Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 512.54

ЛОКАЛЬНАЯ КОНЕЧНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ГРУПП ПЕРИОДА 12

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, А. С. Мамонтов

Аннотация. Показано, что группа периода 12, в которой порядок произведения любых двух инволюций не превосходит числа 4, локально конечна.

Ключевые слова: периодическая группа, локально конечная группа.

Цель настоящей работы — доказательство локальной конечности группы периода 12, в которой порядок произведения любых двух инволюций отличен от числа 6. Этот результат обобщает теорему Санова [1], согласно которой группа периода 12 без элементов порядка 6 локально конечна.

Напомним, что *группой периода n* называется группа с тождественным соотношением $x^n = 1$. В этом смысле группы периодов 2, 3, 4 и 6 являются группами периода 12. Известно, что все они локально конечны (см. [1–5]).

Теорема. *Пусть G — группа периода 12, в которой порядок произведения любых двух инволюций отличен от числа 6, и пусть H — подгруппа, порожденная всеми инволюциями из G. Тогда G локально конечна и выполнено одно из следующих утверждений.*

1. *Группа G является 3-группой.*
2. *Подгруппа H является расширением 3-группы посредством группы порядка 2, а G — расщепляемым расширением 3-группы посредством некоторой нетривиальной подгруппы группы кватернионов порядка 8 или группы $SL_2(3)$.*
3. *Подгруппа H изоморфна расщепляемому расширению элементарной абелевой 2-группы V посредством неабелевой группы порядка 6, действующей на V точно, а G/H является 3-группой.*
4. *Фактор-группа $G/O_2(G)$, где $O_2(G)$ — наибольшая нормальная 2-подгруппа из G, является расширением 3-группы посредством элементарной абелевой 2-группы и $H \leq O_2(G)$.*

1. Обозначения и известные результаты

Если X — группа, $x, y, z \in X$ и A, B — подгруппы в X, то обозначим через $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ коммутатор элементов x, y, через $[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$ — взаимный коммутант подгрупп A и B, через $Z(X)$, $\Phi(X)$, $F(X)$, $O_p(X)$ —

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–90006, 11–01–00456, 12–01–31222), федеральной целевой программы «Научно-образовательные кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (государственный контракт 14.740.11.1510) и программы СО РАН проектов партнерских фундаментальных исследований на 2012–2014 гг. (проект № 14).

© 2012 Лыткина Д. В., Мазуров В. Д., Мамонтов А. С.

центр, подгруппу Фраттини, подгруппу Фиттинга, наибольшую нормальную p-подгруппу (здесь p — простое число) группы X. Положим также $[x, y, z] = [[x, y], z]$, $x^y = y^{-1}xy$, $A^x = x^{-1}Ax$, $C_A(B) = \{a \in A \mid ab = ba$ для всех $b \in B\}$ — централизатор B в A, $N_A(B) = \{a \in A \mid B^a = B\}$ — нормализатор B в A.

Обозначим через S естественное полупрямое произведение прямой суммы двух неприводимых S_3-модулей размерности 2 и симметрической группы S_3 степени 3. Таким образом, $S = VA$, где V — прямое произведение групп V_1 и V_2, каждая из которых является элементарной абелевой группой порядка 4, $A \simeq S_3$ и группы V_1A, V_2A изоморфны симметрической группе S_4 степени 4.

Обозначим через R полупрямое произведение неабелевой 3-группы E периода 3 порядка 27 и группы, порожденной инволюцией, инвертирующей при сопряжении каждый элемент из $E/\Phi(E)$. Таким образом $R \simeq \langle u, v, w \mid u^3 = v^3 = w^2 = [u, v, v] = [u, v, u] = 1, u^w = u^{-1}, v^w = v^{-1}\rangle$.

Лемма 1.1 ($\{p, q\}$-теорема Бернсайда [6, теорема 9.3.2]). *Если G — конечная группа порядка $p^\alpha q^\beta$, где p и q — простые числа, а α и β — целые числа, то G разрешима.*

Лемма 1.2 (теорема Санова [1]). *Если G — периодическая группа и порядок любого элемента из G не превосходит числа 4, то G локально конечна.*

Лемма 1.3 (теорема М. Холла [3]). *Любая группа периода 6 локально конечна.*

Лемма 1.4 (теорема Шмидта [7, теорема 6]). *Расширение локально конечной группы посредством локально конечной группы локально конечно.*

Лемма 1.5 [8]. *Пусть G — группа периода 12, в которой нет элементов порядка 6. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

1) *G — группа периода 3 или 4;*

2) *в G есть нормальная элементарная абелева 3-подгруппа N и G/N изоморфна подгруппе группы кватернионов порядка 8;*

3) *в G есть нормальная элементарная абелева 2-подгруппа N и $G = NS$, где $S \simeq S_3$ и $C_N(S) = 1$;*

4) *в G есть нормальная 2-подгруппа N ступени нильпотентности не выше двух и $|G/N| = 3$.*

Лемма 1.6 [9, с. 7]. *Группа $\langle x, y \mid x^4 = y^2 = (xy)^3 = 1\rangle$ изоморфна S_4.*

2. Предварительные леммы

До конца работы G будет обозначать группу периода 12, в которой порядок произведения любых двух инволюций отличен от числа 6.

Лемма 2.1. *Пусть G порождена тремя инволюциями a, b, c. Тогда G — конечная группа и справедливо одно из следующих утверждений.*

(1) *Имеют место равенства $(ab)^4 = (ac)^4 = (bc)^4 = 1$, и G — группа порядка, делящего 2^{10}.*

(2) *С точностью до перестановок a, b, c выполнены равенства $(ab)^3 = (ac)^4 = (bc)^4 = 1$ и G изоморфна фактор-группе группы S. При этом $(abc)^3 = 1 = [(ac)^2, (bc)^2]$. Группа $H = \langle x, y, z \mid 1 = x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (xz)^4 = (yz)^4 = (xyz)^3 = [(xz)^2, (yz)^2]\rangle$ изоморфна S, и в ней нет элементов порядка 6.*

(3) *С точностью до перестановки a, b, c выполнены равенства $(ab)^3 = (ac)^3 = (bc)^4 = 1$ и G — гомоморфный образ группы S_4.*

(4) *Выполнены равенства* $(ab)^3 = (ac)^3 = (bc)^3 = 1$, *и* G — *гомоморфный образ группы* R. *При этом* $(abc)^2 \in Z(G)$ *и в* $G/\langle (abc)^2\rangle$ *нет элементов порядка* 6.

Доказательство использует вычисления в GAP [10] по алгоритму перечисления смежных классов.

(1) Пусть $(ab)^4 = (ac)^4 = (bc)^4 = 1$. Очевидно, G является гомоморфным образом группы $F(r,s,t,u) = \langle x,y,z \mid 1 = x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^4 = (xz)^4 = (yz)^4 = (xyz)^{12} = (xyxz)^{12} = ((xy)^2z)^r = ((xz)^2y)^s = ((yz)^2x)^t = ((xy)^2(xz)^2)^u\rangle$, где $\{r,s,t,u\} \subseteq \{3,4\}$. Вычисления в GAP показывают, что

(а) $|F(4,4,4,4)| = 2^{10}$ и $F(4,4,4,3)$ — гомоморфный образ $F(4,4,4,4)$.

(б) Если $u \in \{3,4\}$, а среди показателей r,s,t ровно один равен 3, то в силу симметрии определяющих соотношений группы $F(r,s,t,u)$ можно считать, что $r = 3$, $s = t = 4$ и в этом случае $|F(r,s,t,u)| = 8$.

(в) Если среди показателей (r,s,t) ровно один равен 4, то можно считать, что $r = s = 3$, $t = 4$. В этом случае $|F(r,s,t,u)| = 2$, где $u \in \{3,4\}$.

Группа $F(3,3,3,3)$ тривиальна.

(2) Пусть $(ab)^3 = (ac)^4 = (bc)^4 = 1$. В этом случае G является гомоморфным образом группы $F(r,s) = \langle x,y,z \mid 1 = x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (xz)^4 = (yz)^4 = (xyz)^{12} = ((xz)^2y)^r = ((yz)^2x)^s = (y^xz)^{12}\rangle$, где $\{r,s\} \subseteq \{3,4\}$.

Если хотя бы одно из чисел r,s равно 3, то $|F(r,s)| = 2$. Если $r = s = 4$, то $|F(r,s)| = 2^8 3$, и в $F = F(r,s)$ порядок $x^{yx}x^z$ равен 6. Так как $|F/\langle (x^{yx}x^z)^2\rangle| = 8$, можно считать, что G является гомоморфным образом фактор-группы $F_1 = F/\langle (x^{yx}x^z)^3\rangle$. Поскольку $Z(F_1) = \langle (xyz)^3\rangle$, то G является гомоморфным образом группы $F_2 = F_1/\langle (xyz)^3\rangle$ порядка $2^5 3$, изоморфной S.

(3) Пусть $(ab)^3 = (ac)^3 = (bc)^4 = 1$. Тогда G — гомоморфный образ группы $F(r) = \langle x,y,z \mid 1 = x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (xz)^3 = (yz)^4 = (xyz)^{12} = ((yz)^2x)^r\rangle$, где $r \in \{3,4\}$. Вычисления показывают, что $F(4) \simeq S_4$, а $F(3) = 1$.

(4) Пусть $(ab)^3 = (ac)^3 = (bc)^3 = 1$. Тогда G является гомоморфным образом группы $F(r) = \langle x,y,z \mid 1 = x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (xz)^3 = (yz)^3 = (xyz)^{12} = (y^xz)^r\rangle$, где $r \in \{3,4\}$. Вычисления показывают, что $F(4) \simeq S_4$, а $F(3) \simeq R$.

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть* G *конечна, порождена инволюциями и содержит подгруппу* H, *изоморфную* R. *Тогда* G — *расширение* 3-*группы посредством группы порядка* 2. *В частности, все инволюции в* G *сопряжены и порядок произведения любых двух различных инволюций равен трем.*

Доказательство. По $\{p,q\}$-теореме Бернсайда G разрешима.

Пусть вначале $T = O_2(G) \neq 1$. Покажем, что в этом случае TH содержит подгруппу, изоморфную $S_3 \times Z_2$, где S_3 — симметрическая группа степени 3, а Z_2 — группа порядка 2.

Пусть Z — подгруппа порядка 3 из $Z(H)$. Если $C_T(Z) = 1$, то одна из подгрупп H порядка 6 (обозначим ее через A) централизует в T некоторую инволюцию t и $A \times \langle t\rangle$ — искомая подгруппа. Если же $C = C_T(Z) \neq 1$, то на C действует группа H/Z, являющаяся расширением элементарной абелевой группы V порядка 9 посредством группы порядка 2, инвертирующей каждый элемент из V. Снова некоторая неабелева подгруппа A из H порядка 6 централизует в C некоторую инволюцию t, т. е. снова подгруппа $A \times \langle t\rangle$ является искомой.

Так как в $A \times \langle t\rangle$ есть, очевидно, две инволюции, порядок произведения которых равен шести, рассматриваемый случай невозможен, т. е. $O_2(G) = 1$,

$U = O_3(G) \neq 1$ и силовская 2-подгруппа T из G действует точно на U при сопряжении. Если в T содержатся две различные инволюции, то в T есть элементарная абелева подгруппа T_0 порядка 4. Если L — подгруппа из U наименьшего порядка, которую T_0 нормализует, но не централизует, то $|L| = 3$ и LT_0 изоморфна $S_3 \times Z_2$, что по условию невозможно. Поэтому T содержит единственную инволюцию, и поскольку G порождается инволюциями, $|T| = 2$, $G = O_3(G)T$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть G порождается инволюциями x, y, z, t, где $H = \langle x, y, z\rangle \simeq R$ и $(tx)^2 = (ty)^3 = 1$. Тогда $t = x \in H$.*

Доказательство использует вычисления в GAP по алгоритму перечисления смежных классов.

Очевидно, G является гомоморфным образом одной из групп $F(a, b, c, d, f) = \langle x, y, z, t \mid 1 = x^2 = y^2 = z^2 = t^2 = (xy)^3 = (xz)^3 = (yz)^3 = (xyz)^{12} = (xyxz)^3 = (xt)^2 = (yt)^3 = (tz)^a = (ty^x)^b = (tz^x)^c = (ty^z)^d = (tx^{yz})^f = (yzt)^{12} = (xyzt)^{12} = (xyzty)^{12} = (xyzy^t)^{12}\rangle$, где $a, b, c, d, f \in \{3, 4\}$. Вычисления показывают, что $|F(a, b, c, d, f)| \leq 6912$. Таким образом, G конечна. По лемме 2.2 $(tx)^3 = 1$. Отсюда $t = x$.

Лемма 2.4. *Пусть $H \simeq R$ — подгруппа из G, порожденная инволюциями x, y, z. Если t — инволюция из G, то $(xt)^3 = 1$.*

Доказательство. По лемме 2.1 $\langle x, y, t\rangle$ является гомоморфным образом группы S. Если $t \in \langle x, y\rangle$, то утверждение леммы справедливо. Если же $t \notin \langle x, y\rangle$, то в $\langle x, y, t\rangle$ можно выбрать инволюцию $t_1 = x^t$, для которой порядок xt_1 равен 2, а yt_1 — элемент порядка 3. По лемме 2.3 $t_1 \in \langle x, y, z\rangle$, поэтому $(xt_1)^3 = 1$; противоречие.

Лемма 2.5. *Если G порождается инволюциями и не содержит подгрупп, изоморфных R, то порядок любого элемента из G не превосходит числа 4. В частности, G локально конечна.*

Доказательство. Пусть $g \in G$, $g = t_1 \cdots t_n$, где $t_1, \dots, t_n$ — инволюции. Индукцией по n покажем, что $g^3 = 1$ или $g^4 = 1$. По лемме 2.1 это верно при $n \leq 3$. Пусть $n \geq 4$.

По индукционному предположению порядок $g_1 = t_1 \cdots t_{n-1}$ не превосходит числа 4. Если порядок g_1 равен 4, то $W = \langle g_1, t_n\rangle = U\langle g_1\rangle$, где $U = \left\langle g_1^2, t_n, t_n^{g_1}\right\rangle$ — подгруппа, порожденная тремя инволюциями и инвариантная относительно $\langle g_1\rangle$. Из леммы 2.1 вытекает, что W конечна и содержит подгруппу U индекса 1 или 2. По лемме 2.1 U не содержит элементов порядка 6. Предположим, что W содержит элемент порядка 6. Тогда $|W : U| = 2$ и по лемме 2.1 порядок произведения некоторых двух инволюций из W равен 6. Итак, W не содержит элементов порядка 6, и, в частности, порядок $g = g_1t_n$ не превосходит четырех.

Если порядок g_1 равен трем, то либо $g_2 = t_1 \cdots t_{n-2}$ — инволюция и g содержится в подгруппе $\langle g_2, t_{n-1}, t_n\rangle$, порожденной тремя инволюциями, либо g_2 — элемент порядка 3 и тогда g_1 сопряжен с g_2, т. е. g можно представить как произведение $n-1$ инволюций, либо, наконец, g_2 — элемент порядка 4 и поэтому $g_1 \in \langle g_2, t_{n-1}\rangle \simeq S_4$, откуда g_1 — произведение двух инволюций, g принадлежит подгруппе, порожденной тремя инволюциями, и из леммы 2.1 вытекает, что в G нет элементов порядка 6. Локальная конечность G следует из теоремы Санова.

Лемма 2.6. *Пусть G — конечная группа, порожденная инволюциями, и пусть порядок произведения любых двух различных инволюций из G равен трем. Тогда порядок силовской 2-подгруппы из G равен двум.*

Доказательство. Утверждение тривиально, если G содержит только одну инволюцию. Пусть a, b — две различные инволюции из G и $S = \langle a, b\rangle$. Понятно, что S — неабелева группа порядка 6. Если $O_2(G) \neq 1$ и v — инволюция из $O_2(G)$, то av — 2-элемент и его порядок не может быть равен 3. Поэтому $O_2(G) = 1$, $O_3(G) \neq 1$ и силовская 2-подгруппа T из G действует точно на $O_3(G)$. Теперь так же, как в соответствующем месте доказательства леммы 2.2, можно показать, что $|T| = 2$. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Пусть G порождена четырьмя инволюциями и порядок произведения любых двух различных инволюций из G равен трем. Тогда G конечна.*

Доказательство. Группа G является гомоморфным образом группы $F = \langle x, y, z, t \mid 1 = x^2 = y^2 = z^2 = t^2 = (xy)^3 = (xz)^3 = (yz)^3 = (xyz)^{12} = (xyxz)^3 = (xt)^3 = (yt)^3 = (tz)^3 = (ty^x)^3 = (tz^x)^3 = (ty^z)^3 = (xyzt)^{12} = (x^{yz}t)^3 = (x^{zy}t)^3 = (x^{yzy}t)^3 = (xyzx^t)^{12} = (xyzy^t)^{12}\rangle$. Вычисления в GAP показывают, что $|F| = 4374$. Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Пусть G порождается инволюциями и содержит подгруппу $Q \simeq R$. Тогда G локально конечна и содержит 3-подгруппу индекса 2.*

Доказательство. Пусть x, y, z — инволюции, порождающие Q. Покажем, что $(ab)^3 = 1$ для любых двух инволюций a, b из G. Действительно, по лемме 2.4 в $\langle x, y, z, a\rangle$ все инволюции сопряжены. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $x = a$. Еще одно применение леммы 2.4 показывает, что $(ab)^3 = (xb)^3 = 1$.

Покажем, что G периода 6. Пусть $g \in G$, $g = t_1 \cdots t_s$ — произведение инволюций. Индукцией по s докажем, что $g^6 = 1$. По доказанному выше это верно при $s \leq 2$. Пусть $s \geq 3$ и для $h = t_1 \cdots t_{s-1}$ справедливо равенство $h^6 = 1$. По лемме 2.7 подгруппа $H = \left\langle h^3, t_s, t_s^h, t_s^{h^2}\right\rangle$ конечна, а по лемме 2.6 порядок ее силовской 2-подгруппы равен 2. Так как H является $\langle h\rangle$-инвариантной подгруппой, H — подгруппа индекса 1 или 3 в группе $\langle h, t_s\rangle = H\langle h\rangle$. Поэтому в $\langle h, t_s\rangle$ нет элементов порядка 4 и, в частности, $g^6 = (ht_s)^6 = 1$. Таким образом, G периода 6. По лемме 1.3 она локально конечна. Кроме того, в ней порядок произведения любых двух инволюций равен трем. По лемме 2.6 индекс силовской 3-подгруппы в G равен двум. Лемма доказана.

3. Окончание доказательства теоремы

Пусть H — подгруппа, порожденная всеми инволюциями из G. По леммам 2.5 и 2.8 она локально конечна. Так как группа G/H периода 6, она тоже локально конечна по лемме 1.3. Теперь G локально конечна по лемме 1.4.

Если в G нет инволюций, т. е. $H = 1$, то G, очевидно, является 3-группой и выполнен п. 1 теоремы. Пусть H — расширение 3-группы посредством группы порядка два и Z — силовская 2-подгруппа из H. Тогда $G = O_3(H)C_G(Z)$. По условию любая инволюция из $C_G(Z)$ лежит в Z, поэтому силовская 2-подгруппа T из G является либо циклической группой, либо группой кватернионов, поэтому либо G обладает нормальным 2-дополнением, которое совпадает с $O_3(G)$, либо G — расщепляемое расширение $O_3(G)$ посредством $SL_2(3)$, и выполнен п. 2 теоремы.

Теперь по лемме 2.8 можно считать, что в H нет подгрупп, изоморфных R. В этом случае по лемме 2.5 порядок любого элемента из H не превосходит числа 4 и H удовлетворяет заключению леммы 1.5. Так как H порождена инволюциями, то либо H является 2-группой, либо $H = VS$, где V — нормальная элементарная абелева 2-группа, S — группа диэдра порядка 6 и $C_V(S) = 1$. Рассмотрим вначале второй случай. Пусть U — подгруппа порядка 3 из S, а T — силовская 2-подгруппа из S. Тогда $G = VN_G(U) = VC_G(U)T$. Так как H содержит все инволюции из G и $C_V(U) = 1$, то $C_G(U)$ является 3-группой, и выполнен п. 3 теоремы.

Пусть, наконец, H является 2-группой. Тогда в $G/O_2(G)$ нет элементов порядка 4 и тем самым $G/O_2(G)$ является расширением 3-группы посредством элементарной абелевой 2-группы. Другими словами, выполнен п. 4 теоремы.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Санов И. Н.* Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. 1940. № 55. С. 166–170.
2. *Burnside W.* On an unsettled question in the theory of discontinuous groups // Quart. J. Pure Appl. Math. 1902. V. 33, N 2. P. 230–238.
3. *Hall M.* Solution of the Burnside problem for exponent six // Ill. J. Math. 1958. V. 2, N 4. P. 764–786.
4. *Neumann B. H.* Groups whose elements have bounded orders // J. Lond. Math. Soc. 1937. V. 12. P. 195–198.
5. *Лысёнок И. Г.* Доказательство теоремы М. Холла о конечности групп $B(m, 6)$ // Мат. заметки. 1987. Т. 41, № 3. С. 422–428.
6. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
7. *Шмидт О. Ю.* Бесконечные разрешимые группы // Мат. сб. 1945. Т. 17, № 2. С. 145–162.
8. *Лыткина Д. В.* Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4 // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 353–358.
9. *Coxeter H. S. M., Moser W. O. J.* Generators and relations for discrete groups. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1980.
10. *Groups, algorithms and programming* / M. Schönert, et al. Aachen: Lehrstuhl D für Math., RWTH, 1993.

Статья поступила 26 июня 2012 г.

Лыткина Дарья Викторовна
Сибирский гос. университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com

Мазуров Виктор Данилович, Мамонтов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
mazurov@math.nsc.ru, andreysmamontov@yahoo.com