Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 512.743.7

ПРОСТЫЕ МОДУЛИ КЛАССИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП С НОРМАЛЬНЫМИ ЗАМЫКАНИЯМИ ОРБИТ МАКСИМАЛЬНОГО ТОРА

К. Г. Куюмжиян

Аннотация. Пусть T — максимальный тор в классической линейной группе G. Найдены все простые рациональные G-модули V, в которых для каждого вектора $\mathsf{v} \in V$ замыкание его T-орбиты является нормальным аффинным многообразием. Для всех G-модулей без этого свойства указывается T-орбита с ненормальным замыканием. При решении задачи используется комбинаторный критерий нормальности, формулируемый в терминах набора весов простого G-модуля. Указанная задача для $G = SL(n)$ была решена автором ранее.

Ключевые слова: торические многообразия, нормальность, неприводимые представления, классические системы корней, весовое разложение.

Введение

Пусть G — аффинная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль, действующая на некотором аффинном алгебраическом многообразии. Напомним, что неприводимое аффинное алгебраическое многообразие X называется *нормальным*, если алгебра регулярных функций $\Bbbk[X]$ целозамкнута в своем поле частных. Вопрос о нормальности замыканий орбит имеет долгую историю. Первые результаты были получены Костантом [1]. Он показал, что для редуктивной G нуль-конус в присоединенном модуле нормален. Крафт и Прочези [2] доказали, что в присоединенном модуле $\mathfrak{sl}(\mathfrak{n})$ замыкания всех $SL(n)$-орбит нормальны. В положительной характеристике аналогичный результат для $SL(n)$ установлен Донкиным [3]. Позже Крафт и Прочези [4] и Соммерс [5] изучили тот же вопрос для присоединенных модулей других классических групп. В частности, в [4] на языке диаграмм Юнга указаны орбиты с ненормальными замыканиями. Случаи F_4, G_2, E_6 разобраны Броером, Крафтом и Соммерсом в [6–8]. Для E_7 и E_8 полного ответа еще нет.

Перейдем к действиям алгебраического тора T, т. е. аффинной алгебраической группы, изоморфной $\Bbbk^\times \times \dots \times \Bbbk^\times$, где $\Bbbk^\times = \Bbbk \setminus \{0\}$. Неприводимое алгебраическое многообразие X называется *торическим*, если оно нормально

Работа выполнена при частичной поддержке Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ (грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0023), «EADS Foundation Chair in Mathematics», Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–31342 мол_а и 12–01–33101 мол_а_вед), Русско-французской лаборатории Понселе (UMI 2615 CNRS) и фонда Дмитрия Зимина «Династия».

и допускает регулярное действие T с открытой орбитой. Торические многообразия играют важную роль в алгебраической геометрии, топологии и комбинаторике, так как они полностью описываются в терминах выпуклой геометрии (см. [9]). Если задано действие алгебраического тора T на многообразии Y, то замыкание орбиты $X = \overline{Ty}$ точки $y \in Y$ является естественным кандидатом в торические многообразия. Чтобы проверить это, достаточно убедиться, что X нормально.

Свойство нормальности замыкания T-орбиты имеет хорошо известную комбинаторную интерпретацию. Пусть $v_1, \dots, v_r$ — векторы пространства $\mathbb{Q}^n$. Для произвольного множества рациональных чисел A через $A(v_1, \dots, v_r)$ будем обозначать множество линейных комбинаций векторов $v_1, \dots, v_r$ с коэффициентами в A. Множество $\{v_1, \dots, v_r\}$ называется *насыщенным*, если

$$\mathbb{Z}_{\geq 0}(v_1, v_2, \dots, v_r) = \mathbb{Z}(v_1, v_2, \dots, v_r) \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}(v_1, v_2, \dots, v_r).$$

В этих терминах замыкание T-орбиты вектора в рациональном T-модуле нормально тогда и только тогда, когда множество весов в его весовом разложении насыщенно.

Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль. Зафиксируем в G максимальный тор T. Пусть V — конечномерный рациональный G-модуль. Будем исследовать модули V со следующим свойством: для каждого вектора $\mathsf{v} \in V$ замыкание его орбиты $\overline{T\mathsf{v}}$ является нормальным (аффинным) алгебраическим многообразием.

Ранее наличие этого свойства исследовалось в работе [10] в том случае, когда G — простая группа, а V — присоединенный модуль; этот случай для $G = SL(n)$ разобран также в [11, упражнение 3.7; 12]. В предыдущей работе [13] автор изучает это свойство для всех простых $SL(n)$-модулей. Аналогичная задача для исключительных простых групп исследована в [14].

Цель работы — исследование данного свойства для специальной ортогональной группы $SO(n)$, спинорной группы $\mathrm{Spin}(n)$ и симплектической группы $Sp(2n)$ во всех их простых модулях.

Таблица 1

Система корней	Старший вес	Разобрано
$B_n, n \geq 2$	π_1	Случай 2.1
B_2	π_2	Случай 2.3
B_2	$2\pi_2$	Случай 2.2
B_3	π_3	Случай 2.3
B_4	π_4	Случай 2.3
$C_n, n \geq 3$	π_1	Случай 3.1
C_3	π_2	Случай 3.2
C_4	π_2	Случай 3.2
$D_n, n \geq 4$	π_1	Случай 4.1
D_4	π_2	Случай 4.2
D_4	π_3	Случай 4.3
D_4	π_4	Случай 4.3
D_5	π_4	Случай 4.4
D_6	π_5	Случай 4.5
D_6	π_6	Случай 4.5

Все рассуждения будут проходить в терминах систем корней. Напомним, что простой модуль однозначно определяется своим старшим весом λ. В качестве λ может выступать произвольный доминантный вес $a_1\pi_1 + \dots + a_r\pi_r$, где $\pi_1, \dots, \pi_r$ — фундаментальные веса, а $a_1, \dots, a_r$ — целые неотрицательные числа. Наша нумерация фундаментальных весов соответствует [15, гл. 4].

Теорема 1. *Для простых алгебраических групп типов B_n, C_n, D_n и их модулей, перечисленных в табл. 1, а также для двойственных к этим модулям, замыкания всех орбит максимального тора нормальны. Во всех остальных случаях модуль содержит орбиту максимального тора с ненормальным замыканием.*

Для простого G-модуля $V(\lambda)$ со старшим весом λ через $M(\lambda)$ обозначим множество его весов относительно максимального тора T. Тогда нормальность замыканий всех T-орбит в модуле $V(\lambda)$ равносильна насыщенности всех подмножеств множества $M(\lambda)$, т. е. *сверхнасыщенности* $M(\lambda)$.

Изложим план работы. В первой части напоминаем некоторые факты о весовом разложении и представлениях со старшим весом, а также излагаем необходимые комбинаторные понятия, связанные с насыщенными множествами. В разд. 2–4 доказываем теорему 1 для систем корней B_n, C_n и D_n соответственно. Мы проверяем сверхнасыщенность множеств $M(\lambda)$ для весов λ, указанных в табл. 1 (положительные случаи), а для остальных (отрицательных) случаев указываем ненасыщенный поднабор. В наиболее сложных положительных случаях используются свойства унимодулярных наборов векторов и их обобщения. В отрицательных случаях достаточно ограничиться минимальными по включению наборами весов, не входящими в табл. 1. Отметим, что наиболее сложные положительные случаи могут представлять интерес как самостоятельные комбинаторные факты.

Автор выражает глубокую благодарность И. В. Аржанцеву за постановку задачи и плодотворные дискуссии и И. И. Богданову за ценные замечания, а также благодарит Р. А. Девятова за обсуждение и компьютерное подтверждение наиболее сложных случаев.

1. Предварительные сведения

Всюду в дальнейшем $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис пространства $\mathbb{Q}^n$. Дробная часть числа q обозначается через $\{q\}$, а целая часть — через $\lfloor q \rfloor$. Знаком $\vdots$ обозначается делимость: $a \vdots b \iff (\exists c \in \mathbb{Z}) a = bc$.

1.1. Весовое разложение. Пусть T — алгебраический тор и $\Lambda = \Lambda(T)$ — решетка характеров тора T. Для каждого рационального T-модуля V имеет место весовое разложение

$$V = \bigoplus_{\mu \in \Lambda} V_\mu, \quad \text{где } V_\mu = \{\mathsf{v} \in V \mid t\mathsf{v} = \mu(t)\mathsf{v}\}.$$

Обозначим через $M(V) = \{\mu \in \Lambda \mid V_\mu \neq 0\}$ набор весов модуля V. С каждым ненулевым вектором v связано весовое разложение $\mathsf{v} = \mathsf{v}_{\mu_1} + \dots + \mathsf{v}_{\mu_s}$, $\mathsf{v}_{\mu_i} \in V_{\mu_i}$, $\mathsf{v}_{\mu_i} \neq 0$. В дальнейшем нам будет удобно рассматривать веса $\mu \in \Lambda$ как точки рационального векторного пространства $\Lambda_{\mathbb{Q}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Следующее утверждение является хорошо известным комбинаторным критерием нормальности замыкания T-орбит (см. [16, I, § 1, лемма 1].

Предложение 1.1. *Пусть V — конечномерный рациональный T-модуль и $\mathsf{v} = \mathsf{v}_{\mu_1} + \dots + \mathsf{v}_{\mu_s}$ — весовое разложение вектора $\mathsf{v} \in V$. Замыкание $\overline{T\mathsf{v}}$ орбиты вектора v нормально тогда и только тогда, когда множество характеров $\{\mu_1, \dots, \mu_s\}$ насыщенно.*

Назовем конечное подмножество M рационального векторного пространства $\mathbb{Q}^n$ *сверхнасыщенным*, если каждое его подмножество является насыщенным.

Следствие 1.2. *Пусть V — конечномерный рациональный T-модуль. Замыкание каждой T-орбиты в модуле V нормально тогда и только тогда, когда множество $M(V)$ сверхнасыщенно.*

Для двойственного модуля V^* имеем $M(V^*) = -M(V)$. Тем самым сверхнасыщенность множества $M(V)$ равносильна сверхнасыщенности множества $M(V^*)$.

1.2. Представления со старшим весом. Пусть G — связная односвязная полупростая алгебраическая группа, B — борелевская подгруппа в G и $T \subset B$ — максимальный тор. Обозначим через Φ систему корней алгебры Ли $\mathrm{Lie}(G)$, связанную с тором T. Пусть Φ^+ — множество положительных корней, а $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ — множество простых корней в Φ^+, отвечающее борелевской подгруппе B. Обозначим через π_i фундаментальный вес, соответствующий простому корню α_i. Хорошо известно, что веса $\pi_1, \dots, \pi_r$ образуют базис решетки характеров $\Lambda = \Lambda(T)$ тора T, эта решетка в случае односвязной группы также является *решеткой весов* системы корней Φ. Полугруппа, порожденная фундаментальными весами, совпадает с полугруппой доминантных весов Λ_+. *Решеткой корней* Ξ называют подгруппу в Λ, порожденную системой корней Φ. Тогда $\Xi \subset \Lambda$ — подрешетка конечного индекса, а $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — базис в Ξ.

Пусть $V(\lambda)$ — простой G-модуль со старшим весом $\lambda \in \Lambda_+$. Напомним описание множества T-весов модуля $V(\lambda)$. Пусть W — группа Вейля системы корней Φ. Тогда W реализуется как конечная группа линейных преобразований пространства $\Lambda_{\mathbb{Q}}$, порожденная отражениями s_α, где α — корень (см. [17]). *Многогранником весов* $P(\lambda)$ модуля $V(\lambda)$ называется выпуклая оболочка $\mathrm{conv}\{w\lambda \mid w \in W\}$ W-орбиты точки λ в пространстве $\Lambda_{\mathbb{Q}}$. Тогда

$$M(\lambda) = (\lambda + \Xi) \cap P(\lambda)$$

(см. [18, теорема 14.18]). На пространстве $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ определен частичный порядок: $\lambda \succeq \mu$ тогда и только тогда, когда $\lambda - \mu$ есть целочисленная комбинация простых корней с неотрицательными коэффициентами. Будем использовать следующую классическую лемму.

Лемма 1.3. *Пусть $\lambda, \lambda' \in \Lambda_+$ и $\lambda \succeq \lambda'$. Тогда $M(\lambda) \supseteq M(\lambda')$.*

Следствие 1.4. *Пусть $\lambda' \in \Lambda_+$ и $M(\lambda')$ не сверхнасыщенно. Тогда для всех $\lambda \in \Lambda_+$ таких, что $\lambda \succeq \lambda'$, множество $M(\lambda)$ будет не сверхнасыщенным.*

1.3. Ненасыщенные множества (ННП). Доказательство следующей леммы можно найти в [10].

Лемма 1.5. *Пусть $M \subset \mathbb{Q}^n$ — конечное множество векторов.*

(i) *Если M линейно независимо, то M насыщенно.*

(ii) *Если M ненасыщенно и в нем одновременно есть векторы v и $-v$, то либо $M \backslash \{v\}$, либо $M \backslash \{-v\}$ ненасыщенно.*

(iii) *Пусть $v \in \mathbb{Q}_{\geq 0}(M)$. Тогда существует такое линейно независимое подмножество $M' \subseteq M$, что $v \in \mathbb{Q}_{\geq 0}(M')$.*

Расширенным ненасыщенным подмножеством (РННП) будем называть ННП $\{v_1, \dots, v_r\}$ вместе с таким вектором v_0, что

$$v_0 \in (\mathbb{Z}(v_1, v_2, \dots, v_r) \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}(v_1, v_2, \dots, v_r)) \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0}(v_1, v_2, \dots, v_r),$$

причем существует $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-комбинация

$$v_0 = q_1 v_{i_1} + \dots + q_s v_{i_s}, \quad v_{i_j} \in \{v_1, v_2, \dots, v_r\},$$

в которой векторы $v_{i_1}, \dots, v_{i_s}$ линейно независимы, а коэффициенты q_i лежат в полуинтервале $[0, 1)$. Такие РННП будем обозначать через $\{v_0; v_1, \dots, v_r\}$.

Лемма 1.6. *Пусть множество $M = \{v_1, \dots, v_r\}$ ненасыщенно. Тогда существует такой вектор v_0, что $\{v_0; v_1, \dots, v_r\}$ — РННП.*

Доказательство. Рассмотрим $v_0 \in (\mathbb{Z}(M) \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}(M)) \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0}(M)$ и соответствующую $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-комбинацию $v_0 = q_1 v_1 + \dots + q_r v_r$. По лемме 1.5(iii) существует такое линейно независимое подмножество $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\} \subseteq \{v_1, \dots, v_r\}$ и такой набор $\mathbb{Q}_{\geq 0}$- коэффициентов q'_j, что $v_0 = q'_1 v_{i_1} + \dots + q'_s v_{i_s}$. Если $q'_j \geq 1$ для каких-то j, то рассмотрим вместо v_0 вектор $v'_0 = v_0 - \lfloor q'_1 \rfloor v_{i_1} - \dots - \lfloor q'_s \rfloor v_{i_s}$. Он тоже лежит в $\mathbb{Z}(v_1, \dots, v_r)$ и в $\mathbb{Q}_{\geq 0}(v_1, \dots, v_r)$, но не лежит в $\mathbb{Z}_{\geq 0}(v_1, \dots, v_r)$. При этом все $q_i - \lfloor q_i \rfloor$ принадлежат $[0, 1)$, значит, $\{v'_0; v_1, \dots, v_r\}$ — РННП. □

Пусть $v_0, v_1, \dots, v_r$ — векторы пространства $\mathbb{Q}^n$, и пусть f — линейная функция на $\mathbb{Q}^n$. Будем называть f *разделяющей* линейной функцией для набора $\{v_0; v_1, \dots, v_r\}$, если значение $f(v_0)$ не представимо в виде линейной комбинации значений $f(v_1), \dots, f(v_r)$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Если известно, что v_0 лежит в $\mathbb{Z}(v_1, v_2, \dots, v_r) \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}(v_1, v_2, \dots, v_r)$, причем v_0 может быть представлено как $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-комбинация линейно независимых векторов $v_1, \dots, v_r$ с коэффициентами из $[0, 1)$, то наличие разделяющей функции гарантирует, что $\{v_0; v_1, \dots, v_r\}$ — РННП.

1.4. Унимодулярные и почти унимодулярные множества. Пусть множество векторов $M \subset \mathbb{Q}^n$ имеет ранг d, $d \leq n$, и $L = \langle v \mid v \in M \rangle$ — линейная оболочка векторов из M. Множество M называется *унимодулярным*, если для любых линейно независимых $v_1, \dots, v_d \in M$ значение d-мерного объема $\mathrm{vol}_d(v_1, v_2, \dots, v_d)$ постоянно по абсолютной величине. Если в L фиксирован базис, то это эквивалентно тому, что модули всех ненулевых определителей $|\det(v_1, v_2, \dots, v_d)|$, $v_1, v_2, \dots, v_d \in M$, в этом базисе равны.

Если множество M унимодулярно и $M_1 \subseteq M$, то пересечение M с подпространством $L_1 \subset L$, $L_1 = \langle v \mid v \in M_1 \rangle$, тоже унимодулярно. Это легко увидеть, если выбрать в L базис, согласованный с L_1.

Следующая теорема используется во многих доказательствах.

Теорема 2 [11, теорема 3.5]. *Любое унимодулярное множество векторов M сверхнасыщенно.*

Будем называть множество $M \subset \mathbb{Q}^n$ ранга d *почти унимодулярным*, если существует подмножество $\{v_1, v_2, \dots, v_d\} \subseteq M$, для которого $\det(v_1, v_2, \dots, v_d) = m$ в некотором базисе пространства $\langle M \rangle$ и при этом для любого другого вектора $v' \in M$ и любого i значение $\det(v_1, v_2, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_d, v')$ равно km, $k \in \mathbb{Z}$. Величина $m = \det(v_1, v_2, \dots, v_d)$ называется *объемом* почти унимодулярного подмножества. *Примитивным поднабором* $\{v_1, \dots, v_d\}$ почти унимодулярного набора объема m будем называть поднабор, определитель которого равен $\pm m$. Свойство множества быть почти унимодулярным и его примитивные поднаборы не зависят от выбора базиса в пространстве $\langle M \rangle$.

Лемма 1.7. *Пусть M — почти унимодулярное множество, все определители которого лежат в множестве $m \cdot \{1, a_1, \dots, a_k\}$, и $w_1, \dots, w_d \in M$ таковы, что $\det(w_1, \dots, w_d) = am$. Тогда коэффициенты разложения любого вектора $w \in M$ по $w_1, \dots, w_d$ принадлежат множеству $\{\pm 1/a, \pm a_1/a, \dots, \pm a_k/a\}$.*

Доказательство. В разложении по базису $(v_1, v_2, \dots, v_d)$ согласно формулам Крамера вектор $w \in M$ имеет следующие координаты:

$$\text{если } v' = b_1 v_1 + \dots + b_d v_d, \text{ то } b_i = \frac{\det(v_1, v_2, \dots, \widehat{v_i}, v', \dots, v_d)}{\det(v_1, v_2, \dots, v_d)},$$

т. е. все b_i имеют вид $\{\pm 1/a, \pm a_1/a, \dots, \pm a_k/a\}$. $\square$

Следствие 1.8. *Для любого примитивного поднабора $v_1, \dots, v_d \subseteq M$ множество M лежит в $\mathbb{Z}(v_1, \dots, v_d)$.*

Следствие 1.9. *В почти унимодулярном множестве M объема m и ранга d значения всех определителей имеют вид km, $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть $w_1, \dots, w_d \in M$. Имеем $\det(w_1, \dots, w_d) = \det A \cdot \det(v_1, \dots, v_d)$, где A — целочисленная матрица, выражающая набор векторов $w_1, \dots, w_d$ через базис $(v_1, v_2, \dots, v_d)$. Так как $\det A \in \mathbb{Z}$, значение $\det(w_1, \dots, w_d)$ делится на m. $\square$

Это дает эквивалентное определение почти унимодулярного множества как множества, в котором все определители кратны некоторому числу m и найдется определитель, в точности равный m.

Пример 1.10. Пусть M состоит из 16 точек $\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$. Легко проверить, что определители всех четверок равны 0, 8 или 16. Значит, M почти унимодулярно.

Лемма 1.11. *Пусть почти унимодулярное множество M ранга d и объема m не является сверхнасыщенным и $\{v_0; v_1, \dots, v_r\}$ — некоторое* РННП. *Предположим, что в соответствующую $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-комбинацию для v_0 с ненулевыми коэффициентами входят линейно независимые векторы $v_1, \dots, v_{d'}$.*

(i) *Если $d' = \operatorname{rk}\langle v_1, \dots, v_{d'}\rangle = d$, то $|\operatorname{vol}_d(v_1, \dots, v_d)| \neq m$.*

(ii) *Если $d' < d$, то $|\operatorname{vol}_d(v_1, \dots, v_{d'}, w_{d'+1}, \dots, w_d)| \neq m$ для любых векторов $w_{d'+1}, \dots, w_d \in M$, линейно независимых с $v_1, \dots, v_{d'}$.*

Доказательство. (i) Если $|\operatorname{vol}_d(v_1, \dots, v_{d'})| = m$, то по следствию 1.8 вектор v_0 раскладывается по $v_1, \dots, v_d$ с целыми коэффициентами. Но $v_1, \dots, v_d$ линейно независимы, поэтому данная $\mathbb{Z}$-комбинация совпадает с исходной $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-комбинацией; противоречие.

(ii) Можно считать, что векторы $w_{d'+1}, \dots, w_d$ входят в исходную $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-комбинацию для v_0 с нулевыми коэффициентами, а дальше воспользоваться рассуждением из предыдущего пункта. $\square$

1.5. 2-Унимодулярные множества. Будем называть почти унимодулярное множество M объема m *2-унимодулярным*, если все ненулевые определители в нем равны $\pm m$ или $\pm 2m$.

Лемма 1.12. *Рассмотрим 2-унимодулярное множество M ранга d, не являющееся сверхнасыщенным. Пусть $\{v_0; v_1, \dots, v_r\}$ — соответствующее* РННП, *и $v_0 = q_1 v_1 + \dots + q_l v_l$ — соответствующая $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-комбинация. Тогда все q_i принадлежат $\{0, 1/2\}$.*

Доказательство. Пусть множество $\{v_1, \dots, v_r\}$ имеет ранг d'. Дополним $\{v_1, \dots, v_l\}$ до базиса пространства $\langle M\rangle$. Тогда утверждение следует из лемм 1.11(i), 1.7 и определения РННП. $\square$

В следующих трех леммах фиксируем базис $(\bar v_1,\ \bar v_2, \dots,\ \bar v_d)$ объема $2m$. Остальные векторы из M по лемме 1.7 будут раскладываться по этому базису с коэффициентами 0, $\pm 1/2$ и ± 1. Для каждого вектора $v \in M$ обозначим через $S(v)$ набор индексов, соответствующих координатам $\pm 1/2$.

Лемма 1.13. *Если $S(v_1) \neq \varnothing$ и $S(v_2) \neq \varnothing$, то $S(v_1) = S(v_2)$.*

Доказательство. Предположим, что $S(v_1) \neq S(v_2)$ и $\#S(v_1) \geq \#S(v_2)$. Выберем индексы $i \in S(v_1) \setminus S(v_2)$ и $j \in S(v_2)$, $j \neq i$. Тогда

$$\det(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \widehat{\bar{v}_i}, \dots, \widehat{\bar{v}_j}, \dots, \bar{v}_d, v_1, v_2) \in \left\{\frac{m}{2}, \frac{3m}{2}\right\};$$

противоречие. $\square$

Лемма 1.14. *Пусть конечная группа W действует перестановками на множестве M и линейно в $\langle M\rangle$ так, что для любого базиса $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_d)$ объема $2m$ и любых двух индексов i, j существует $w \in W$, переставляющий прямые $\langle \bar{v}_1\rangle$, $\langle \bar{v}_2\rangle, \dots, \langle \bar{v}_d\rangle$, при этом транспонируя $\langle \bar{v}_i\rangle$ и $\langle \bar{v}_j\rangle$. Тогда для любого $v \in M$ в разложении по базису $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_d)$ все его ненулевые координаты принадлежат либо $\{\pm 1\}$, либо $\{\pm 1/2\}$.*

Доказательство. От противного, пусть вектор v таков, что на месте i у него ± 1, а на месте j — $\pm 1/2$. Транспонируя прямые $\langle \bar{v}_i\rangle$ и $\langle \bar{v}_j\rangle$, получим вектор $w(v)$ из M, при этом $S(v) \neq S(w(v))$; противоречие с леммой 1.13. $\square$

Лемма 1.15. *Пусть на 2-унимодулярном множестве M действует конечная группа W с выполнением условий леммы 1.14. Тогда M сверхнасыщенно.*

Доказательство. От противного, пусть M не сверхнасыщенно. Выберем в M минимальное по включению РННП. Предположим, что ранг РННП совпадает с рангом M, а векторы, входящие в $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-комбинацию, составляют первые несколько векторов базиса объема $2m$. Покажем, что данное РННП состоит из одного вектора вида $(\pm 1/2, \dots, \pm 1/2, 0, \dots, 0)$ и нескольких векторов базиса. Действительно, в РННП заведомо входят те векторы, полусуммой которых является v_0. Заметим также, что в $\mathbb{Z}(M)$ по модулю группы $\mathbb{Z}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_d)$ есть всего два смежных класса, так как ввиду лемм 1.13, 1.14 все векторы, имеющие нецелые координаты, отличаются на целый вектор. Хотя бы один представитель второго класса должен быть добавлен, при этом одного достаточно.

Но из любого вектора v_{d+1} вида $(\pm 1/2, \dots, \pm 1/2, 0, \dots, 0)$ можно получить вектор $v_0 = (1/2, \dots, 1/2, 0, \dots, 0)$ добавлением нескольких $\bar{v}_i$. Значит, это не РННП. $\square$

2. Система корней B_n

Реализуем систему корней B_n, где $n \geq 2$, как $\{\pm e_i \pm e_j, \pm e_i \mid 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j\}$. Относительно системы простых корней

$$\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 - e_3, \dots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n,\ \alpha_n = e_n$$

фундаментальные веса имеют вид

$$\pi_1 = e_1,\ \pi_2 = e_1 + e_2,\ \dots,\ \pi_{n-1} = e_1 + \dots + e_{n-1},\ \pi_n = \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_n).$$

Решетка корней Ξ равна $\mathbb{Z}^n$. Решетка весов Λ имеет вид

$$\Lambda = \{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \mid 2\ell_i \in \mathbb{Z}, \ell_i - \ell_j \in \mathbb{Z}, i, j = 1, \dots, n\}.$$

Группа Вейля W действует перестановками на множестве координат и сменой знаков у произвольного подмножества координат. Вес $\lambda = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ доминантен тогда и только тогда, когда $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_n \geq 0$. Если у λ все координаты целые (строго полуцелые), то множество $M(\lambda)$ состоит из всех целых (строго полуцелых) точек в многограннике $P(\lambda)$.

2.1. Положительные результаты.

Случай 2.1. $\lambda = \pi_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Тогда $M(\lambda) = \{\pm e_i \mid 1 \le i \le n\}$. Данное множество унимодулярно и по теореме 2 сверхнасыщенно.

Случай 2.2. $\lambda = 2\pi_2 = (1, 1)$, $n = 2$. Перебором убеждаемся, что множество $\{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_1 \pm e_2\}$ сверхнасыщенно.

Случай 2.3. $\lambda = \pi_n = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$, $2 \le n \le 4$. После домножения на 2 имеем

$$M'(\lambda) = \{(\underbrace{\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1}_{n \text{ координат}})\}.$$

При $n = 2, 3$ данное множество унимодулярно, поэтому по теореме 2 сверхнасыщенно.

Пусть $n = 4$. Значения всех определителей в $M'(\lambda)$ равны ± 8 и ± 16, т. е. $M'(\lambda)$ почти унимодулярно. Найдем все четверки векторов с определителем 16. Можно считать, что первый вектор — это $(1, 1, 1, 1)$. Перебором убеждаемся, что с точностью до домножения векторов на -1 подходит только множество вектор-строк

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что действие W на $M(\lambda)$ содержит все транспозиции векторов вида $\pm w_i$ и $\pm w_j$, поэтому можно применить лемму 1.15.

2.2. Несколько отрицательных результатов.

Пример 2.1. $\lambda = 2\pi_1 = 2e_1$, $n = 2$. Рассмотрим следующее РННП: $v_1 = 2e_1$, $v_2 = e_1 + e_2$, $v_3 = e_2$, $v_0 = e_1 = \frac{1}{2}v_1 = v_2 - v_3$. Предъявим разделяющую функцию: $f = 3x_1 + 4x_2$ (см. разд. 1.3), тогда $f(v_1) = 6$, $f(v_2) = 7$, $f(v_3) = 4$, $f(v_0) = 3$. Очевидно, 3 не раскладывается в сумму чисел 4, 6 и 7.

Пример 2.2. $\lambda = \pi_2 = e_1 + e_2$, $n \ge 3$. Пусть $v_1 = e_1 + e_2$, $v_2 = e_1 - e_2$, $v_3 = e_2 - e_3$, $v_4 = -e_3$. Тогда $v_0 = e_1 = \frac{1}{2}((e_1 + e_2) + (e_1 - e_2)) = (e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) - (-e_3)$, но $e_1 \notin \mathbb{Z}_{\ge 0}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Для проверки того, что это РННП, применим разделяющую функцию $f = 3x_1 + x_2 - 5x_3$.

Пример 2.3. $\lambda = \pi_1 + \pi_n = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, $n \ge 2$. Пусть

$$v_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right),\ v_2 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right),\ v_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right).$$

Тогда $v_0 = (1, 0, \dots, 0) = \frac{1}{3}(v_1 + v_2) = v_1 - v_3$, и из рассмотрения первой координаты ясно, что $v_0 \notin \mathbb{Z}_{\ge 0}(v_1, v_2, v_3)$.

Пример 2.4. $\lambda = \pi_n = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$, $n = 5$. Для упрощения записи умножим все координаты на 2. Пусть

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$v_0 = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5) = (1,1,1,1,1) = v_1 + v_2 - v_6.$$

Применим разделяющую функцию $f = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5$.

2.3. Редукция к разобранным случаям. *Сдвигом в случае* B_n будем называть замену вектора $\lambda = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ на вектор $\lambda' = (\ell_1, \dots, \ell_i - 1, \dots, \ell_n)$ при $\ell_i \geq 1$. Здесь λ' всегда лежит в $M(\lambda)$, так как $\lambda - \lambda' \in \Xi$ и λ' является выпуклой комбинацией с подходящим коэффициентом векторов λ и $(\ell_1, \dots, -\ell_i, \dots, \ell_n)$.

Лемма 2.1. *Пусть* $n \geq 3$, $\lambda \in \Xi \setminus \Phi$. *Тогда* $e_1 + e_2 \in M(\lambda)$.

Доказательство. Пусть $\lambda = (\ell_1, \dots, \ell_n)$. Так как λ доминантен, $\sum\limits_1^n \ell_i \geq 2$. Если $\sum\limits_1^n \ell_i > 2$ и $\ell_i > 0$, то при помощи сдвига получаем в $M(\lambda)$ точку $(\ell_1, \dots, \ell_{i-1}, \ell_i - 1, \ell_{i+1}, \dots, \ell_n)$. Повторяя эту процедуру, получим в $M(\lambda)$ точку с $\sum\limits_1^n \ell_i = 2$. Либо это $e_i + e_j$, либо $2e_i$, из которого действием W можно получить $2e_j$, и в их выпуклой оболочке лежит вектор $e_i + e_j$, значит, и вектор $e_1 + e_2$. $\square$

Используя следствие 1.4, сведем все случаи, относящиеся к B_n и не входящие в теорему 1, к примерам 2.1–2.4. Если все координаты λ целые и $n \geq 3$, то любой вес λ, не лежащий в Ξ, по лемме 2.1 сводится к $e_1 + e_2$, т. е. к примеру 2.2. Если все координаты λ целые и $n = 2$, то $\lambda = (\ell_1, \ell_2) \neq (2, 0)$ не корень, т. е. $\ell_1 \geq 2$, поэтому $(2, 0) \in M(\lambda)$, и к примеру 2.1 применяется следствие 1.4.

Если все координаты $\lambda = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ полуцелые и существует такое i, что $2\ell_i \geq 3$, то в $M(\lambda)$ лежит точка $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$. Для этого необходимо сделать несколько сдвигов. Затем применим следствие 1.4 к примеру 2.3.

Наконец, если $\lambda = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$, то после домножения на 2

$$M'(\lambda) = \{(\underbrace{\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1}_{n \text{ координат}})\}.$$

Для $n = 5$ см. пример 2.4, для $n > 5$ ННП строится из примера 2.4: к каждому вектору v_i добавляются $n - 5$ координат, равных пятой координате вектора v_i.

3. Система корней C_n

Система корней C_n, $n \geq 3$, состоит из векторов $\{\pm e_i \pm e_j, \pm 2e_i \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$. Относительно системы простых корней

$$\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 - e_3, \dots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n, \alpha_n = 2e_n$$

фундаментальные веса имеют вид

$$\pi_1 = e_1,\ \pi_2 = e_1 + e_2, \dots, \pi_n = e_1 + \dots + e_n.$$

Решетка корней Ξ совпадает с $\left\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum\limits_1^n a_i \vdots 2\right\}$. Решетка весов Λ равна $\mathbb{Z}^n$. Группа Вейля W действует перестановками на множестве координат и сменой знаков у произвольного подмножества координат. Вес $\lambda = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ доминантен тогда и только тогда, когда $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_n \geq 0$. Множество $M(\lambda)$ — множество целых точек внутри $P(\lambda)$, четность суммы координат которых такая же, как у λ.

3.1. Положительные результаты.

Случай 3.1. $\lambda = \pi_1 = e_1$. Очевидно, $M(\lambda)$ сверхнасыщенно.

Случай 3.2. $\lambda = \pi_2 = e_1 + e_2$, $n = 3, 4$. Для $n = 3$ множество $M(\lambda)$ унимодулярно, поэтому сверхнасыщенно. Для $n = 4$ оно почти унимодулярно, все определители равны ± 2 или ± 4, причем если определитель равен ± 4, данная четверка векторов без ограничения общности равна вектор-строкам матрицы

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Образ W, действуя на $\{\langle v_1 \rangle, \langle v_2 \rangle, \langle v_3 \rangle, \langle v_4 \rangle\}$, содержит четверную группу Клейна, поэтому можно применить лемму 1.15.

3.2. Несколько отрицательных результатов.

Пример 3.1. $\lambda = \pi_1 + \pi_2 = (2, 1, 0)$. Пусть

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_0 = (1, 1, 1) = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3) = v_1 + v_2 - v_4.$$

Применима разделяющая функция $f = 100x_1 + 10x_2 + x_3$.

Пример 3.2. Пусть $\lambda = 2\pi_1 = 2e_1$, $n = 3$. Предъявим РННП:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_0 = e_1 + e_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = v_3 - v_4, \ f = 5x_1 + 3x_2 + 9x_3.$$

Пример 3.3. $\lambda = \pi_3 = e_1 + e_2 + e_3$, $n = 3$. Рассмотрим РННП:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$v_0 = e_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = v_1 - v_3 + v_4, \ f = 11x_1 + 6x_2 - 14x_3.$$

Пример 3.4. $\lambda = \pi_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $n = 4$. Рассмотрим

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $v_0 = (1, 1, 0, 0) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = v_3 - v_4$. Рассмотрим функцию $f = 5x_1 + 5x_2 + 8x_3 - x_4$. Тогда $f(v_1) = 17$, $f(v_2) = f(v_4) = 3$, $f(v_3) = 13$, $f(v_0) = 10$. Значения на v_1 и v_3 слишком большие, поэтому v_1 и v_3 нельзя использовать. Но 10 не делится на 3, поэтому, используя лишь v_2 и v_4, мы не получим v_0.

Пример 3.5. Пусть $\lambda = \pi_2 = e_1 + e_2$, $n = 5$. Предъявим РННП:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_0 = e_1 + e_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = v_2 + v_3 + v_5 - v_6,$$

$$f = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 + 20x_5.$$

Замечание 3.1. Примеры 3.1–3.3 работают для всех $n \geq 3$, пример 3.4 — для всех $n \geq 4$, а пример 3.5 — для всех $n \geq 5$, так как можно добавить к каждому вектору $n - 3$ (соответственно $n - 4$ и $n - 5$) нулевых координат.

3.3. Редукция к разобранным случаям. Рассмотрим два случая: (a) все ℓ_i принадлежат $\{0, 1\}$ и (b) среди ℓ_i есть хотя бы одно с $|\ell_i| \geq 2$.

Сначала разберем случай (a): все ℓ_i в $\{0, 1\}$, т. е. $\lambda = \pi_k = e_1 + e_2 + \dots + e_k$, $k \leq n$.

Лемма 3.2. *Если уже построено* ННП *для пары* (k, n_0), *то оно также является* ННП *для всех пар* (k, n), *где* $n \geq n_0$.

Доказательство. Допишем к каждому вектору $n - n_0$ нулей. □

Лемма 3.3. *Если уже построено* ННП *для пары* (k, n), *причем* $k + 2 \leq n$, *то оно является* ННП *и для пары* $(k + 2, n)$.

Доказательство. Если $\lambda = e_1 + \dots + e_{k+2}$, то $e_1 + e_2 + \dots + e_k = \lambda - (e_{k+1} + e_{k+2}) = \frac{1}{2}(\lambda + (e_1 + \dots + e_k - e_{k+1} - e_{k+2}))$, т. е. лежит в $M(\lambda)$. По следствию 1.4 ННП для (k, n) является также ННП для $(k + 2, n)$. □

Возьмем произвольную пару (k, n), где $k \leq n$, отличную от $(1, n)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$ и $(2, 4)$.

Если k четно, $n \leq 4$, то это пара $(4, 4)$, см. пример 3.4. Если k четно, $n \geq 5$, то пример 3.5 для пары $(2, 5)$ достраивается до искомого ННП: сначала применим лемму 3.2, а затем лемму 3.3. Если k нечетно, $k \geq 3$, то пример 3.3 для пары $(3, 3)$ достраивается до искомого ННП тем же способом.

Теперь разберем случай (b).

Определение 3.4. *Сдвигом в случае* C_n будем называть переход от точки $\lambda = (\dots, l, \dots, l', \dots)$ к точке $\lambda' = (\dots, l - 1, \dots, l' + 1, \dots)$ (на соответствующих местах) при $l - l' \geq 2$.

Легко видеть, что точка λ' лежит в $M(\lambda)$. Если мы последовательно применяем сдвиги, то их число конечно.

Лемма 3.5. *Пусть* $\lambda = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ *и существует* i *такое, что* $\ell_i \geq 2$. *Тогда в* $M(\lambda)$ *лежит либо* $(2, 0, \dots, 0)$, *либо* $(2, 1, 0, \dots, 0)$.

Доказательство. Так как λ доминантен, то $\ell_1 \geq 2$. Далее будем менять λ, не следя за доминантностью. Поменяем у ℓ_n знак так, чтобы $\ell_n \leq 0$, и будем сдвигать ее с ℓ_1 до тех пор, пока ℓ_1 не уменьшится до 2. Если в какой-то момент ℓ_n станет положительной, то сменой знака сделаем ее отрицательной, и т. д. Далее фиксируем $\ell_1 = 2$ и сдвигаем остальные координаты любым допустимым способом, при необходимости меняя у каких-то координат знаки. Данный процесс конечен, и если сдвиг применить нельзя, то это либо точка $(2, 0, \ldots, 0)$, либо точка $(2, 1, 0, \ldots, 0)$. $\square$

Воспользовавшись следствием 1.4, примененным к примерам 3.1, 3.2, получаем, что в случае (b) для всех λ существует ННП.

4. Система корней D_n

Система корней D_n, $n \geq 4$, состоит из векторов $\{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$. Относительно системы простых корней

$$\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 - e_3, \ldots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n,\ \alpha_n = e_{n-1} + e_n$$

фундаментальные веса имеют вид

$$\pi_1 = e_1,\ \pi_2 = e_1 + e_2, \ldots, \pi_{n-2} = e_1 + \cdots + e_{n-2},$$

$$\pi_{n-1} = \frac{1}{2}(e_1 + \cdots + e_{n-1} - e_n), \quad \pi_n = \frac{1}{2}(e_1 + \cdots + e_{n-1} + e_n).$$

Решетка корней Ξ такова: $\left\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum\limits_1^n a_i \vdots 2\right\}$. Решетка весов Λ имеет вид

$$\Lambda = \{(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n) \mid 2\ell_i \in \mathbb{Z},\ \ell_i - \ell_j \in \mathbb{Z},\ i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Группа Вейля W действует перестановками на множестве координат и сменой знаков у произвольного подмножества координат четной мощности. Вес $\lambda = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ доминантен тогда и только тогда, когда $\ell_1 \geq \cdots \geq \ell_n$, $\ell_{n-1} + \ell_n \geq 0$. Если у λ все координаты целые (строго полуцелые), то множество $M(\lambda)$ состоит из всех целых (строго полуцелых) точек в многограннике $P(\lambda)$, сумма координат которых отличается от суммы координат λ на четное число.

Изложение в случае D_n происходит не так, как для B_n и C_n. Отдельно разбираются случаи, когда все координаты фундаментального веса целые и когда все нецелые. Многие ННП будут взяты из случая C_n. Сдвиг в случае D_n устроен так же, как и в случае C_n.

4.1. Координаты всех весов целые.

Случай 4.1. $\lambda = \pi_1 = e_1$. Очевидно, $M(\lambda)$ сверхнасыщенно.

Случай 4.2. $\lambda = \pi_2 = e_1 + e_2$, $n = 4$. Множество $M(\lambda)$ совпадает с аналогичным из случая 3.2, поэтому сверхнасыщенно.

В остальных случаях построим ННП. Чтобы использовать ННП, построенные для C_n, необходимо лишь проверять, что в случае D_n используемые веса действительно принадлежат $M(\lambda)$. Если у точки v есть нулевая координата, то ее орбита под действием группы Вейля в случаях C_n и D_n совпадает, так как число 0 можно при необходимости домножить на -1.

Пример 4.1. $\lambda = \pi_1 + \pi_2 = (2, 1, 0, 0)$. Подходит пример 3.1.

Пример 4.2. $\lambda = 2\pi_1 = (2, 0, 0, 0)$, $n = 4$. Подходит пример 3.2 с дописанным столбцом нулей.

Пример 4.3. Пусть $\lambda = \pi_3 + \pi_4 = e_1 + e_2 + e_3$, $n = 4$. Подходит пример 3.3 с дописанным столбцом нулей.

Пример 4.4. $\lambda = \pi_2 = e_1 + e_2$, $n = 5$. Применим пример 3.5.

Пример 4.5. $\lambda = 2\pi_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, n = 4$. Годится пример 3.4.

Теперь покажем, как из приведенных примеров следует существование ННП в случаях (a) если все ненулевые координаты старшего веса равны ± 1, причем их сумма нечетна; (b) если все ненулевые координаты старшего веса равны ± 1, причем их сумма четна; (c) если у λ есть координата, по абсолютной величине не меньше двух.

В этом разделе все координаты целые, поэтому любое множество весов для некоторого n можно рассматривать как множество весов для большего n, положив новые координаты нулями. Следовательно, ННП 4.1–4.3 и 4.5 являются ННП для старшего веса такого же вида для всех $n \geq 4$, а ННП 4.4 — для всех $n \geq 5$.

В случае (a) ненулевых координат либо 3, и тогда это пример 4.3, либо хотя бы 5. Обратим в нуль две последних: возьмем λ', получаемое из λ сменой знака у двух последних координат, и заменим λ серединой отрезка $\lambda\lambda'$. Потом еще две, и так далее, пока не придем к случаю примера 4.3.

В случае (b) если ненулевых координат всего две, можно получить ННП из примера 4.4 дописыванием нужного количества нулей. Если их четыре, то можно получить ННП из примера 4.5 дописыванием нужного количества нулей. Если ненулевых координат больше, чем четыре, но четное число (напомним, что все они равны ± 1), то обратим в нуль две последних, потом еще раз, и будем повторять это до тех пор, пока их не останется ровно четыре, а затем воспользуемся следствием 1.4.

В случае (c) в зависимости от четности суммы координат λ надо показать, что в $M(\lambda)$ лежит или точка $(2, 0 \dots, 0)$, или точка $(2, 1, 0, \dots, 0)$. Сначала добьемся, чтобы у λ была хотя бы одна нулевая координата: пусть λ' получается сменами знака у двух последних координат одновременно, тогда будем применять сдвиг к второй и предпоследней координатам λ', пока предпоследняя координата не станет нулевой. Далее переставим последние $n-1$ координат λ', чтобы ℓ_n стало равно 0, и применим алгоритм из доказательства леммы 3.5 случая C_n к первым $n-1$ координатам полученной точки λ'. При этом если мы действовали в случае C_n сменами знака, здесь можем подействовать такими же сменами знака, если их нечетное число — поменяем знак еще у нулевой координаты.

4.2. Координаты, большие единицы. В этом разделе предполагаем, что координаты всех весов нецелые и что есть координата, по абсолютной величине не меньшая $3/2$.

Лемма 4.1. *При выполнении условий, сформулированных выше, в $M(\lambda)$ найдется точка вида $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ell'_4, \ell'_5, \dots, \ell'_n\right)$, где ℓ'_i — полуцелые числа, $i = 4, \dots, n$.*

Доказательство. Так как $\lambda = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ доминантен, ℓ_1 входит в число координат с наибольшей абсолютной величиной. Далее преобразуем λ, не следя за доминантностью. Если $\ell_1 > 3/2$, то добьемся, чтобы у λ были отрицательные координаты (например, сменим знак у последних двух) и будем сдвигать ℓ_1 с любыми отрицательными координатами до тех пор, пока ℓ_1 не станет равна $3/2$. Зафиксируем ℓ_1 и проделаем аналогичную процедуру с ℓ_2, добившись, чтобы $\ell_2 = 1/2$. Если в настоящий момент ℓ_3 и ℓ_4 одного знака, то сменим знаки у ℓ_2 и ℓ_4 и будем сдвигать ℓ_3 и ℓ_4 до тех пор, пока хотя бы одно из них не станет равно $\pm 1/2$. Переставляя, если надо, координаты, можно считать, что мы получили точку $(3/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \dots)$. Поменяв, если надо, знаки у пар координат $(2, 4)$ и $(3, 4)$, получим точку требуемого вида. $\square$

Пример 4.6. Для $\lambda = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ell'_4, \ell'_5, \dots, \ell'_n\right)$ рассмотрим ННП

$$v_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ell'_4, \ell'_5, \dots, \ell'_n\right), \quad v_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \ell'_4, \ell'_5, \dots, \ell'_n\right),$$

$$v_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \ell'_4, \ell'_5, \dots, \ell'_n\right), \quad v_4 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ell'_4, \ell'_5, \dots, \ell'_n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ell'_4, \ell'_5, \dots, \ell'_n\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \ell'_4, \ell'_5, \dots, \ell'_n\right)\right).$$

Тогда $v_0 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ell'_4, \ell'_5, \dots, \ell'_n\right) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = v_1 + v_4 - v_3$. Из рассмотрения третьей координаты ясно, что это ННП.

4.3. Координаты, меньшие единицы. Предположим, что координаты старшего веса нецелые и по модулю меньше 1, т. е. $\lambda = (1/2, \dots, 1/2, \pm 1/2) \in \{\pi_{n-1}, \pi_n\}$.

Считаем, что $\lambda = \pi_n$.

Случай 4.3. При $n = 4$ множество $M(\lambda)$ содержится в $M(\pi_4)$ для B_4 (см. случай 2.3). Так как там все подмножества насыщенны, и в этом случае все подмножества насыщенны.

Покажем, что для D_n в случаях $n = 5, 6$ ответ положительный, а при $n \geq 7$ — отрицательный.

Случай 4.4. $\lambda = \pi_5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $n = 5$. После удвоения

$$M'(\lambda) = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1) \mid \text{минусов четное число}\}.$$

Покажем, что $M'(\lambda)$ почти унимодулярно объема 16. Для вычисления определителя произвольных пяти векторов можно прибавить первую строку полученной матрицы ко всем остальным строкам, строки со второй по пятую станут четными, т. е. значение определителя всегда делится на 16. Определитель

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

равен 16, значит, $M'(\lambda)$ почти унимодулярно. Заметим, что длина каждого вектора равна $\sqrt{5}$, поэтому значение определителя, равное объему параллелепипеда, натянутого на эти векторы, не превосходит по модулю $(\sqrt{5})^5 < 64$, следовательно, равно 16, 32 или 48.

Обозначив $m = 16$, получаем, что возможные значения определителей равны $\pm m$, $\pm 2m$ или $\pm 3m$.

Лемма 4.2. *Если для векторов $v_1, \dots, v_5 \in M'(\lambda)$ скалярное произведение (v_1, v_2) равно -3, то $|\det(v_1, \dots, v_5)| < 3m$.*

Доказательство. Длина любого вектора из $M'(\lambda)$ равна $\sqrt{5}$. Пусть S_{12} — площадь параллелограмма, натянутого на векторы v_1 и v_2. Так как $(v_1, v_2) = -3$, то $S_{12} = 4$. Из геометрических соображений $|\det(v_1, \dots, v_5)| \leq S_{12} \cdot (\sqrt{5})^3 < 48 = 3m$. $\square$

Лемма 4.3. *Пусть $v_1, \dots, v_6 \in M'(\lambda)$ и $|\det(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)| = 3m$.*

(i) *С точностью до перестановки строк и одновременной смены знаков в парах столбцов*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Не может быть так, что $|\det(v_1, v_2, v_3, v_4, v_6)| = 3m$.*

Доказательство. (i) Из леммы 4.2 следует, что никакие два вектора не могут отличаться в четырех координатах, значит, любые два вектора отличаются ровно в двух координатах. Без ограничения общности считаем, что $v_1 = (1,1,1,1,1)$, а $v_2 = (-1,-1,1,1,1)$. Тогда три оставшихся вектора таковы, что в них по две -1. Назовем первые две координаты начальными. Чтобы отличаться от v_2 ровно в двух координатах, одна из начальных координат у оставшихся векторов должна быть равна -1. По принципу Дирихле у двух из них (пусть у v_3 и v_4) одна и та же начальная координата равна -1, пусть первая. Тогда у v_5 первая координата тоже равна -1, иначе v_5 не смог бы одновременно отличаться от v_2, v_3 и v_4 в двух координатах. Так как все векторы различны, получаем в точности требуемый набор.

(ii) Будем рассуждать от противного. Из леммы 4.2 следует, что у v_6 две координаты равны (-1). Тогда в пятерке $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_6)$ вектор v_6 не может одновременно отличаться от v_2, v_3 и v_4 в двух координатах: с точностью до симметрии он равен либо $(1,-1,-1,1,1)$, либо $(1,-1,1,1,-1)$. $\square$

Лемма 4.4. *Пусть для векторов $v_1, \dots, v_6 \in M'(\lambda)$ все ненулевые определители по модулю больше m. Тогда все они равны $\pm 2m$.*

Доказательство. От противного, пусть есть определитель, равный $\pm 3m$. Тогда по лемме 4.3 все остальные определители равны $\pm 2m$. Но знакопеременная сумма шести определителей пятерок наших векторов равна $\det(v_1 - v_2, v_1 - v_3, \dots, v_1 - v_6)$, в соответствующей матрице все элементы четны, значит, определитель делится на $32 = 2m$; противоречие, так как $3m \pm 2m \pm \dots \pm 2m$ не делится на $2m$. $\square$

Далее будем рассуждать от противного. Предположим, что существует РННП $\{v_0; v_1, v_2, \dots, v_s\}$. Если ранг d этого множества меньше 5, то добавим $5 - d$ векторов из $M'(\lambda)$ так, чтобы ранг стал 5, и припишем им в $\mathbb{Z}$- и $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-разложениях вектора v_0 нулевые коэффициенты. Далее считаем, что РННП — это $\{v_0; v_1,\ v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_s\}$, причем лишь v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 участвуют в $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-комбинации (возможно, с нулевыми коэффициентами). В этом ННП можно посчитать все определители вида $\det(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_5, v_s)$, где выкинут один из первых пяти векторов и добавлен один новый вектор. Случай (a) — среди них есть равный ± 16, случай (b) — все ненулевые определители по абсолютной величине больше 16.

В случае (b) по лемме 4.4 имеем $s-5$ унимодулярных шестиэлементных подмножеств $\{v_1, \dots, v_5, v_j\}$, $6 \leq j \leq s$, с $m' = 2m$. В каждом из них v_j выражается через $v_1, \dots, v_5$ с целыми коэффициентами, значит, определитель произвольной подпятерки в множестве $\{v_1, \dots, v_s\}$ кратен $2m$, т. е. равен $\pm 2m$. Поэтому по теореме 2 данное РННП сверхнасыщенное.

Случай (a) требует более тщательного разбора. По лемме 1.11 определитель, равный $\pm m$, не совпадает с $\det(v_1, v_2, \dots, v_5)$. Можно считать, что

$\det(v_1,\dots,v_4,v_6)=16$ (если данный определитель равен -16, то переставим первые два вектора, и определитель изменит знак). Согласно предположению $\det(v_1,\dots,v_5)$ равен $\pm 2m$ или $\pm 3m$.

Лемма 4.5. *В $M'(\lambda)$ нет таких наборов векторов $w_1,\dots,w_6$, для которых $\det(w_1,\dots,w_5)=\pm 2m$, $\det(w_5,w_2,w_3,w_4,w_6)=\pm 2m$, причем они разных знаков, и $\det(w_1,\dots,w_4,w_6)=\pm m$.*

Доказательство. Прямая проверка с помощью Maple 7. □

Лемма 4.6. *В $M'(\lambda)$ нет таких наборов векторов $w_1,\dots,w_6$, что*

$$\det(w_1,\dots,w_5)=-2m \text{ и } \det(w_1,\dots,w_4,w_6)=-3m.$$

Доказательство. По лемме 4.3 считаем, что $w_6=(1,1,1,1,1)$, а

$$\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Гиперплоскость $\langle w_1,w_2,w_3,w_4\rangle$ задается уравнением $2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$. Так как $\det(w_1,\dots,w_5)<0$ и $\det(w_1,\dots,w_6)<0$, то w_5 лежит в том же полупространстве относительно данной гиперплоскости, что и w_6. Получаем, что у w_5 в точности две координаты равны -1. Без ограничения общности $w_5=(1,-1,-1,1,1)$, но соответствующий определитель равен $-16=-m$; противоречие. □

Вернемся к имеющемуся РННП. Проанализируем следующие разложения по базису: для v_0 по $v_1,\dots,v_5$ и по $v_1,\dots,v_4,v_6$, а также для v_5 по $v_1,\dots,v_4,v_6$. Пусть $v_0=q_1v_1+\dots+q_5v_5$ — исходная $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-комбинация, а $v_0=z_1v_1+\dots+z_4v_4+z_6v_6$ — исходная $\mathbb{Z}$-комбинация, $v_5=y_1v_1+\dots+y_4v_4+y_6v_6$, $y_i\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3\}$ — формулы разложения по базису. Тогда так как $v_6=-\frac{y_1}{y_6}v_1-\dots-\frac{y_4}{y_6}v_4+\frac{1}{y_6}v_5$, имеем

$$v_0=z_1v_1+z_2v_2+z_3v_3+z_4v_4+z_6\left(-\frac{y_1}{y_6}v_1-\dots-\frac{y_4}{y_6}v_4+\frac{1}{y_6}v_5\right),$$

из единственности разложения по базису

$$q_1=z_1-z_6\frac{y_1}{y_6},\dots,q_4=z_4-z_6\frac{y_4}{y_6},\ q_5=z_6\frac{1}{y_6},\ \text{все } q_i \text{ принадлежат } [0,1).$$

Если $|y_6|=3$, т. е. $|\det(v_1,v_2,\dots,v_5)|=3m$, то по лемме 4.3

$$\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Линейная комбинация этих векторов с $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-коэффициентами $q_1,\dots,q_5$ должна лежать в удвоенной решетке весов, т. е. все ее координаты должны быть одинаковой четности. Вычитая из второй координаты третью, получаем, что $2(q_2-q_3)$ четно, откуда $q_2=q_3$ и аналогично $q_2=q_3=q_4=q_5$. У вектора v_0 первая координата будет равна q_1-4q_2, а координаты со второй по пятую q_1+2q_2. Так как эти числа тоже должны быть одинаковой четности, то $q_2\in\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$. Так как эти числа целые и не равны нулю одновременно, то $q_1=q_2\in\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$. Отсюда вектор v_0 равен либо $(-1,1,1,1,1)$, либо его удвоенному.

Лемма 4.7. *Пусть векторы* $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ *из леммы* 4.3, *а* $v_6 \in M'(\lambda) \setminus \{v_1, \dots, v_5\}$. *Тогда вектор* $(-1, 1, 1, 1, 1)$ *представим как* $\mathbb{Z}_{\geq 0}$*-комбинация векторов* v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6.

Доказательство. С точностью до перестановки индексов будет добавляться или вектор $(1, 1, 1, -1, -1)$, или $(1, -1, -1, -1, -1)$, или $(-1, -1, -1, -1, 1)$. Разберем эти случаи отдельно.

(a) Добавлен $(1, 1, 1, -1, -1)$. Тогда

$$(-1, 1, 1, 1, 1) = (1, 1, 1, -1, -1) + (-1, -1, 1, 1, 1) + (-1, 1, -1, 1, 1).$$

(b) Добавлен $(1, -1, -1, -1, -1)$. Тогда

$$\begin{aligned}(-1, 1, 1, 1, 1) = 2(1, -1, -1, -1, -1) + (1, 1, 1, 1, 1) + (-1, -1, 1, 1, 1) \\ + (-1, 1, -1, 1, 1) + (-1, 1, 1, -1, 1) + (-1, 1, 1, 1, -1).\end{aligned}$$

(c) Добавлен $(-1, -1, -1, -1, 1)$. Тогда

$$(-1, 1, 1, 1, 1) = (-1, -1, -1, -1, 1) + (1, 1, 1, 1, 1) + (-1, 1, 1, 1, -1). \quad \square$$

Остается случай $|y_6| = 2$. Здесь все q_i принадлежат $\{0, \frac{1}{2}\}$.

Если z_6 четно, то $q_1 = z_1 - z_6 \frac{y_1}{y_6} = z_1 - y_1 \frac{z_6}{y_6}$ целое из интервала $[0, 1)$, т. е. равно 0. Аналогично все остальные q_i, $i = 2, \dots, 5$, равны 0, значит, $v_0 = 0$; противоречие.

Если z_6 нечетно, то будем искать $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-комбинацию для проверки насыщенности следующего вида: $v_0 = v_6 + n_1 v_1 + n_2 v_2 + \dots + n_5 v_5$, $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Чтобы доказать ее существование, покажем, что в разложениях по $v_1, \dots, v_5$ все координаты векторов v_0 и v_6 отличаются на целые числа и что координаты вектора v_6 строго меньше 1. Из этого будет следовать, что они не превосходят соответствующие координаты вектора v_0, так как координаты вектора v_0 равны q_i и лежат в интервале $[0, 1)$.

Исходя из имеющихся формул, случаи $i = 1, 2, 3, 4$ и $i = 5$ надо разбирать по-разному. Так как случаи $i = 1, 2, 3, 4$ равноправны, разберем только случаи $i = 1$ и $i = 5$. Так как $\frac{z_6 - 1}{y_6}$ целое, то

$$q_1 - \left(-\frac{y_1}{y_6}\right) = z_1 - z_6 \frac{y_1}{y_6} + \frac{y_1}{y_6} = z_1 + \frac{(1 - z_6) y_1}{y_6}$$

целое, аналогично $q_5 - \frac{1}{y_6} = \frac{z_6 - 1}{y_6}$ целое, т. е. все разности соответствующих координат целые. Также $y_1 = \det(v_5, v_2, v_3, v_4, v_6)/m$, а $y_6 = \det(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)/m$, т. е. $|y_1| \in \{0, 1, 2, 3\}$, а $|y_6| = 2$. Из лемм 4.3, 4.5 и 4.6 следует, что $-\frac{y_1}{y_6}$ не равно 1 и не равно $\frac{3}{2}$. В остальных случаях неравенство $-\frac{y_i}{y_6} < 1$, $1 \leq i \leq 4$, выполняется. Также ясно, что $\frac{1}{y_6} < 1$. Поэтому добавлением каких-то v_i, $1 \leq i \leq 5$, из v_6 можно получить v_0, и рассматриваемое подмножество не является РННП. Следовательно, $M'(\lambda)$ сверхнасыщенно.

Случай 4.5. $\lambda = \pi_6 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $n = 6$. После удвоения

$$M'(\lambda) = 2M(\lambda) = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1) \mid \text{минусов четное число}\}.$$

Лемма 4.8. *Множество* $M'(\lambda)$ *почти унимодулярно объема* 64. *Значения объемов равны* ± 64 *и* ± 128, *т. е.* $\pm m$ *и* $\pm 2m$.

Доказательство. Рассмотрим подмножество $\{v_1, v_2, \dots, v_6\} \subseteq M'(\lambda)$. Без ограничения общности $v_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Прибавим к остальным векторам v_1 и запишем полученные 6 векторов в матрицу по строкам. Строки со второй по шестую четные, следовательно, определитель делится на 32, а после деления на 2 строк со второй по шестую в каждой останется четное число единиц. Заменим первый столбец матрицы суммой всех столбцов, новый первый столбец четный, значит, определитель исходной матрицы делится на 64.

Оценим его сверху. Разобьем векторы на три пары, тогда объем параллелепипеда не превосходит произведения площадей этих трех параллелограммов. Длина любого вектора из $M'(\lambda)$ равна $\sqrt{6}$, скалярное произведение любых двух векторов по модулю равно 2, поэтому площадь каждого такого параллелограмма равна $6^{2/2}\sqrt{1-(1/3)^2} = 2^{5/2}$, значит, объем не больше $2^{15/2} < 192$, т. е. по модулю равен 64 или 128. $\square$

Пусть в $M'(\lambda)$ есть РННП $\{v_0; v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, \dots\}$. Рассмотрим $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-комбинацию, соответствующую вектору v_0. По лемме 1.11 определитель системы ее векторов по абсолютной величине равен 128, а по лемме 1.77 коэффициенты этой $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-комбинации равны 0 или $\frac{1}{2}$.

Для удобства до конца этого доказательства будем считать, что множество $M'(\lambda)$ состоит из тех точек $(\pm1, \pm1, \pm1, \pm1, \pm1, \pm1)$, в которых нечетное число -1.

Лемма 4.9. *Если* $\det(v_1, \dots, v_6) = 128$, *то действием* W *можно перевести одно из* (*неупорядоченных*) *множеств* $(\pm v_1, \pm v_2, \dots, \pm v_6)$ *в набор строк*

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В $M'(\lambda)$ для каждого вектора v есть также вектор $-v$. Поэтому для подсчета определителей из 32 векторов оставим те 16, у которых либо одна -1, либо три, но на первом месте 1. Без ограничения общности минор порядка 6 содержит векторы w_1 и w_2. Непосредственная проверка с помощью программы Maple 7 показывает, что из всевозможных миноров порядка 6 подходят только два, один из которых — $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$, а второй действием W переводится в $(-w_2, -w_1, w_3, w_4, w_5, w_6)$, что тоже подходит. $\square$

Для любой пары вида $(\pm w_i, \pm w_j)$ группа W содержит элемент, их переставляющий, поэтому можно применить лемму 1.15.

При $n \geq 7$ построим ННП. Домножим все координаты на 2, после этого все координаты исходных векторов станут равны ±1.

Пример 4.7. Рассмотрим векторы

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $v_0 = (2,0,0,0,0,0,0) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = v_5 + v_6 + v_7 - v_1$. Из рассмотрения первой координаты ясно, что если v_0 является $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-комбинацией векторов v_i, $1 \le i \le 7$, то это сумма ровно двух из них. Но никакие два из них в сумме не равны v_0. Значит, это ННП.

Построенное ННП легко модифицируется для больших n. Достаточно к каждому вектору вместо недостающих координат дописать $n-7$ раз число 1. Для больших n это также будут векторы из $M(\lambda)$ для $\lambda = \pi_n$. Так как 1 в то же время является первой координатой у всех v_i, у всевозможных комбинаций v_i на добавленных местах будет стоять то же, что и на месте первой координаты.

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kostant B.* Lie group representations on polynomial rings // Amer. J. Math. 1963. V. 85, N 3. P. 327–404.
2. *Kraft H., Procesi C.* Closures of conjugacy classes of matrices are normal // Invent. Math. 1979. V. 53, N 3. P. 227–247.
3. *Donkin S.* The normality of closures of conjugacy classes of matrices // Invent. Math. 1990. V. 101, N 3. P. 717–736.
4. *Kraft H., Procesi C.* On the geometry of conjugacy classes in classical groups // Comment. Math. Helvetici. 1982. V. 57, N 4. P. 539–602.
5. *Sommers E.* Normality of very even nilpotent varieties in D_{2l} // Bull. London Math. Soc. 2005. V. 37, N 3. P. 351–360.
6. *Broer A.* Normal nilpotent varieties in F_4 // J. Algebra. 1998. V. 207, N 2. P. 427–448.
7. *Kraft H.* Closures of conjugacy classes in G_2 // J. Algebra. 1989. V. 126, N 2. P. 454–465.
8. *Sommers E.* Normality of nilpotent varieties in E_6 // J. Algebra. 2003. V. 270, N 1. P. 288–306.
9. *Fulton W.* Introduction to toric varieties. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
10. *Morand J.* Closures of torus orbits in adjoint representations of semisimple groups // C. R. Acad. Sci Paris Sér. I Math. 1999. V. 320, N 3. P. 197–202.
11. *Sturmfels B.* Equations defining toric varieties // Proc. Sympos. Pure Math. 1997. V. 62, N 2. P. 437–449.
12. *Sturmfels B.* Gröbner band convex polytopes. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (Univ. Lect. Ser.; N 8).
13. *Kuyumzhiyan K.* Simple $SL(n)$-modules with normal closures of maximal torus orbits // J. Alg. Comb. 2009. V. 30, N 4. P. 515–538.
14. *Богданов И. И., Куюмжиян К. Г.* Простые модули исключительных групп с нормальными замыканиями орбит максимального тора // Мат. заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 483–496.
15. *Винберг Э. Б., Онищик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
16. *Kempf G., Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B.* Toroidal embeddings. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1973. V. I. (Lect. Notes Math.; V. 339).
17. *Humphreys J. E.* Introduction to Lie algebras and representation theory. New York: Springer-Verl., 1978. (Grad. Texts Math.; V. 9).
18. *Fulton W., Harris J.* Representation theory: a first course. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1991. (Grad. Texts Math.; V. 129).

Статья поступила 21 июля 2011 г.

Куюмжиян Каринэ Георгиевна
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений,
ул. Вавилова, 7, Москва 117312;
Независимый московский университет и Лаборатория Понселе,
Б. Власьевский пер., 11, Москва 119002
karina@mccme.ru