Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 514.752.44+514.772

К ТЕОРИИ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА

А. Н. Кондрашов

Аннотация. Объектом исследования работы является уравнение

$$A(z)f_z(z) + B(z)f_{\bar z}(z) = 0.$$

Изучаются взаимосвязи между решениями этого уравнения и решениями подходящего классического уравнения Бельтрами.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение Бельтрами, уравнение Бельтрами переменного типа, складки.

§ 1. Введение

Пусть в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ задано дифференциальное уравнение

$$A(z)f_z(z) + B(z)f_{\bar z}(z) = 0 \quad (z = x_1 + ix_2 \in D), \tag{1}$$

где $A(z)$, $B(z)$ ($|A(z)| \neq |B(z)|$ п. в. в D) — конечные измеримые комплекснозначные функции. В случае $A = \mu, B = -1$ уравнением (1) является уравнение Бельтрами (см. [1, гл. 2])

$$f_{\bar z}(z) = \mu(z)f_z(z), \tag{2}$$

имеющее при условии

$$\operatorname*{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1 \text{ во всякой подобласти } D' \Subset D$$

гомеоморфное решение $w = f(z)$, принадлежащее классу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ вместе с обратным. Это решение единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением.

В дальнейшем *решением* уравнения (1) будем называть непрерывную функцию $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, удовлетворяющую ему п. в. в D.

Напомним [2, с. 7], что коэффициент $\mu(z) = f_{\bar z}(z)/f_z(z)$ называется *комплексной дилатацией* отображения $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$. Его задание эквивалентно заданию п. в. в D поля распределения характеристик Лаврентьева $(p(z), \theta(z))$ (см. [3]). Отображение $w = f(z)$, первая характеристика которого п. в. в D удовлетворяет условию

$$p(z) \leq Q \equiv \text{const}, \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 11–01–97021–р_поволжье_а и гранта ФМИТ ВолГУ.

называется *Q-квазиконформным.* Если условие (3) выполняется в D локально (т. е. со своим $Q = Q(D')$ для всякой области $D' \Subset D$), то отображение называется *локально квазиконформным.* Условие $\operatorname*{ess\,sup}_D |\mu(z)| < 1$ ($\operatorname*{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1$ для всякой области $D' \Subset D$) эквивалентно условию квазиконформности (локальной квазиконформности).

Уравнение Бельтрами с $|\mu(z)| < 1$ п. в. в D будем в дальнейшем называть *классическим.* Случаи $|\mu(z)| < 1$ п. в. в D и $|\mu(z)| > 1$ п. в. в D отличаются тем, что в первом случае гомеоморфные отображения не меняют ориентацию, а во втором меняют. Различие здесь лишь формальное. Интерес представляет ситуация, когда одновременно существуют подобласти D, в которых п. в. выполнено $|\mu(z)| < 1$, и подобласти D, в которых п. в. $|\mu(z)| > 1$. В этом случае говорят, что уравнение Бельтрами имеет *переменный* тип. Его решения описывают отображения со складками, сборками и т. п. Задача исследования таких уравнений была поставлена Л. И. Волковыским [4], а ряд успехов в этом направлении был сделан в [5, 6]. Следует отметить, что уравнение (1) впервые рассматривалось в [5].

Пусть $E \subset D$ — замкнутое относительно D множество с мерой $\operatorname{mes}_2 E{=}0$. Если непрерывная в D функция $f(z)$ является решением уравнения (1) в $D \setminus E$, то функцию $f(z)$ будем называть *решением с особенностью E* данного уравнения[1)].

Наличие особенностей у решений характерно для уравнений (1), вырождающихся на некотором множестве E, т. е. таком E, что

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B_r(z)\cap D} ||A(z)| - |B(z)|| = 0$$

для всякого $r > 0$, где $B_r(z)$ — круг с центром $z \in E$. При этом в качестве E часто выступает множество смены типа уравнения (1), т. е. множество раздела между $\{z : z \in D, |A(z)| < |B(z)|\}$ и $\{z : z \in D, |A(z)| > |B(z)|\}$.

Пример 1. Функция $\mathcal{B}(z) = x_1 + i|x_2| \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ есть решение уравнения (1) с коэффициентами

$$A(z) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Im} z > 0, \\ 1, & \operatorname{Im} z \le 0, \end{cases} \qquad B(z) = \begin{cases} 1, & \operatorname{Im} z > 0, \\ 0, & \operatorname{Im} z \le 0. \end{cases}$$

Уравнение невырожденное. Функцию $\mathcal{B}(z)$, следуя Ю. Ю. Трохимчуку [7, гл. 3, § 3], будем в дальнейшем называть *функцией Бора.*

Пример 2. Функция $f(z) = x_1 + (ix_2^2)/2 \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ есть решение уравнения

$$(x_2 - 1)f_z + (x_2 + 1)f_{\bar z}(z) = 0.$$

Уравнение вырожденное на прямой $E = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Пример 3. Функция $f(z) = x_1 + 2i\sqrt{|x_2|} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ есть решение с особенностью $E = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ уравнения

$$(\operatorname{sgn} x_2 - \sqrt{|x_2|})f_z + (\operatorname{sgn} x_2 + \sqrt{|x_2|})f_{\bar z}(z) = 0.$$

Уравнение вырожденное на прямой $E = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

[1)] При этом неизвестна принадлежность $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$.

§ 2. Ассоциированное уравнение

Уравнению (1) будем ставить в соответствие классическое уравнение Бельтрами с комплексной дилатацией

$$\mu^*(z) = \begin{cases} -A(z)/B(z) & \text{при } |A(z)| \le |B(z)|, \\ -\overline{B(z)}/\overline{A(z)} & \text{при } |A(z)| > |B(z)|. \end{cases} \tag{4}$$

Это уравнение называем в дальнейшем *уравнением, ассоциированным с уравнением* (1).

Отметим, что для уравнения Бельтрами (2)

$$\mu^*(z) = \begin{cases} \mu(z) & \text{при } |\mu(z)| \le 1, \\ 1/\overline{\mu(z)} & \text{при } |\mu(z)| > 1 \end{cases}$$

и, значит, в классическом случае $\mu(z) = \mu^*(z)$.

Главные цели настоящей работы состоят в изучении свойств решений ассоциированного уравнения и выявлении взаимосвязей между ними и решениями первоначального уравнения (1). Важность такой связи была впервые отмечена в [8].

Пусть имеется функция $f(z) : D \to \mathbb{R}$. Если существует функция $K(z) \in W^{1,2}(D)$ такая, что

$$f(z) \le K(z),$$

то функция $f(z)$ называется $W^{1,2}$-*мажорируемой* в D. Если $f(z)$ является $W^{1,2}$-*мажорируемой* во всякой подобласти $D' \Subset D$, то говорят, что $f(z)$ является *локально* $W^{1,2}$-*мажорируемой* в D. Для краткости вместо «локально $W^{1,2}$-мажорируема» всюду ниже будем писать «$W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируема».

Если функция f абсолютно непрерывна внутри почти всех сечений (т. е. на произвольных отрезках, лежащих в упомянутых сечениях) области D прямыми параллельными осям координат, то будем говорить, что f *принадлежит классу* ACL в D, кратко записывая это в виде «$f \in ACL$ в D». В дальнейшем связь между функциями классов Соболева и функциями класса ACL предполагается известной (см., например, [9, с. 14]).

Отправной точкой настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что измеримые функции $A(z)$, $B(z)$ ($|A(z)| + |B(z)| > 0$) таковы, что функция*[2)]

$$P_{(A,B)}(z) = \frac{|A(z)| + |B(z)|}{||A(z)| - |B(z)||}$$

$W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-*мажорируема в* D.

Тогда существует гомеоморфное решение $w = f(z) : D \to f(D) \subset \mathbb{C}$ уравнения, ассоциированного с (1), причем $f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D))$. Решение единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением, т. е. любое гомеоморфное решение $f_1(z)$ этого уравнения имеет вид

$$f_1(z) = \varphi(f(z)),$$

где φ — некоторое конформное отображение $f(D)$ на $f_1(D)$.

Данное утверждение есть специальная формулировка теоремы существования и единственности решения уравнения Бельтрами для классического случая (см. [10, теорема 1] или [11, теорема 1.3]).

---

2) В случае уравнения (2) будем писать $P_\mu(z)$ вместо $P_{(\mu,-1)}(z)$.

§ 3. О существовании и единственности гомеоморфных решений с особенностью

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и $v = T(z) : D \to T(D) \subset \mathbb{C}$ — некоторый гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию. Определим в D функцию

$$\mathrm{Q}_T(z) = \varlimsup_{r\to 0} \frac{\max\limits_{|z'-z|=r} |T(z') - T(z)|}{\min\limits_{|z'-z|=r} |T(z') - T(z)|}.$$

Известно [2, гл. 1, § 4], что если $\mathrm{Q}_T(z) < +\infty$ всюду в D и $\mathrm{Q}_T(z) \leq Q$ ($Q \geq 1$ — константа) п. в. в D, то отображение $T(z)$ Q-квазиконформно в области D и, как следствие, дифференцируемо п. в. в D, имеет п. в. в D комплексную дилатацию $\mu_0(z) = T_{\bar z}(z)/T_z(z)$, первую характеристику Лаврентьева $p_T(z)$, якобиан $I(z) = \frac{\partial(v_1,v_2)}{\partial(x_1,x_2)} > 0$ и в точках дифференцируемости $p_T(z) = \mathrm{Q}_T(z) = P_{\mu_0}(z)$.

В нашем случае будет допускаться возможность вырождения $T(z)$ (обращение $Q_T(z)$ в $+\infty$), но при этом будут налагаться следующие ограничения:

(A1) множество вырождения отображения $T(z)$:

$$E = \{z : z \in D, \sup_{z'\in B_r(z)\cap D} \mathrm{Q}_T(z') = +\infty \quad \text{для всякого круга} \quad B_r(z)\},$$

имеет меру $\operatorname{mes}_2 E = 0$;

(A2) для отображения $T(z)$ выполняется N-свойство [12, гл. 5, п. 1.1]: всякое множество $E_0 \subset D$ меры $\operatorname{mes}_2 E_0 = 0$ переходит в множество $T(E_0) \subset T(D)$ меры $\operatorname{mes}_2 T(E_0) = 0$.

Нетрудно видеть, что условие (A1) гарантирует замкнутость множества E относительно D и локальную квазиконформность отображения $T(z)$ в $D \setminus E$. В силу квазиконформности отображение $T(z)$ дифференцируемо п. в. в $D \setminus E$, а следовательно, и в D. При этом у него п. в. определена комплексная характеристика $\mu_0(z)$, первая характеристика Лаврентьева $p(z) = P_{\mu_0}(z) = \mathrm{Q}_T(z)$ и якобиан $I(z)$. Кроме того, при вышеуказанных условиях (A1), (A2) справедлива формула замены переменной в интеграле [12, гл. 5, теорема 1.8]: для любой подобласти $D' \Subset D$ и любой суммируемой функции $f(v)$, заданной в $T(D')$, имеет место равенство

$$\iint\limits_{T(D')} f(v)\, dv_1 dv_2 = \iint\limits_{D'} f(T(z)) I(z)\, dx_1 dx_2.$$

По данному отображению $T(z)$ определим класс функций $T^* W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ как множество функций вида $f(z) = \varphi(T(z))$, где $\varphi \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(T(D))$.

Заметим, что в случае $E = \varnothing$ отображение $T(z)$ локально квазиконформно в D и, следовательно, $T(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$. Поэтому в силу инвариантности классов $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ при квазиконформных отображениях (см., например, [12, гл. 5, теорема 4.2]) заключаем, что $T^* W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D) = W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$. Следовательно, при $E \neq \varnothing$ если $f(z) \in T^* W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, то $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D \setminus E)$.

Ключевым результатом работы является

Теорема 2. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область; $v = T(z) : D \to T(D) \subset \mathbb{C}$ — гомеоморфное отображение со свойствами* (A1), (A2), *имеющее комплексную характеристику $\mu_0(z)$; коэффициенты $A(z), B(z)$ уравнения* (1) *удовлетворяют условию*

$$|A(z)| + |B(z)| = 1. \tag{5}$$

Предположим, что для всякой подобласти $D' \Subset D$ можно указать функцию $K(z) \in W^{1,2}(D')$ такую, что

$$\iint\limits_{D'} P_{\mu_0}(z)|\nabla K(z)|^2\, dx_1 dx_2 < +\infty,$$

$$\frac{|A(z) + B(z)\mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)||A(z)| - |B(z)||} \le K(z) \quad \text{п. в. в } D', \tag{6}$$

$$K(T^{-1}(v)) \in ACL \text{ в } T(D').$$

Тогда существует $w = f(z) : D \to f(D) \subset \mathbb{C}$ — гомеоморфное решение с особенностью E уравнения, ассоциированного с (1). *При этом $f(z) \in T^* W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, $f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D \setminus E))$ и в представлении $f(z) = \varphi(T(z))$ отображение φ имеет $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемую первую характеристику.*

В классе $T^* W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ данное гомеоморфное решение с особенностью E единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением.

Замечание 1. В этой теореме, а также всюду далее утверждается, что гомеоморфное решение $f(z)$ с особенностью E единственно в классе $T^* W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ с точностью до суперпозиции с конформным отображением, если любое гомеоморфное решение с особенностью E из этого класса имеет вид

$$f_1(z) = \psi(f(z)),$$

где ψ — некоторое конформное отображение $f(D)$ на $f_1(D)$.

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 1. *При выполнении условий теоремы* 2 *для всякой области $D' \Subset D$ функцию $K(z) \in W^{1,2}(D')$ можно выбрать так, что $K(T^{-1}(v)) \in W^{1,2}(T(D'))$.*

Доказательство. Зафиксируем $D' \Subset D$. Не ограничивая общности, считаем границу $\partial T(D')$ C^1-гладкой. Возьмем $K(z) \in W^{1,2}(D')$, удовлетворяющую условиям теоремы. Тогда для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\iint\limits_{T(D')} |\nabla_v K|^2\, dv_1 dv_2 < +\infty, \tag{7}$$

где $\nabla_v K = (K_{v_1}(T^{-1}(v)), K_{v_2}(T^{-1}(v)))$.

Поскольку $T(z)$ локально квазиконформно в $D \setminus E$, то п. в. в D

$$\begin{pmatrix} x_{1v_1} & x_{1v_2} \\ x_{2v_1} & x_{2v_2} \end{pmatrix} \circ T(z) = \begin{pmatrix} v_{1x_1} & v_{1x_2} \\ v_{2x_1} & v_{2x_2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{I(z)} \begin{pmatrix} v_{2x_2} & -v_{1x_2} \\ -v_{2x_1} & v_{1x_1} \end{pmatrix}$$

и из формул дифференцирования сложной функции (см. [12, гл. 5, теорема 4.6]) п. в. в D получаем

$$K_{v_1}(T^{-1}(v)) = \frac{1}{I(z)}(K_{x_1} v_{2x_2} - K_{x_2} v_{2x_1}),$$

$$K_{v_2}(T^{-1}(v)) = \frac{1}{I(z)}(-K_{x_1}v_{1x_2} + K_{x_2}v_{1x_2}).$$

Тогда п. в. в D'

$$|\nabla_v K|^2 = (K_{v_1}(T^{-1}(v)))^2 + (K_{v_2}(T^{-1}(v)))^2$$
$$= \frac{(v_{1x_2})^2 + (v_{2x_2})^2}{I^2(z)}K_{x_1}^2 - 2\frac{v_{1x_1}v_{1x_2} + v_{2x_1}v_{2x_2}}{I^2(z)}K_{x_1}K_{x_2} + \frac{(v_{1x_1})^2 + (v_{2x_1})^2}{I^2(z)}K_{x_2}^2$$

и в силу известного неравенства для положительно определенных квадратичных форм

$$\sum_{s,j=1}^{2} a_{sj}\xi_s\xi_j \le (a_{11} + a_{22})\big(\xi_1^2 + \xi_2^2\big) \quad (a_{sj} = a_{js})$$

получаем

$$|\nabla_v K|^2 \le \frac{|\nabla v_1|^2 + |\nabla v_2|^2}{I^2(z)}|\nabla K|^2.$$

Пользуясь соотношениями

$$|\nabla v_1|^2 + |\nabla v_2|^2 = (|v_z|^2 + |v_{\bar z}|^2)/2, \quad I(z) = |v_z|^2 - |v_{\bar z}|^2,$$
$$P_{\mu_0}(z) = \frac{|v_z| + |v_{\bar z}|}{|v_z| - |v_{\bar z}|} \ge \frac{|v_z|^2 + |v_{\bar z}|^2}{|v_z|^2 - |v_{\bar z}|^2},$$

из этой оценки находим

$$|\nabla_v K|^2 \le \frac{1}{2}\frac{P_{\mu_0}(z)}{I(z)}|\nabla K|^2.$$

Отсюда получаем неравенство (7). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. В уравнении (1) сделаем замену переменной $z = T^{-1}(v)$, полагая $\omega(v) = f(T^{-1}(v))$. Используя тождества $\bar v_{\bar z} = \overline{v_z}$, $\bar v_z = \overline{v_{\bar z}}$, из (1) получим

$$\widetilde{A}(v)\omega_v + \widetilde{B}(v)\omega_{\bar v} = 0, \tag{8}$$

где

$$\widetilde{A}(v) = (A(z) + B(z)\mu_0(z))v_z(z)\big|_{z=T^{-1}(v)}, \tag{9}$$
$$\widetilde{B}(v) = (A(z)\overline{\mu_0(z)} + B(z))\overline{v_z(z)}\big|_{z=T^{-1}(v)}. \tag{10}$$

Из (9), (10) с учетом условия (A2) видим (см. [12, гл. 5, п. 1.1]), что $\widetilde{A}(v)$, $\widetilde{B}(v)$ — измеримые функции в $T(D)$. Пользуясь (5) и $|\mu_0(z)| \le 1$, имеем цепочку оценок

$$P_{(\widetilde{A},\widetilde{B})}(v) = \frac{|\widetilde{A}(v)| + |\widetilde{B}(v)|}{||\widetilde{A}(v)| - |\widetilde{B}(v)||}$$
$$\le \frac{|\widetilde{A}(v)|^2 + |\widetilde{B}(v)|^2}{||\widetilde{A}(v)|^2 - |\widetilde{B}(v)|^2|} = \frac{|(A + B\mu_0)v_z|^2 + |(A\overline{\mu_0} + B)\overline{v_z}|^2}{||(A + B\mu_0)v_z|^2 - |(A\overline{\mu_0} + B)\overline{v_z}|^2|}$$
$$= \frac{|A + B\mu_0|^2 + |A\overline{\mu_0} + B|^2}{||A + B\mu_0|^2 - |A\overline{\mu_0} + B|^2|} = \frac{2|A + B\mu_0|^2 + |A\overline{\mu_0} + B|^2 - |A + B\mu_0|^2}{||A + B\mu_0|^2 - |A\overline{\mu_0} + B|^2|}$$
$$= \pm 1 + \frac{2|A + B\mu_0|^2}{||A + B\mu_0|^2 - |A\overline{\mu_0} + B|^2|} = \pm 1 + \frac{2|A + B\mu_0|^2}{|(1 - |\mu_0|^2)(|A|^2 - |B|^2)|}$$
$$\le 1 + \frac{2|A + B\mu_0|^2}{(1 - |\mu_0|)||A| - |B||} \le 1 + 2K(z) = 1 + 2K(T^{-1}(v)).$$

По лемме 1 функция $P_{(\widetilde{A},\widetilde{B})}(v)$ является $W^{1,2}_{\rm loc}$-мажорируемой в $T(D)$. По теореме 1 существует единственное с точностью до суперпозиции с конформным отображением гомеоморфное решение $\omega = \varphi(v) \in W^{1,2}_{\rm loc}(T(D))$ уравнения, ассоциированного с уравнением (8). Полагая $f(z) = \varphi(T(z))$, получаем гомеоморфное решение с особенностью E класса $T^*W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ уравнения, ассоциированного с (1). Ввиду отмеченной выше единственности φ это решение с особенностью E единственно в классе $T^*W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ с точностью до суперпозиции с конформным отображением.

Зафиксируем произвольно подобласть $D' \Subset D \setminus E$. В данной области отображение $T(z)$ квазиконформно. Обозначим $q(D') = \operatorname*{ess\,sup}_{D'} |\mu_0(z)| < 1$.

Пусть $K_1(z) \geq 1/2$ — функция класса $W^{1,2}(D')$ такая, что

$$\frac{|A(z) + B(z)\mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)||A(z)| - |B(z)||} \leq K_1(z) \tag{11}$$

п. в. в области D'. Из (11) вытекает оценка

$$\frac{|\mu^*(z) - \mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu^*(z)|)(1 - |\mu_0(z)|)} \leq 2K_1(z), \tag{12}$$

где $\mu^*(z)$ — коэффициент (4) уравнения, ассоциированного с уравнением (1). Действительно, с учетом (5) при $|B(z)| < |A(z)|$ имеем $|A(z)| \geq 1/2$, откуда получаем

$$\frac{|A(z) + B(z)\mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)||A(z)| - |B(z)||} = \frac{|A(z)||1 - \overline{\mu^*(z)}\mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)(1 - |\mu^*(z)|)} \geq \frac{1}{2}\frac{|\mu^*(z) - \mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)(1 - |\mu^*(z)|)}$$

и, значит, (12). При $|B(z)| > |A(z)|$, снова учитывая (5), имеем $|B(z)| \geq 1/2$ и

$$\frac{|A(z) + B(z)\mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)||A(z)| - |B(z)||} = \frac{|B(z)||\mu^*(z) - \mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)(1 - |\mu^*(z)|)} \geq \frac{1}{2}\frac{|\mu^*(z) - \mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)(1 - |\mu^*(z)|)},$$

откуда также следует (12).

Из (12) п. в. в D' получаем

$$\frac{(|\mu^*(z)| - |\mu_0(z)|)^2}{1 - |\mu^*(z)|} \leq 2K_1(z) \iff |\mu^*(z)|^2 + 2(K_1(z) - |\mu_0(z)|)|\mu^*(z)| + |\mu_0(z)|^2 - 2K_1(z) \leq 0. \tag{13}$$

Зафиксируем z так, чтобы выполнялось $|\mu_0(z)| \leq q(D')$, тогда корни трехчлена

$$y(t) = t^2 + 2(K_1(z) - |\mu_0(z)|)t + |\mu_0(z)|^2 - 2K_1(z)$$

равны $t_\pm = |\mu_0(z)| - K_1(z) \pm \sqrt{K_1^2(z) + 2(1 - |\mu_0(z)|)K_1(z)}$. При этом $y(0) = |\mu_0(z)|^2 - 2K_1(z) < 0$ и, значит, $t_- < 0$, $t_+ > 0$.

Заметим, что $t_+ < 1$, поскольку

$$|\mu_0(z)| - K_1(z) + \sqrt{K_1^2(z) + 2(1 - |\mu_0(z)|)K_1(z)} < 1 \iff 0 < (1 - |\mu_0(z)|)^2.$$

В силу (13) имеем $|\mu^*(z)| \le t_+$. Так как на промежутке $[0,1)$ функция

$$y_1(t) = \frac{1+t}{1-t} = \frac{2}{1-t} - 1$$

возрастает, то

$$\begin{aligned}
P_{(A,B)}(z) = P_{\mu^*}(z) = y_1(|\mu^*(z)|) \le y_1(t_+) \le \frac{2}{1-t_+} \\
= \frac{2}{1-\bigl(|\mu_0(z)| - K_1(z) + \sqrt{K_1^2(z) + 2(1-|\mu_0(z)|)K_1(z)}\bigr)} \\
= \frac{2\bigl(1-|\mu_0(z)| + K_1(z) + \sqrt{K_1^2(z) + 2(1-|\mu_0(z)|)K_1(z)}\bigr)}{(1-|\mu_0(z)|)^2} \\
\le \frac{2\bigl(1-|\mu_0(z)| + K_1(z) + \sqrt{K_1^2(z) + 2K_1(z) + 1}\bigr)}{(1-|\mu_0(z)|)^2} \\
= \frac{2(1-|\mu_0(z)|)+2}{(1-|\mu_0(z)|)^2} + \frac{4}{(1-|\mu_0(z)|)^2}K_1(z) \le \frac{4}{(1-q(D'))^2} + \frac{4}{(1-q(D'))^2}K_1(z).
\end{aligned}$$

Тем самым $P_{(A,B)}(z) \le K(z)$, где

$$K(z) = \frac{4}{(1-q(D'))^2} + \frac{4}{(1-q(D'))^2}K_1(z).$$

Поскольку $K(z) \in W^{1,2}(D')$, по теореме 1 $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D')$, $f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D'))$, а значит, $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D \setminus E)$, $f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D \setminus E))$.

Теорема доказана.

Замечание 2. Для уравнения (2) в условиях теоремы 2 вместо левой части неравенства (6) может быть использовано выражение

$$\frac{|\mu(z)-\mu_0(z)|^2}{(1-|\mu_0(z)|)|(1-|\mu(z)|)|}.$$

Действительно, уравнение (2) можно переписать в виде уравнения (1) с коэффициентами $A(z) = \mu(z)/(1+|\mu(z)|)$, $B(z) = -1/(1+|\mu(z)|)$. Для $A(z)$, $B(z)$ выполняются условие (5) и соотношение $\mu(z) = -A/B$. Отсюда

$$\frac{|A(z)+B(z)\mu_0(z)|^2}{(1-|\mu_0(z)|)||A(z)|-|B(z)||} = \frac{|B(z)|\bigl|\frac{A(z)}{B(z)} + \mu_0(z)\bigr|^2}{(1-|\mu_0(z)|)\bigl|\bigl|\frac{A(z)}{B(z)}\bigr| - 1\bigr|} \le \frac{|\mu(z)-\mu_0(z)|^2}{(1-|\mu_0(z)|)|1-|\mu(z)||}.$$

Замечание 3. Принадлежность $K(T^{-1}(v))$ классу ACL в $T(D')$ в некоторых случаях выполняется автоматически, являясь следствием свойства отображения $v = T(z)$ сохранять этот класс. Примером отображения, сохраняющего класс ACL, является

$$\mathcal{F}_\delta(z) = f_\delta(x_1) + ix_2, \quad f_\delta(t) = \int_0^t \delta(\tau)\,d\tau,$$

где $\delta(t)$ — положительная непрерывная при $t \ne 0$ функция, имеющая интегрируемую особенность в нуле. Несложно проверить, что если $K(z) \in ACL$ в D, то $K\bigl(\mathcal{F}_\delta^{-1}(v)\bigr) \in ACL$ в $\mathcal{F}_\delta(D)$.

§ 4. Вырождение на линии

Пусть существует жорданова дуга $E \subset D$, делящая область D на две односвязные подобласти D_1 и D_2, причем на E уравнение (2) вырождается, а характер вырождения описывается следующими условиями.

(B1) Справедливо представление

$$|\mu(z)| = 1 + M(z)\delta(H(z)), \tag{14}$$

где $M(z)$ — измеримая п. в. конечная в D функция; $\delta(t)$ — непрерывная функция такая, что $\delta(t) > 0$ при $t \neq 0$ и $\delta(0) = 0$; $H(z) \in C(D) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, причем $\nabla H(z) \neq 0$ п. в. в D и $H(z) < 0$ в D_1, $H(z) > 0$ в D_2.

(B2) Существует непрерывная функция $Z(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ такая, что отображение

$$J(z) = H(z) + iZ(z) \in C(D) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$$

является локально квазиконформным гомеоморфизмом D на $J(D)$, сохраняющим ориентацию.

Очевидно, из условия (B1) следует, что $H(z) = 0$ — уравнение кривой E.

Пусть в дальнейшем $I_1(z) = H_{x_1}Z_{x_2} - H_{x_2}Z_{x_1}$ — якобиан отображения $J(z)$, $p_J(z)$ — его первая характеристика Лаврентьева, а $Q_J(D') = \operatorname*{ess\,sup}_{D'} p_J(z) \geq 1$. Тогда в силу квазиконформности $J(z)$ в D' п. в. имеем

$$|\nabla H(z)|^2 + |\nabla Z(z)|^2 \leq 2Q_J(D')I_1(z) \leq 2Q_J(D')|\nabla H(z)||\nabla Z(z)|. \tag{15}$$

Всюду ниже для произвольной вещественной функции $f(z)$, имеющей градиент в точке $z \in D$, полагаем $\nabla f(z) = f_{x_1} + if_{x_2}$ и $\overline{\nabla f(z)} = f_{x_1} - if_{x_2}$.

Следующие теоремы 3, 4 указывают условия на M, δ, H, Z, при которых существует гомеоморфное решение с особенностью E уравнения, ассоциированного с уравнением (2), а также описывают структуру этих решений.

Теорема 3. *Предположим, что выполняются условия* (B1), (B2) *и для всякой подобласти $D' \Subset D$ можно указать функцию $K(z) \in W^{1,2}(D')$ такую, что*

$$\iint\limits_{D'} \frac{|\nabla K(z)|^2}{\delta(H)}\,dx_1dx_2 < +\infty,$$

причем для п. в. $z \in D'$

$$\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)}\left|\mu(z) - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}\right|^2 + \frac{1}{|M(z)|} \leq K(z). \tag{16}$$

Положим $T(z) = \mathcal{F}_\delta(J(z))$. Тогда существует гомеоморфизм $w = f(z) : D \to f(D) \subset \mathbb{C}$, для которого справедливы утверждения:

(i) *$f(z)$ есть решение с особенностью E уравнения, ассоциированного с* (2)*;*

(ii) *$f(z) \in T^*W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, $f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D \setminus E))$ и в представлении*

$$f(z) = \varphi(T(z)) = \varphi(\mathcal{F}_\delta(J(z))) \tag{17}$$

отображение φ имеет $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемую первую характеристику.

В классе $T^*W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ данное гомеоморфное решение с особенностью E единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением.

Доказательство. В развернутом виде $T(z) = f_\delta(H) + iZ$ и для отображения $v = T(z)$ получаем

$$\frac{\partial(v_1,v_2)}{\partial(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} \delta(H)H_{x_1} & \delta(H)H_{x_2} \\ Z_{x_1} & Z_{x_2} \end{vmatrix} = \delta(H)I_1(z),$$

$$\frac{\partial T(z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\delta(H)\overline{\nabla H} + i\overline{\nabla Z}\right), \quad \frac{\partial T(z)}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\delta(H)\nabla H + i\nabla Z\right),$$

откуда

$$\mu_0(z) = \frac{\partial T(z)}{\partial \bar z}\Big/\frac{\partial T(z)}{\partial z} = \frac{\delta(H)\nabla H + i\nabla Z}{\delta(H)\overline{\nabla H} + i\overline{\nabla Z}} = \frac{\nabla Z - i\delta(H)\nabla H}{\overline{\nabla Z} - i\delta(H)\overline{\nabla H}}. \qquad (18)$$

Отображение $v = T(z)$ сохраняет ориентацию, следовательно, $|\mu_0(z)| < 1$ п. в. в D.

Имеем

$$|\mu-\mu_0|^2 \le \left|\left|\mu - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}\right| + \left|\frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} - \mu_0\right|\right|^2 \le 2\left|\mu - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}\right|^2 + 2\left|\frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} - \mu_0\right|^2, \qquad (19)$$

$$\frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} - \mu_0 = \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} - \frac{\nabla Z - i\delta(H)\nabla H}{\overline{\nabla Z} - i\delta(H)\overline{\nabla H}} = \frac{2\delta(H)I_1(z)}{\overline{\nabla Z}(\overline{\nabla Z} - i\delta(H)\overline{\nabla H})}.$$

Зафиксируем подобласть $D' \Subset D$. Тогда для п. в. $z \in D'$ с учетом (15)

$$\left|\frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} - \mu_0\right|^2 = \frac{4\delta^2(H)I_1^2(z)}{|\nabla Z|^2(|\nabla Z|^2 + \delta^2(H)|\nabla H|^2 + 2\delta(H)I_1(z))}$$
$$\le \frac{4\delta^2(H)I_1^2(z)}{|\nabla Z|^4} \le 16Q_J^2(D')\delta^2(H), \qquad (20)$$

$$|\nabla Z|^2 + \delta^2(H)|\nabla H|^2 + 2\delta(H)I_1(z) \le C_1(D')I_1(z), \qquad (21)$$

где $C_1(D') = 2Q_J(D')\max\{1, \sup\limits_{D'}(\delta^2(H))\} + 2\sup\limits_{D'}(\delta(H)) \ge 1$. Используя (18) и (21), получаем

$$1 - |\mu_0(z)| = \frac{4\delta(H)I_1(z)}{(1+|\mu_0(z)|)\left(|\nabla Z|^2 + \delta^2(H)|\nabla H|^2 + 2\delta(H)I_1(z)\right)} \ge \frac{1}{C_1(D')}\delta(H).$$

Отсюда с учетом (14), (19), (20) приходим к оценке

$$\frac{|\mu-\mu_0|^2}{|(1-|\mu(z)|)(1-|\mu_0(z)|)|} \le \frac{2\left|\mu - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}\right|^2 + 2\left|\frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} - \mu_0\right|^2}{\frac{1}{C_1(D')}|M(z)|\delta^2(H)}$$
$$\le C_2(D')\left(\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)}\left|\mu - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}\right|^2 + \frac{1}{|M(z)|}\right), \qquad (22)$$

где $C_2(D') = 32Q_J^2(D')C_1(D')$.

Далее, снова пользуясь (15), устанавливаем оценку

$$P_{\mu_0}(z) = \frac{1+|\mu_0|}{1-|\mu_0|} \le 2\frac{1+|\mu_0|^2}{1-|\mu_0|^2} = \frac{\delta^2(H)|\nabla H|^2 + |\nabla Z|^2}{\delta(H)I_1(z)} \le \frac{C_3(D')}{\delta(H)},$$

где $C_3(D') = 2Q_J(D') \max\{\sup\limits_{D'}(\delta^2(H)), 1\}$. Тогда для всякой функции $K(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D')$ выполнено неравенство

$$\iint\limits_{D'} P_{\mu_0}(z)|\nabla K(z)|^2\, dx_1dx_2 \le C_3(D') \iint\limits_{D'} \frac{|\nabla K(z)|^2}{\delta(H)}\, dx_1dx_2. \tag{23}$$

Имеем $z = T^{-1}(v) = J^{-1}\big(\mathcal{F}_\delta^{-1}(v)\big)$. Пусть $\zeta = \mathcal{F}_\delta^{-1}(v)$. Тогда $v = \mathcal{F}_\delta(\zeta)$, $\zeta = J(z)$. Так как отображение $\zeta = J(z)$ локально квазиконформно, обратное к нему $z = J^{-1}(\zeta)$ также локально квазиконформно и, следовательно, $J^{-1}(\zeta) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(J(D'))$. Поскольку $K(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D')$, в силу инвариантности класса $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ при квазиконформных отображениях имеем $\widetilde{K}(\zeta) = K(J^{-1}(\zeta)) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(J(D'))$ и по замечанию 3 заключаем о принадлежности $K(T^{-1}(v)) = \widetilde{K}\big(\mathcal{F}_\delta^{-1}(v)\big) \in ACL$ в $T(D')$.

Очевидно, кривая E — множество вырождения $T(z) = \mathcal{F}_\delta(J(z))$, и выполняются условия (A1), (A2). Таким образом, в силу замечания 2 и условия (16) полученные оценки (22), (23) обеспечивают выполнение условий теоремы 2, а значит, и справедливость теоремы 3. Теорема доказана.

Теорема 4. *Предположим, что выполняются условия* (B1), (B2) *и функция* $1/\delta(t)$ *имеет интегрируемую особенность в нуле. Кроме того, предположим, что для всякой подобласти* $D' \Subset D$ *можно указать функцию* $K(z) \in W^{1,2}(D')$ *такую, что*

$$\iint\limits_{D'} \frac{|\nabla K(z)|^2}{\delta(H)}\, dx_1dx_2 < +\infty,$$

причем для п. в. $z \in D'$

$$\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)}\left|\mu(z) - \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}}\right|^2 + \frac{1}{|M(z)|} \le K(z).$$

Положим $T(z) = \mathcal{F}_{\frac{1}{\delta}}(J(z))$. *Тогда существует гомеоморфизм* $w = f(z) : D \to f(D) \subset \mathbb{C}$, *для которого справедливы утверждения:*

(i) $f(z)$ — *решение с особенностью* E *уравнения, ассоциированного с* (2);

(ii) $f(z) \in T^*W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, $f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D \setminus E))$ *и в представлении*

$$f(z) = \varphi(T(z)) = \varphi(\mathcal{F}_{\frac{1}{\delta}}(J(z)))$$

отображение φ *имеет* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$*-мажорируемую первую характеристику.*

В классе $T^*W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ *данное гомеоморфное решение с особенностью* E *единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением.*

Доказательство проводится по той же схеме, что и в предыдущей теореме, есть отличия в деталях. Укажем эти детали.

Сначала вычисляем следующие величины:

$$\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\delta(H)}H_{x_1} & \frac{1}{\delta(H)}H_{x_2} \\ Z_{x_1} & Z_{x_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta(H)} I_1(z),$$

$$\frac{\partial T(z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta(H)}\overline{\nabla H} + i\overline{\nabla Z}\right), \quad \frac{\partial T(z)}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta(H)}\nabla H + i\nabla Z\right),$$

$$\mu_0(z) = \frac{\partial T(z)}{\partial \bar z} \Bigg/ \frac{\partial T(z)}{\partial z} = \frac{\nabla H + i\delta(H)\nabla Z}{\overline{\nabla H} + i\delta(H)\overline{\nabla Z}}, \tag{24}$$

Как и в предыдущей теореме, $v = T(z)$ сохраняет ориентацию и, следовательно, $|\mu_0(z)| < 1$ п. в. в D. Далее, устанавливаем оценку, аналогичную (19):

$$|\mu - \mu_0|^2 \le 2\left|\mu - \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}}\right|^2 + 2\left|\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} - \mu_0\right|^2.$$

Пользуясь (24), получаем

$$\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} - \mu_0 = \frac{2\delta(H)I_1(z)}{\overline{\nabla H}(\overline{\nabla H} - i\delta(H)\overline{\nabla Z})}.$$

Зафиксируем произвольную подобласть $D' \Subset D$. Тогда для п. в. $z \in D'$ с учетом (15)

$$\left|\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} - \mu_0\right|^2 = \frac{4\delta^2(H)I_1^2(z)}{|\nabla H|^2(|\nabla H|^2 + \delta^2(H)|\nabla Z|^2 + 2\delta(H)I_1(z))} \le \frac{4\delta^2(H)I_1^2(z)}{|\nabla H|^4} \le 16Q_J^2(D')\delta^2(H),$$

$$|\nabla H|^2 + \delta^2(H)|\nabla Z|^2 + 2\delta(H)I_1(z) \le C_1(D')I_1(z),$$

где $C_1(D') = 2Q_J(D')\max\{1, \sup_{D'}(\delta^2(H))\} + 2\sup_{D'}(\delta(H)) \ge 1$. Проводя дальнейшие выкладки по аналогии с предыдущей теоремой, приходим к требуемому. Теорема доказана.

Теоремы 2–4 представляют собой результаты, относящиеся к теории уравнений Бельтрами с известным множеством вырождения E (см. по этому поводу [13, с. 572], а из последних работ — [14, гл. 13], где получены новые тонкие результаты, относящиеся к этому направлению исследований). Заметим, что ранее Сребро и Якубовым [15, теорема 1.1] был получен результат, близкий теореме 3 при более жестких ограничениях на μ и E. В то же время близкие аналоги теоремы 4, полученные ранее, автору неизвестны и ее результат представляется принципиально новым. Существенным отличием полученных результатов от имеющихся аналогов является также описание структуры решений.

§ 5. Складки

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, разделенная жордановой дугой E на две подобласти D_1 и D_2, и пусть $|A(z)| < |B(z)|$ п. в. в D_1 и $|A(z)| > |B(z)|$ п. в. в D_2.

Решение $f(z)$ с особенностью E уравнения (1), гомеоморфное на множествах E, D_s $(s = 1, 2)$, будем называть *(A, B)-складкой.* Дуга E называется в этом случае *линией складки.* В случае уравнения (2) вместо «$(\mu, -1)$-складка» будем писать «μ-складка».

Напомним, что дуга $E \subset \mathbb{C}$, заданная аналитической по вещественному переменному t функцией $z = f(t) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{C}$, $f'(t) \ne 0$, называется *аналитической* [16, с. 152]. Кроме того, дуга $E \subset \mathbb{C}$, у которой угол наклона θ между касательной и осью абсцисс является функцией, удовлетворяющей условию Гёльдера $|\theta(s'') - \theta(s')| \le C|s'' - s'|^\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$ относительно натурального параметра s, называется *дугой Ляпунова* [16, с. 108].

Теорема 5. *Предположим, что существуют (A, B)-складка $f(z)$ и $g_0(z)$ — гомеоморфное в D решение с особенностью E уравнения, ассоциированного с* (1)*. Тогда если выполняются следующие условия:*

(a) *или* $f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D_1))$, *или* $g_0^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(g_0(D_1))$,

(b) *или* $f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D_2))$, *или* $g_0^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(g_0(D_2))$,

то справедливы утверждения:

(i) *функция $f(z)$ представима в виде*

$$f(z) = \varphi(\mathcal{B}(\psi(g_0(z)))), \tag{25}$$

где φ, ψ — некоторые конформные отображения;

(ii) $g_0(E)$ *— аналитическая дуга;*

(iii) *если функция $P_{(A,B)}(z)$ является $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемой в D, а $f(E)$ — дуга Ляпунова, то f, $g_0 \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, а $g_0^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(g_0(D))$.*

Доказательство. Множество $E^* = f(E)$ — жорданова дуга как гомеоморфный образ жордановой дуги. Отображение $w = f(z)$ сохраняет ориентацию в D_1 и меняет ее на противоположную в D_2. Поэтому области $f(D_1)$ и $f(D_2)$ имеют непустое пересечение, примыкающее к E^*. Рассмотрим область $D^* = f(D_1) \cup f(D_2)$.

С помощью теоремы Римана можно построить конформное отображение $\varphi_1(w)$ области D^* в нижнюю полуплоскость $\mathbb{C}$ так, чтобы E^* перешло в промежуток вещественной оси.

Действительно, возможны три варианта: 1) область D^* односвязна, 2) область D^* не односвязна, а E^* лежит на некоторой внешней компоненте связности границы ∂D^*, 3) область D^* не односвязна, а E^* лежит на некоторой внутренней компоненте связности ∂D^*. В первом случае теорема Римана применяется непосредственно к D^*, во втором — к минимальной односвязной области, содержащей D^*. В третьем случае сначала берется конформное отображение, «выворачивающее наизнанку» D^* так, чтобы образ E^* при данном отображении оказался на внешней граничной компоненте образа D^*. Затем теорема Римана применяется к минимальной односвязной области, содержащей образ D^*, и берется суперпозиция построенных отображений.

Отметим, что в силу принципа соответствия границ для конформных отображений отображение $\varphi_1 : D^* \to \varphi_1(D^*)$ продолжается взаимно однозначно по непрерывности на $D^* \bigcup E^*$. Ввиду этого $\varphi_1(f(z))$ является (A, B)-складкой, а отображение

$$v = \Phi(z) = \begin{cases} \varphi_1(f(z)) & \text{при } z \in D_1, \\ \overline{\varphi_1(f(z))} & \text{при } z \in D_2 \end{cases}$$

есть решение с особенностью E ассоциированного уравнения. При этом

$$\varphi_1(f(z)) = \mathcal{B}(\Phi(z)).$$

Покажем, что существует такое конформное отображение $\psi : g_0(D) \to \Phi(D)$, что $\Phi(z) = \psi(g_0(z))$. Пусть в дальнейшем $\zeta = g_0(z)$, где $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$.

Из построения отображения $\Phi(z)$ ясно, что $\Phi(z)$ — гомеоморфизм, причем $\Phi(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D_s)$ $(s = 1, 2)$. Рассмотрим отображение

$$\Psi(v) = g_0(\Phi^{-1}(v)) : \Phi(D) \to g_0(D). \tag{26}$$

Пусть выполняется условие (a).

Если $f^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(D_1)$, то $\Phi^{-1}(v) \in W^{1,2}_{\rm loc}(\Phi(D_1))$, а отображение $\Psi(v)$ переводит п. в. бесконечно малые круги из области $\Phi(D_1)$ в бесконечно малые круги области $g_0(D_1)$. Поскольку $g_0 \in W^{1,2}_{\rm loc}(D_1)$, то $\Psi(v) \in W^{1,1}_{\rm loc}(\Phi(D_1))$ [17, гл. 3, лемма 6.4]. В силу стандартной аргументации (см., например, [11, доказательство теоремы 1]) заключаем о конформности $\Psi(v)$ в области $\Phi(D_1)$.

Если $g_0^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(g_0(D_1))$, то, как и выше,

$$\Psi^{-1}(\zeta) = \Phi\big(g_0^{-1}(\zeta)\big) \in W^{1,1}_{\rm loc}(g_0(D_1)).$$

Данное отображение переводит п. в. бесконечно малые круги из области $g_0(D_1)$ в бесконечно малые круги области $\Phi(D_1)$ и, значит, как и в предыдущем случае, является конформным. Тогда и обратное к нему отображение $\Psi(v)$ также конформно.

В случае (b) конформность $\Psi(v)$ в $\Phi(D_2)$ устанавливается аналогично.

Поскольку прямая $\operatorname{Im} v = 0$ локально спрямляема, по теореме Пенлеве [18, с. 47] заключаем, что $\Psi(v)$ — конформное отображение области $\Phi(D)$.

Пусть $\psi = \Psi^{-1}$. Тогда $\varphi_1(f(z)) = \mathcal{B}(\psi(g_0(z)))$ и, полагая $\varphi = \varphi_1^{-1}$, приходим к представлению (25).

Аналитичность дуги $g_0(E)$ следует из равенства $g_0(E) = \Psi(\Phi(E))$, того факта, что $\Phi(E)$ есть промежуток на прямой $\operatorname{Im} v = 0$, и в силу неравенства $\Psi'(v) \neq 0$, верного внутри области $\Phi(D)$.

Наконец, заметим, что согласно теореме 1 при $W^{1,2}_{\rm loc}$-мажорируемости функции $P_{(A,B)}(z)$ в D существует гомеоморфное решение $g \in W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ ассоциированного с (1) уравнения такое, что $g^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(g(D))$. Тогда $\Psi_1(v) = g(\Phi^{-1}(v)) : \Phi(D) \to g(D)$ — конформное отображение. Учитывая конформность отображения (26), заключаем, что $g_0(z)$ и $g(z)$ могут отличаться друг от друга разве лишь на суперпозицию с конформным отображением. Это доказывает, что $g_0(z) \in W^{1,2}_{\rm loc}(D)$, $g_0^{-1}(\zeta) \in W^{1,2}_{\rm loc}(g_0(D))$.

Далее, в формуле (25) принадлежность $\mathcal{B}(\psi(g_0(z))) \in W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ очевидна. Поскольку φ отображает область, примыкающую к оси абсцисс, причем соответствующая часть оси абсцисс переходит в дугу Ляпунова $f(E)$, то производная φ' непрерывна на оси абсцисс по теореме Келлога [19, с. 411]. Отсюда заключаем, что $\varphi(\mathcal{B}(\psi(g_0(z)))) \in W^{1,2}_{\rm loc}(D)$. Теорема доказана.

Следующая теорема обратна утверждению (ii) предыдущей теоремы.

Теорема 6. *Пусть функция $P_{(A,B)}(z)$ является $W^{1,2}_{\rm loc}$-мажорируемой в D и $g_0(z) \in W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ — гомеоморфное в D решение уравнения, ассоциированного с (1).*

Предположим, что дуга $g_0(E) \subset g_0(D)$ аналитическая. Тогда в некоторой окрестности $O(E')$ произвольной дуги $E' \Subset E$ существует (A,B)-складка $f(z) \in W^{1,2}(O(E'))$.

Заметим, что существование локальных складок в окрестности E, вообще говоря, не означает их глобального существования. В [6, с. 230–232] построен пример уравнения (1) переменного типа, имеющего в некоторой окрестности произвольной точки линии смены типа решение вида складки и не допускающего складчатого решения во всей области задания уравнения.

Доказательству предпошлем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть на $\mathscr{C} = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ определена аналитическая по вещественному переменному x_1 функция $f(x_1) : \mathscr{C} \to \mathbb{C}$, $f'(x_1) \neq 0$, причем отображение $f : \mathscr{C} \to f(\mathscr{C})$ взаимно однозначно. Тогда для всякого интервала*

$\mathscr{C}' = (\alpha', \beta') \Subset (\alpha, \beta)$ существует аналитическое продолжение $f(z)$ на некоторую окрестность $O(\mathscr{C}')$, причем $f(z)$ будет конформным гомеоморфизмом $O(\mathscr{C}')$ на $f(O(\mathscr{C}'))$.

Доказательство. Продолжение в некоторую окрестность интервала $\mathscr{C} = (\alpha, \beta)$ дается разложением $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности каждой точки $x_1' \in (\alpha, \beta)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_1')}{n!}(z - x_1')^n.$$

Как аналитическая функция данное отображение локально гомеоморфно в этой окрестности и гомеоморфно на $[\alpha', \beta']$.

Поскольку всякое локально гомеоморфное отображение, гомеоморфное на компакте, гомеоморфно и в некоторой окрестности этого компакта [20, замечание 1], утверждение леммы справедливо. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 6. Пусть $\zeta = \Psi(v_1) : (\alpha, \beta) \to g_0(D) \subset \mathbb{C}$ — представление дуги $g_0(E)$ посредством аналитической по v_1 функции $\Psi(v_1)$, $\Psi'(v_1) \neq 0$.

Пусть интервал $\mathscr{C}' = (\alpha', \beta') \Subset (\alpha, \beta)$ соответствует дуге $g_0(E')$. В силу леммы 2 функцию $\Psi(v_1)$ можно аналитически продолжить в некоторую окрестность $O(\mathscr{C}') \subset \mathbb{C}$ так, что в ней отображение $\Psi : O(\mathscr{C}') \to \Psi(O(\mathscr{C}'))$ будет конформным гомеоморфизмом. Обозначим через $\Psi(v)$ указанное продолжение и положим

$$O_-(\mathscr{C}') = O(\mathscr{C}') \cap \{\operatorname{Im} v < 0\}, \quad O_+(\mathscr{C}') = O(\mathscr{C}') \cap \{\operatorname{Im} v > 0\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\Psi(O(\mathscr{C}')) \Subset g_0(D)$, причем $\Psi(O_-(\mathscr{C}')) \Subset g_0(D_2)$, $\Psi(O_+(\mathscr{C}')) \Subset g_0(D_1)$. Последнего всегда можно добиться, заменив, если необходимо, функцию $\Psi(v)$ на $\Psi(-v)$. Подходящая (A, B)-складка получается по формуле $f(z) = \mathcal{B}(\varphi(g_0(z)))$, где $\varphi = \Psi^{-1}$. Теорема доказана.

Отметим, что в [8] сформулированы некоторые результаты, близкие теоремам 5, 6.

Следствием теорем 3, 5, 6 является

Теорема 7. *Пусть выполняются условия теоремы 3 и в D определена μ-складка $g(z)$. Тогда $g(z)$ представима в виде*

$$g(z) = \varphi(\mathcal{B}(\psi(\mathcal{F}_\delta(J(z))))), \tag{27}$$

где φ — некоторое конформное отображение, $\mathcal{B}$ — функция Бора, ψ — некоторое отображение с $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемой первой характеристикой.

Если для $f(z)$ — произвольного гомеоморфного в D решения с особенностью E ассоциированного с (2) уравнения — дуга $f(E)$ аналитична, то в некоторой окрестности произвольной дуги $E' \Subset E$ существует μ-складка.

Доказательство. Сделаем в уравнении (2) замену переменной $v = T(z)$, где $T(z) = \mathcal{F}_\delta(J(z))$. Полагая $\omega(v) = f(T^{-1}(v))$, получим

$$\omega_{\bar{v}} = \tilde{\mu}(v)\omega_v, \tag{28}$$

где

$$\tilde{\mu}(v) = \left.\frac{\mu - \mu_0}{1 - \mu\overline{\mu_0}} \cdot \frac{v_z}{\overline{v_z}}\right|_{z=T^{-1}(v)}.$$

Функция $P_{\tilde{\mu}}(v)$ является частным случаем функции $P_{(\widetilde{A},\widetilde{B})}(v)$ из теоремы 2, а потому $W^{1,2}_{\rm loc}$-мажорируема в $T(D)$. По теореме 3 в D существует некоторое гомеоморфное решение с особенностью E уравнения, ассоциированного с уравнением (2). Пусть $f(z) = \psi_1(\mathcal{F}_\delta(J(z))) = \psi_1(T(z))$ такое решение в соответствии с формулой (17), где ψ_1 — некоторое отображение с $W^{1,2}_{\rm loc}$-мажорируемой первой характеристикой.

Рассмотрим в $T(D)$ функции $\tilde{g}(v) = g(T^{-1}(v))$, $\tilde{f}(v) = f(T^{-1}(v))$. Данные функции являются решением уравнения (28) и решением уравнения, ассоциированного с ним. Тогда выполняются условия теоремы 5 и, следовательно, имеет место представление $\tilde{g}(v) = \varphi(\mathcal{B}(\psi_2(\tilde{f}(v))))$, где φ, ψ_2 — некоторые конформные отображения. Данное равенство означает справедливость представления (27) с $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$. Последнее утверждение теоремы вытекает из теоремы 6. Теорема доказана.

Аналогично следствием теорем 4–6 будет

Теорема 8. *Пусть выполняются условия теоремы 4 и в D определена μ-складка $g(z)$. Тогда функция $g(z)$ представима в виде*

$$g(z) = \varphi(\mathcal{B}(\psi(\mathcal{F}_{\frac{1}{\delta}}(J(z))))),$$

где φ — некоторое конформное отображение, $\mathcal{B}$ — функция Бора, ψ — некоторое отображение с $W^{1,2}_{\rm loc}$-мажорируемой первой характеристикой.

Если для $f(z)$ — произвольного гомеоморфного в D решения с особенностью E ассоциированного с (2) уравнения — дуга $f(E)$ аналитична, то в некоторой окрестности произвольной дуги $E' \Subset E$ существует μ-складка.

Доказательство теоремы 8 дословно повторяет доказательство теоремы 7, за исключением того, что вместо $\mathcal{F}_\delta$ должно рассматриваться $\mathcal{F}_{\frac{1}{\delta}}$.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность В. М. Миклюкову за постановку задачи и постоянное внимание к работе, А. А. Клячину, В. А. Клячину, Е. Г. Григорьевой и В. И. Пелиху, прочитавшим рукопись работы и сделавшим ряд ценных замечаний, а также участникам семинаров «Геометрический анализ и его приложения» и «Сверхмедленные процессы» ВолГУ, научного семинара отдела анализа и геометрии ИМ СО РАН им. С. Л. Соболева за полезное обсуждение и конструктивную критику работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
2. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974.
3. *Lavrentieff M.* Sur une classe de representation continues // Мат. сб. 1935. Т. 42, № 4. С. 407–424. (См. также *Лаврентьев М. А.* Об одном классе непрерывных отображений // Лаврентьев М. А. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1990. С. 219–237.)
4. *Волковыский Л. И.* Некоторые вопросы теории квазиконформных отображений // Некоторые проблемы математики и механики, к семидесятилетию М. А. Лаврентьева. Л., 1970. С. 128–134.
5. *Srebro U., Yakubov E.* Branched folded maps and alternating Beltrami equations // J. Anal. Math. 1996. V. 70. P. 65–90.
6. *Srebro U., Yakubov E.* Uniformization of maps with folds // Israel Math. Conf. Proc. 1997. V. 11. P. 229–232.
7. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. М.: Физматгиз, 1963.

8. *Якубов Э. Х.* О решениях уравнения Бельтрами с вырождением // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 5. С. 1148–1149.

9. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

10. *Миклюков В. М.* Изотермические координаты на поверхностях с особенностями // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 1. С. 69–88.

11. *Martio O., Miklyukov V. M.* On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equations // Complex Variables. 2004. V. 49. P. 647–656.

12. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.

13. *Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation // Handbook of complex analysis, geometry function theory. Amsterdam: Elsevier, 2005. V. 2. P. 555–597.

14. *Миклюков В. М.* Функции весовых классов Соболева, анизотропные метрики и вырождающиеся квазиконформные отображения. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2010.

15. *Srebro U., Yakubov E.* μ-Homeomorphisms // Contemp. Math. 1997. V. 211. P. 473–479.

16. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958.

17. *Lehto O., Virtanen K. I.* Quasiconformal mappings in the plane. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1973.

18. *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций. М.; Л.: ОНТИ НКТП, 1936.

19. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

20. *Зорич В. А.* Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства // Мат. сб. 1967. Т. 74, № 3. С. 417–433.

Статья поступила 21 декабря 2011 г.

Кондрашов Александр Николаевич
Волгоградский гос. университет, Институт математики и информационных технологий, кафедра компьютерных наук и экспериментальной математики,
Университетский пр., 100, Волгоград 400062
ankondr@mail.ru