Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 517.956.22

СУЩЕСТВОВАНИЕ И НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. И. Ноаров

Аннотация. На торе рассматривается функционально-дифференциальное уравнение $\Delta u(\boldsymbol{x}) - \operatorname{div}(u(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x})) = 0$, обобщающее стационарное уравнение Фоккера — Планка. При достаточно общих предположениях относительно векторного поля $\mathbf{f}$ и отображения H доказывается существование решения, отличного от тождественного нуля. В ряде случаев устанавливается многомерность пространства решений.

Ключевые слова: стационарное уравнение Фоккера — Планка, отклоняющийся аргумент.

В продолжение работ [1–4] исследуется проблема нетривиальной разрешимости уравнения

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) - \operatorname{div}(u(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x})) = 0. \tag{1}$$

В данной работе уравнение (1) рассматривается на торе T, представляющем собой куб $[0;1]^n$, у которого «склеены» противоположные грани, а отображение $H : T \to T$ и векторное поле $\mathbf{f} : T \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered}\mathbf{f} \text{ измеримо и ограничено, } H \text{ измеримо и}\\ \mu(H(X)) \geqslant C\mu(X) \text{ с константой } C > 0, \text{ не зависящей от } X\\ \text{для любого измеримого множества } X \text{ на торе}\end{gathered} \tag{2}$$

(μ — мера Лебега на торе).

Первоначально такая задача возникла в теории диффузионных процессов: для заданного на всем $\mathbb{R}^n$ векторного поля $\mathbf{f}$ и тождественного H требовалось выяснить, имеет ли уравнение (1) решение, являющееся плотностью вероятности (см. [4]). Эта проблема инициировала исследования [1–3], результаты которых нашли не только вероятностное применение. Выяснилось, что методы работ [1–3], развитые для стационарного уравнения Фоккера — Планка

$$\Delta u - \operatorname{div}(u\mathbf{f}) = 0, \tag{3}$$

приводят (в данной работе) к доказательству нетривиальной разрешимости уравнения (1). Следует отметить, что даже частный случай уравнения (1) — дифференциальное уравнение (3) — по своим свойствам существенно отличается от прочих линейных эллиптических уравнений. В качестве примера рассмотрим на торе уравнение $-\Delta u(\boldsymbol{x}) + V(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) = \lambda u(\boldsymbol{x})$. Как известно, оно имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда параметр λ принадлежит некоторому счетному множеству — спектру оператора $-\Delta + V$. Иными

© 2012 Ноаров А. И.

словами, для типичной функции V уравнение $-\Delta u(\boldsymbol{x}) + V(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) = 0$ на торе не имеет нетривиальных решений. С другой стороны, согласно [5] уравнение (3) на торе имеет положительное решение при любом (достаточно гладком) векторном поле $\mathbf{f}$. Методы из [1–3] позволяют доказать нетривиальную разрешимость уравнения (3) с комплексным $\mathbf{f}$, а также систем уравнений типа (3). Данная работа демонстрирует применимость этих методов к обобщению (3) в виде уравнения (1).

Предлагаемый метод основывается на ортогональном разложении Вейля $L^2(T) = \mathbf{G}(T) \oplus \mathbf{J}(T)$ пространства $L^2(T)$ векторных полей на торе, при этом $\mathbf{G}(T)$ — множество градиентов всех функций из $L^2(T)$, имеющих первые производные из $L^2(T)$, а $\mathbf{J}(T)$ — замыкание в $L^2(T)$ множества всех векторных полей из $W_2^1(T)$ с нулевой дивергенцией. Аналогичным способом может быть разложено гильбертово пространство Соболева $W_2^p(T)$.

Рассмотрим разложение Вейля, осуществляемое далее на первом шаге алгоритма (см., например, [1, 2, 6]). Это разложение $\mathbf{f}_1 = \nabla U + (\mathbf{f}_1 - \nabla U)$ сводится к решению уравнения $\Delta U = \operatorname{div} \mathbf{f}_1$, понимаемого в смысле теории распределений. Обобщенное решение U на торе можно искать в виде ряда Фурье, при этом существенно, что правая часть уравнения ортогональна константе в $L^2(T)$. Последнее уравнение можно дифференцировать, получая тем самым разложение пространства Соболева $W_2^p(T)$.

Определение 1. Пусть выполняются условия (2) и $r \in \mathbb{R}$. Определим отображение A пространства $L^2(T)$ векторных полей в себя, ставящее в соответствие всякому векторному полю $\mathbf{f}_1$ векторное поле $\mathbf{f}_2$ по следующему алгоритму.

1. Векторное поле $\mathbf{f}_1$ разложим на две составляющие: $\mathbf{f}_1 = \mathbf{j} + \mathbf{g}$, $\mathbf{j} \in \mathbf{J}(T)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{G}(T)$.

2. Найдем такую функцию $U(\boldsymbol{x})$, что

$$\int_T U(\boldsymbol{x})\, dx_1 \dots dx_n = r, \quad \nabla U = \mathbf{g}.$$

3. Положим $\mathbf{f}_2(\boldsymbol{x}) = U(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x})$.

Включение $\mathbf{f}_2 \in L^2(T)$ легко проверяется на основе доказательства теоремы 1. Связь отображения A с уравнением (1) поясняет следующая

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (2), $r \in \mathbb{R}$, *а отображение* A *имеет неподвижную точку. Тогда для функции* $u(\boldsymbol{x})$, *полученной из этой неподвижной точки с помощью первых двух шагов алгоритма, верно следующее: она квадратично суммируема,*

$$\nabla u \in L^2(T), \quad u(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \in L^2(T), \quad \nabla u(\boldsymbol{x}) - u(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{J}(T),$$
$$\int_T u(\boldsymbol{y})\, dy_1 \dots dy_n = r; \tag{4}$$

указанная неподвижная точка равна $u(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x})$.

Полученную в лемме 1 функцию u можно рассматривать как обобщенное решение уравнения (1), поскольку оно равносильно равенству

$$\operatorname{div}(\nabla u(\boldsymbol{x}) - u(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x})) = 0.$$

Определение 2. Введем оператор $S : L^2(T) \to L^2(T)$, равный отображению A при $r = 0$. Оператор S линейный; без труда проверяются следующие равенства: $A\mathbf{f}_1 - A\mathbf{f}_2 = S(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2)$, $A\mathbf{a} = S\mathbf{a} + r\mathbf{f}$ при всех $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{a} \in L^2(T)$.

Лемма 2. *Допустим, что верны условия* (2) *и оператор* $I - S$ (I — *тождественный оператор*) *имеет обратный оператор, определенный на всем* $L^2(T)$. *Тогда существует такая квадратично суммируемая функция* u, *что верны условия* (4) *при* $r = 1$, *а векторное поле* $u(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = (I - S)^{-1}\mathbf{f}(\boldsymbol{x})$ *является неподвижной точкой оператора* A *при* $r = 1$.

Леммы 1 и 2 элементарны и, по существу, доказаны в [3], следующая лемма получена в [1].

Лемма 3 (обобщение неравенства Пуанкаре — Стеклова). *Пусть*

$$\sigma > 0, \quad Q_\sigma = \{x : |x_i| \leqslant \sigma,\ i = 1, 2, \dots, n\},$$

множество D *измеримо по Лебегу, содержится в* Q_σ *и* $\mu(D) > 0$ ($\mu(\ )$ — *мера Лебега*). *Тогда для любой функции* $u \in W_2^1(Q_\sigma)$, *удовлетворяющей равенству* $\int\limits_D u\, dx_1 \dots dx_n = 0$, *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{Q_\sigma} u^2\, dx_1 \dots dx_n \leqslant \frac{n(2\sigma)^{n+2}}{\mu(D)} \int\limits_{Q_\sigma} |\nabla u|^2\, dx_1 \dots dx_n.$$

Теорема 1. *При условиях* (2) *оператор* $S : L^2(T) \to L^2(T)$ *компактен.*

Доказательство основано на теореме Реллиха, согласно которой ограниченное в $W_2^1(\Omega)$ множество предкомпактно в $L^2(\Omega)$, если Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей. Условие гладкости границы существенно (см. [7]), следует отметить его в доказательстве теоремы 1 из [3] и выбрать в качестве Ω куб Q_σ, содержащий носитель векторного поля $\mathbf{f}$. В данной работе берем куб Q_σ, полученный разрезанием тора T, и приходим к теореме Реллиха при $\Omega = T$.

Оператор S является композицией трех «множителей». Рассмотрим прежде всего линейный оператор, ставящий в соответствие всякому векторному полю $\mathbf{f}_1$ функцию U первым и вторым шагами алгоритма (см. определение 1) при $r = 0$.

Этот оператор, отображающий пространство $L^2(T)$ векторных полей в пространство $W_2^1(T)$ функций, непрерывен. Действительно, в силу ортогональности разложения на первом шаге, выделяющем градиентную компоненту $\mathbf{g}$, L^2-норма не увеличивается. Второму шагу соответствует отображение из $\mathbf{G}(T)$ в $L^2(T)$, непрерывное в силу леммы 3 (при этом $Q_\sigma = D \cong T$). Оно непрерывно как отображение из $L^2(T)$ в $W_2^1(T)$, поскольку $\nabla U = \mathbf{g}$. Итак, первые два шага алгоритма при $r = 0$ определяют линейный непрерывный оператор из $L^2(T)$ в $W_2^1(T)$, который по теореме Реллиха компактен как отображение из $L^2(T)$ в $L^2(T)$.

Отображение $U(\boldsymbol{x}) \mapsto U(H(\boldsymbol{x}))$ является непрерывным оператором из $L^2(T)$ в $L^2(T)$. В самом деле, вследствие неравенства $\mu(H(X)) \geqslant C\mu(X)$ из условия (2) и формулы замены переменной в интеграле верно неравенство

$$\int\limits_T U^2(H(\boldsymbol{x}))\, dx_1 \dots dx_n \leqslant \frac{1}{C} \int\limits_T U^2(\boldsymbol{x})\, dx_1 \dots dx_n.$$

Наконец, оператор умножения на ограниченное измеримое векторное поле $\mathbf{f}$ является непрерывным из $L^2(T)$ в $L^2(T)$, поэтому оператор $S : L^2(T) \to L^2(T)$

компактен как композиция одного компактного оператора и двух непрерывных. Теорема доказана.

Следующая теорема утверждает о наличии нетривиального обобщенного решения уравнения (1).

Теорема 2. *При условиях* (2) *существуют число* $r \in \boldsymbol{R}$ *и такая квадратично суммируемая функция* u, *отличная от нуля на множестве положительной меры, что верны условия* (4).

Доказательство. Если компактный оператор $S : L^2(T) \to L^2(T)$ не имеет единичных собственных значений, то оператор $I - S$ обратим по теореме о спектре компактного оператора и нетривиальная разрешимость следует из леммы 2.

Если оператор S имеет единичное собственное значение, то он, т. е. отображение A при $r = 0$, имеет отличную от тождественного нуля неподвижную точку. Поэтому на основании леммы 1 уравнение (1) имеет решение u, которое отлично от тождественного нуля, так как в противном случае неподвижная точка $u(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x})$ была бы тождественным нулем. Теорема доказана.

Замечание. В случае $H \in C^\infty(T)$, $\mathbf{f} \in C^\infty(T)$ можно утверждать, что в теореме 2 получено нетривиальное классическое решение $u \in C^\infty(T)$ уравнения (1). Гладкость обобщенного решения устанавливается с помощью индукционного процесса и включения $\nabla u \in W_2^p(T)$, вытекающего из того, что $u(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \in W_2^p(T)$.

Следующее утверждение дает пример уравнения (1) с многомерным пространством решений.

Теорема 3. *Рассмотрим последовательности векторных полей*

$$\mathbf{f}_k(\boldsymbol{x}) = (2\pi(4k+1), 0, \dots, 0)$$

и функций $u_k(x_1) = \sin(2\pi(4k+1)x_1)$, $v_k(x_1) = \cos(2\pi(4k+1)x_1)$. *Зададим отображение* H *формулой* $x_1 \mapsto x_1 + 1/4 (\operatorname{mod} 1)$, $x_i \mapsto x_i$, $i = 2, \dots, n$. *Тогда при каждом целом* k *уравнение* (1) *с векторным полем* $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{f}_k(\boldsymbol{x})$ *имеет по крайней мере три линейно независимых решения на торе:* $u(\boldsymbol{x}) = u_k(x_1)$, $u(\boldsymbol{x}) = v_k(x_1)$ *и* $u(\boldsymbol{x}) \equiv 1$.

Доказательство проводится прямыми вычислениями. Отметим тождества

$$du_k(x_1)/dx_1 = 2\pi(4k+1)u_k(1/4 + x_1), \quad dv_k(x_1)/dx_1 = 2\pi(4k+1)v_k(1/4 + x_1),$$

влекущие за собой равенство $\nabla u(\boldsymbol{x}) = u(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x})$ и, как следствие, — уравнение (1). Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что неединственность решений уравнения (1) представляет собой исключительное явление.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (2). *Тогда на комплексной плоскости существует не более чем счетное, замкнутое, не имеющее предельных точек и не содержащее нуля (возможно, пустое) множество* Γ *со следующими свойствами. При всяком комплексном* $\gamma \notin \Gamma$ *существует ровно одна (с точностью до постоянного множителя) функция* u, *отличная от нуля на множестве положительной меры, для которой*

$$\nabla u \in L^2(T), \quad u(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \in L^2(T), \quad \nabla u(\boldsymbol{x}) - \gamma u(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{J}(T). \qquad (5)$$

(*Другими словами, с точностью до постоянного множителя уравнение*

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) - \gamma \operatorname{div}(u(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x})) = 0$$

имеет ровно одно обобщенное нетривиальное решение.)

Замечание. Мы отождествляем функции, равные почти всюду по мере Лебега.

Доказательство теоремы 4. В качестве Γ возьмем множество чисел вида $1/\lambda$, где ненулевое λ пробегает спектр компактного оператора S. Тогда при $\gamma \notin \Gamma$ определен оператор $(I - \gamma S)^{-1}$. Оператор γS соответствует векторному полю $\gamma \mathbf{f}$, поэтому на основании леммы 2 для некоторой функции u верны условия (5) и $\int\limits_T u(\boldsymbol{y})\, dy_1 \dots dy_n = 1$.

Для доказательства единственности допустим наличие двух линейно независимых решений. Тогда их некоторая нетривиальная линейная комбинация u удовлетворяет условиям (5) и $\int\limits_T u(\boldsymbol{y})\, dy_1 \dots dy_n = 0$. Поэтому оператор γS имеет неподвижную точку $u(H(\boldsymbol{x}))\mathbf{f}(\boldsymbol{x})$, которая отлична от нуля на множестве положительной меры, так как в противном случае ее градиентная компонента и функция u оказались бы нулевыми. Итак, оператор γS имеет единичное собственное значение, что противоречит условию $\gamma \notin \Gamma$. Теорема доказана.

Заметим, что при $\gamma \in \Gamma$ нетривиальная разрешимость задачи (5) следует из теоремы 2. Тем не менее, как показывает теорема 3, в этом случае пространство решений может быть многомерным (но конечной размерности в силу компактности S), а множество Γ — счетным. Более того, теорема 3 в сочетании с доказательством теоремы 4 дает пример оператора S с единичным собственным значением и показывает, что оба случая, рассмотренные в доказательстве теоремы 2, могут иметь место. Весьма примечательно, что у уравнения (3) такие свойства не обнаруживаются (см. [3]).

В заключение отметим, что, вводя «сдвиг» аргумента в уравнение (3), мы прежде всего хотели показать применимость к уравнению (1) методов, изначально развитых для его частного случая — уравнения (3). «Сдвиг» аргумента иногда приводит к многомерности пространства решений, не характерной для уравнения (3). Тем не менее исследование разрешимости задач (1) и (3) оказывается возможным на основе развитого в [1–3] единого подхода. Вопрос о физическом смысле «сдвига» аргумента мы оставляем открытым. Как известно, уравнение (3) без «сдвига» описывает стационарный диффузионный процесс со сносом $\mathbf{f}$. Исходя из этого, можно предположить, что уравнению (1) подчиняется плотность стационарного распределения некоторого случайного процесса, и высказать гипотезу о положительности (хотя бы одного) решения уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ноаров А. И.* О разрешимости стационарных уравнений Фоккера — Планка, близких к уравнению Лапласа // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 4. С. 521–530.
2. *Ноаров А. И.* Обобщенная разрешимость стационарного уравнения Фоккера — Планка // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 6. С. 813–819.
3. *Ноаров А. И.* Однозначная разрешимость стационарного уравнения Фоккера — Планка в классе положительных функций // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 2. С. 191–202.
4. *Ноаров А. И.* О некоторых диффузионных процессах со стационарными распределениями // Теория вероятностей и ее применения. 2009. Т. 54, № 3. С. 589–598.
5. *Zeeman E. C.* Stability of dynamical systems // Nonlinearity. 1988. V. 1. P. 115–155.

6. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1961.

7. *Назаров С. А.* О существенном спектре краевых задач для систем дифференциальных уравнений в ограниченной области с пиком // Функцион. анализ и его прил. 2009. Т. 43, № 1. С. 55–67.

Статья поступила 19 января 2012 г.

Ноаров Александр Игоревич
Институт вычислительной математики РАН,
ул. Губкина, 8, Москва 119333
ligrans@mail.ru