{t(1-t)(1-c^*t)(t-b^*)}}\,dt,$$

где

$$a^* = e^{-i\alpha/2}\sqrt{\frac{(1-2\gamma)F(\rho)}{f(r)}}, \quad b^* = \frac{(1-\gamma)f(r)-\gamma F(\rho)}{(1-2\gamma)F(\rho)}, \quad c^* = \frac{F(\rho)}{f(r)}.$$

Полагая $t = 1/x$ в L, находим

$$L = a^* \int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{(x-1)(x-c^*)(1-b^*x)}} - a^*b^* \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-c^*)(1-b^*x)}}.$$

Делая замену переменной $u = b^*(1-x)/(b^*-1)$ в интегралах, после вычислений получаем

$$L = 2e^{-i\alpha/2}(q\Pi(\phi, m, k) - h\mathbf{F}(\phi, k)).$$

где

$$\mathbf{F}(\phi, k) = \int\limits_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

— неполный эллиптический интеграл первого рода,

$$\Pi(\phi, m, k) = \int\limits_0^\phi \frac{dt}{(1+m\sin^2 t)\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

— неполный эллиптический интеграл третьего рода,

$$q = \frac{(1-2\gamma)F(\rho)}{\sqrt{((1-\gamma)f(r)-\gamma F(\rho))(f(r)-F(\rho))}},$$

$$\phi = \arcsin\frac{h^2}{1-\gamma}, \quad m = -\frac{1-\gamma}{h^2}.$$

В правой части

$$L = \sqrt{(1-\gamma)D}\int\limits_\rho^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}},$$

меняя переменную интегрирования $\tau = \rho/\zeta$, имеем

$$L = 2\frac{\sqrt{(1-\gamma)D}}{\rho}\mathbf{K}\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Таким образом, проинтегрировав равенство (8) из системы, получим

$$e^{-i\alpha/2}(q\Pi(\phi, m, k) - h\mathbf{F}(\phi, k)) = \frac{\sqrt{(1-\gamma)D}}{\rho}\mathbf{K}\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{11}$$

Отметим в плоскости w точку $F(1) = f(e^{i\varphi_0})$, $\pi \le \varphi_0 < 3\pi$. Проинтегрируем равенства, полученные из системы (7), (8) после извлечения квадратного корня, по z от 0 до -1, затем по дуге $|z| = 1$ против часовой стрелки от -1 до $e^{i\varphi_0}$, а второе — по ζ от 1 до ρ.

Запишем интегралы от левой части уравнения (7):

$$e^{-i\alpha/2}\int\limits_{0}^{f(-1)}\sqrt{\frac{(1-2\gamma)w-(1-\gamma)f(r)+\gamma F(\rho)}{w(w-F(\rho))(w-f(r))}}\,dw,$$

$$e^{-i\alpha/2}\int\limits_{f(-1)}^{F(1)}\sqrt{\frac{(1-2\gamma)w-(1-\gamma)f(r)+\gamma F(\rho))}{w(w-F(\rho))(w-f(r))}}\,dw.$$

Запишем интеграл от левой части уравнения (8):

$$e^{-i\alpha/2}\int\limits_{F(1)}^{F(\rho)}\sqrt{\frac{(1-2\gamma)w-(1-\gamma)f(r)+\gamma F(\rho)}{w(w-F(\rho))(w-f(r))}}\,dw.$$

Суммируя эти интегралы, получаем

$$T=e^{-i\alpha/2}\int\limits_{0}^{F(\rho)}\sqrt{\frac{(1-2\gamma)w-(1-\gamma)f(r)+\gamma F(\rho)}{w(w-F(\rho))(w-f(r))}}\,dw.$$

Выполняя замену переменной $t=w/F(\rho)$, имеем

$$T=a^*\int\limits_{0}^{1}\frac{t-b^*}{\sqrt{t(1-t)(1-c^*t)(t-b^*)}}\,dt.$$

Полагая $t=1/x$, находим

$$T=a^*\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x-1)(x-c^*)(1-b^*x)}}-a^*b^*\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-c^*)(1-b^*x)}}.$$

Заменяя переменную интегрирования $y=(b^*-1)/(b^*x-1)$ в интегралах и делая соответствующие преобразования, получаем

$$T=-2ie^{-i\alpha/2}(1-\gamma)h^{-1}\Pi(p,k'),$$

где

$$k'=\sqrt{1-k^2},\quad p=\frac{(1-2\gamma)F(\rho)}{\gamma F(\rho)-(1-\gamma)f(r)}.$$

Теперь проинтегрируем правые части равенства (7). Сначала выполним интегрирование по z от 0 до -1:

$$T_1=-\sqrt{\gamma C}\int\limits_{-1}^{0}\frac{dz}{\sqrt{z(r-z)(1-rz)}}.$$

Выполняя замену переменной интегрирования $x=(1+z)/(1-z)$ и применяя формулу из [12, с. 922], находим

$$T_1=\sqrt{\gamma C}i\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2}).$$

Проинтегрируем правую часть по дуге β единичной окружности против часовой стрелки от -1 до $e^{i\varphi_0}$:

$$T_2 = \sqrt{\gamma C} \int\limits_{\beta} \frac{dz}{\sqrt{z(r-z)(1-rz)}}.$$

Полагая $z = e^{i\varphi}$ в T_2, где $\pi \le \varphi \le \varphi_0$, получаем

$$T_2 = \sqrt{\gamma C} \int\limits_{\pi}^{\varphi_0} \frac{de^{i\varphi}}{\sqrt{e^{i\varphi}(r-e^{i\varphi})(1-re^{i\varphi})}}.$$

Делая замену переменной $t = e^{i\varphi}$, находим

$$T_2 = -2\sqrt{\gamma C}\lambda \mathbf{K}(r),$$

где $0 \le \lambda < 2$.

Наконец, выполним интегрирование правой части равенства (8) по ζ от 1 до ρ:

$$T_3 = \sqrt{(1-\gamma)D} \int\limits_{1}^{\rho} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}}.$$

После замены переменной интегрирования $u = \rho/\zeta$ получаем

$$T_3 = \frac{\sqrt{(1-\gamma)D}}{\rho} i\mathbf{K}\biggl(\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}\biggr).$$

Складывая T_1, T_2 и T_3, находим

$$\sqrt{\gamma C} i\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2}) + \frac{\sqrt{(1-\gamma)D}}{\rho} i\mathbf{K}\biggl(\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}\biggr) - 2\sqrt{\gamma C}\lambda \mathbf{K}(r).$$

Таким образом, после интегрирования равенств из системы (7), (8) имеем

$$\begin{aligned} -e^{-i\alpha/2}(1-\gamma)h^{-1}\Pi(p,k') = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma C}\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2}) \\ + \frac{\sqrt{(1-\gamma)D}}{2\rho}\mathbf{K}\biggl(\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}\biggr) + \sqrt{\gamma C}\mathbf{K}(r)\lambda\, i. \end{aligned}$$

Исключая из этого равенства константы $\sqrt{C}$ и $\sqrt{D}$ с помощью равенств (10) и (11), получаем

$$\frac{(1-\gamma)\Pi(p,k')}{\gamma \Pi(n,k)} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2})}{\mathbf{K}(r)} - \frac{1}{2}\frac{q\Pi(\phi,m,k) - h\mathbf{F}(\phi,k)}{\gamma h^{-1}\Pi(n,k)} \frac{\mathbf{K}\Bigl(\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}\Bigr)}{\mathbf{K}\bigl(\frac{1}{\rho}\bigr)} + \lambda i. \tag{12}$$

Теперь вместо параметра α рассматривается параметр λ.

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Множество E значений функционала* (1) *на классе $\mathfrak{M}$ ограничено кривой, неявно заданной уравнением* (12).

Следствие 1. *Уравнение границы множества E функционала* (1) *при* $\gamma = 1/2$ *на классе* $\mathfrak{M}$ *выражается в явном виде:*

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{2}\ln\left(-4^2 d\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+d^{2n}}{1-d^{2n-1}}\right)^8\right), \tag{13}$$

где

$$d = e^{-\pi\mu}, \quad \mu = \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2})}{\mathbf{K}(r)} + \frac{\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}\right)}{\mathbf{K}\left(\frac{1}{\rho}\right)}\right\} + \lambda i.$$

Равенство (13) непосредственно следует из (12) в силу формул из [12, с. 938].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, профессору Игорю Александровичу Александрову за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лебедев Н. А.* Об области значений одного функционала в задаче о неналегающих областях // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115, № 6. С. 1070–1073.
2. *Александров И. А.* К вопросу о связности множества значений функционала // Вопросы математики / Тр. Томск. гос. ун-та. 1961. Т. 155. С. 72–76.
3. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1934. Т. 5. С. 159–246.
4. *Куфарев П. П.* К вопросу о конформных отображениях дополнительных областей // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73, № 5. С. 881–884.
5. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
6. *Лебедев Н. А.* К теории конформных преобразований круга на неналегающие области // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103. С. 553–555.
7. *Александров И. А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Томск. гос. ун-т, 2001.
8. *Löwner K.* Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. 1923. Bd 89. S. 103–121.
9. *Александров И. А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
10. *Лебедев Н. А.* Мажорантная область для выражения $I = \ln\{z^\lambda[f'(z)]^{1-\lambda}/[f(z)]^\lambda\}$ в классе S // Вестн. Ленингр. ун-та. 1955. Т. 3, № 8. С. 29–41.
11. *Матвеев П. Н.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. СПб.: Лань, 2008.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

Статья поступила 3 февраля 2012 г.

Пчелинцев Валерий Анатольевич
Томский гос. университет, механико-математический факультет,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
VPchelintsev@vtomske.ru