Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 517.925.5+517.929

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ И УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Г. В. Демиденко

Аннотация. Установлены связи между решениями одного класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнений с запаздывающим аргументом.

Ключевые слова: уравнение с запаздывающим аргументом, предельные теоремы, обобщенные решения.

§ 1. Введение

В цикле работ [1–5] установлены связи между решениями некоторых классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F(t, x), \quad n \gg 1, \tag{1.1}$$

и решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau. \tag{1.2}$$

В данной работе мы продолжаем эти исследования и выделяем класс систем высокой размерности (1.1), решения которых тесно связаны с решениями дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом вида

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau. \tag{1.3}$$

Этот класс включает системы, рассмотренные в [1, 5] и частично в [3]. В него входят также системы, возникающие при моделировании некоторых биологических процессов (см., например, [1, 6–8]), при этом размерности этих систем могут быть настолько большими, что решение их на ЭВМ может представлять очень серьезную проблему. Именно такие «проблемы большой размерности» послужили источником для исследований [1–5, 9, 10]. Установленные связи между решениями систем (1.1) и уравнений (1.3) позволяют, в частности, находить приближенные решения систем (1.1) высокой размерности, решая задачи для уравнений вида (1.3). В связи с этим интересно отметить, что в [11–13]

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК № 16.740.11.0127, соглашение № 14.B37.21.0355), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00035) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 80).

был предложен метод исследования некоторых задач об устойчивости и управлении для уравнений с запаздывающим аргументом на основе аппроксимации их решений с помощью решений специальных классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем такой подход при решении различных задач для уравнений с запаздывающим аргументом развивался в ряде работ (см., например, [14–16]).

Результаты работы частично анонсированы в [17].

§ 2. Формулировка основных результатов

Рассмотрим последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1.1), каждая из которых состоит из n обыкновенных дифференциальных уравнений. Будем предполагать, что последовательность матриц $\{A_n\}$ удовлетворяет следующим условиям.

1. Собственные значения $\{\lambda_j^n\}$, $j = 1, \dots, n$, каждой матрицы A_n, $n \geq n_0$, являются вещественными. Пусть $\lambda_n^n \leq \lambda_{n-1}^n \leq \dots \leq \lambda_2^n < \lambda_1^n$. Предположим, что $\lambda_1^n \to -\theta < 0$, $n \to \infty$.

2. Алгебраическое дополнение α_n элемента b_{1n} матрицы $(\lambda I - A_n) = (b_{ij})$ не зависит от λ при любом $n \geq n_0$.

3. Существует $\tau > 0$ такое, что имеет место сходимость

$$\frac{1}{\alpha_n} \prod_{j=2}^{n} \left(i\eta - \lambda_j^n\right) \to e^{i\eta\tau}, \quad n \to \infty. \tag{2.1}$$

Условие 3 можно переформулировать следующим образом. Пусть каждый член последовательности $\{V^n\}$, $V^n = \left(v_1^n, \dots, v_n^n\right)^{\mathrm{T}}$, $n \geq n_0$, является решением системы линейных уравнений

$$(i\eta I - A_n)V^n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда сходимость (2.1) эквивалентна сходимости

$$v_n^n \to \frac{e^{-i\eta\tau}}{i\eta + \theta}, \quad n \to \infty.$$

Для каждой из систем вида (1.1) рассмотрим задачу Коши с нулевыми начальными данными:

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F_n(t, x), \ t > 0, \quad x|_{t=0} = 0. \tag{2.2}$$

Будем считать, что вектор-функция $F_n(t, x)$ удовлетворяет следующему условию.

4. Вектор-функция $F_n(t, x)$ имеет вид

$$F_n(t, x) = (g(t, x_n), 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}},$$

где $g(t, v) \in C(\overline{R}_2^+)$ ограничена: $|g(t, v)| \leq G < \infty$, и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу:

$$\sup_{t \geq 0} |g(t, v^1) - g(t, v^2)| \leq L|v^1 - v^2|, \quad v^1, v^2 \in R, \ L = \text{const}.$$

Очевидно, каждая из задач Коши (2.2) однозначно разрешима на полуоси $\{t \geq 0\}$. Зафиксируем отрезок $[0, T]$ и будем рассматривать последовательность $\{x_n^n(t)\}$, состоящую из последних компонент решений задач Коши. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* 1–4. *Тогда последовательность* $\{x_n^n(t)\}$ *равномерно сходится на отрезке* $[0, T]$:

$$x_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty, \tag{2.3}$$

и предельная функция $y(t)$ *является решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом* (1.3):

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) \equiv 0, \ 0 \leq t \leq \tau, \quad y(\tau+0) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Из теоремы 1 вытекает, что для приближенного нахождения значений последней компоненты $x_n(t)$ решения задачи Коши для системы (1.1) при $n \gg 1$ достаточно решить начальную задачу (2.4). Для получения оценки погрешности аппроксимации $x_n(t) \approx y(t)$ нужно установить оценки скорости сходимости (2.3). Отметим, что при получении таких оценок могут наблюдаться очень интересные эффекты, связанные с существенным изменением скорости сходимости для систем, на первый взгляд, мало отличающихся друг от друга (см., например, [5]).

При рассмотрении серии задач Коши для систем вида (1.1) с ненулевыми начальными условиями справедлив аналог предельной теоремы 1. Как и в [3], в этом случае возникает интересная особенность, заключающаяся в том, что сходимость последовательности $\{x_n^n(t)\}$, как правило, имеет место в пространстве $L_p(0, T)$, а не в пространстве $C[0, T]$, и предельная функция $y(t)$ является обобщенным решением дифференциального уравнения (1.3). Продемонстрируем это на примере задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_n x + F_n(t, x), \quad t > 0, \\ x|_{t=0} = x_0, \end{cases} \tag{2.5}$$

где вектор начальных данных имеет вид

$$x_0 = (a, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad a \neq 0.$$

Будем неограниченно увеличивать число уравнений системы и рассматривать только последнюю компоненту решений задач Коши (2.5). Тогда получим последовательность функций $\{x_n^n(t)\}$. Справедлива следующая

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* 1–4. *Тогда для любого* $T > \tau$ *имеет место сходимость*

$$\left\| x_n^n(t) - y(t), \, L_2(0, T) \right\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2.6}$$

и предельная функция $y(t)$ *принадлежит соболевскому пространству* $W_2^1(\tau, T)$, *при этом она является обобщенным решением следующей начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом* (1.3):

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \ t \in [0, \tau], \quad y(\tau+0) = a. \end{cases} \tag{2.7}$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

При доказательстве теоремы 1 будем следовать схеме из [3].

Вначале выпишем систему интегральных уравнений, которой удовлетворяет последовательность из последних компонент решений серии задач Коши (2.2).

Поскольку начальные условия каждой из задач (2.2) нулевые, последние компоненты решений являются решениями следующих задач Коши:

$$\left(\frac{d}{dt}-\lambda_1^n\right)\left(\frac{d}{dt}-\lambda_2^n\right)\dots\left(\frac{d}{dt}-\lambda_n^n\right)x_n^n=\alpha_n g\big(t,x_n^n\big),$$

$$x_n^n\big|_{t=0}=\dots=\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x_n^n\bigg|_{t=0}=0,\quad n\geq n_0,$$

где $\lambda_1^n,\dots,\lambda_n^n$ — собственные значения матрицы A_n. Тогда по аналогии с [3] в силу формулы Коши получаем искомую систему нелинейных интегральных уравнений

$$x_n^n(t)=\alpha_n\int\limits_0^t\psi_n(t-s)g\big(s,x_n^n(s)\big)\,ds,\quad n\geq n_0,\tag{3.1}$$

где

$$\psi_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma\frac{e^{t\lambda}}{\big(\lambda-\lambda_1^n\big)P_{n-1}(\lambda)}\,d\lambda,\tag{3.2}$$

$$P_{n-1}(\lambda)=\big(\lambda-\lambda_2^n\big)\dots\big(\lambda-\lambda_n^n\big)$$

и Γ — контур в комплексной плоскости, охватывающий все собственные значения $\lambda_1^n,\dots,\lambda_n^n$.

Изучим некоторые свойства последовательности функций $\{\psi_n(t)\}$. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 1. *Имеет место тождество*

$$\int\limits_0^\infty e^{-i\eta t}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma\frac{e^{t\lambda}}{\big(\lambda-\lambda_1^n\big)P_{n-1}(\lambda)}\,d\lambda\right)dt\equiv\frac{1}{\big(i\eta-\lambda_1^n\big)P_{n-1}(i\eta)},\quad \eta\in R,\ n\geq n_0.\tag{3.3}$$

Доказательство см., например, в [18].

Используя тождество (3.3) и учитывая условия 1–3, нетрудно доказать следующие две леммы.

Лемма 2. *Существует n_1 такое, что справедлива оценка*

$$\|\alpha_n\psi_n(t),L_2(R^+)\|\leq\frac{1}{\sqrt{\theta}},\quad n\geq n_1.\tag{3.4}$$

Доказательство. Учитывая тождество (3.3), формулу (3.2) и равенство Парсеваля, имеем

$$\|\alpha_n\psi_n(t),L_2(R^+)\|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\frac{\alpha_n}{\big(i\eta-\lambda_1^n\big)P_{n-1}(i\eta)},L_2(R)\right\|.$$

Поэтому из условий 1–3 вытекает, что начиная с некоторого n_1 выполняется оценка (3.4).

Лемма 3. *Имеет место сходимость*

$$\|\alpha_n\psi_n(t) - e^{-\theta(t-\tau)}\chi(t-\tau), L_2(R^+)\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.5}$$

где $\chi(t)$ — *функция Хевисайда.*

Доказательство. Учитывая тождество (3.3) и равенство Парсеваля, имеем

$$\|\alpha_n\psi_n(t) - e^{-\theta(t-\tau)}\chi(t-\tau), L_2(R^+)\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\frac{\alpha_n}{(i\eta-\lambda_1^n)P_{n-1}(i\eta)} - \frac{e^{-i\eta\tau}}{i\eta+\theta}, L_2(R)\right\|.$$

Поэтому в силу условий 1–3 по теореме Лебега получаем (3.5).

Из леммы 3 вытекают следующие две леммы.

Лемма 4. *На отрезке* $[0,\tau]$ *имеет место равномерная сходимость*

$$x_n^n(t) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.6}$$

Доказательство. Учитывая ограниченность функции $g(t,v)$, из интегрального уравнения (3.1) при $t \in [0,\tau]$ имеем

$$\left|x_n^n(t)\right| \le G\int_0^\tau |\alpha_n\psi_n(s)|\,ds.$$

Поэтому из (3.5) получаем (3.6).

Лемма 5. *Пусть* $y(t)$ — *решение начальной задачи* (2.4). *Тогда на любом отрезке* $[\tau, T]$ *имеет место равномерная сходимость*

$$x_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty. \tag{3.7}$$

Доказательство. Поскольку $y(t)$ является решением начальной задачи (2.4), при $t \ge \tau$ справедливо тождество

$$y(t) \equiv \int_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)} g(s, y(s))\,ds,$$

при этом

$$y(t) \equiv 0, \quad t \in [0,\tau].$$

Поэтому, учитывая интегральное уравнение (3.1) и используя функцию Хевисайда, имеем

$$x_n^n(t) - y(t) \equiv \int_0^t (\alpha_n\psi_n(t-s) - e^{-\theta(t-s-\tau)}\chi(t-s-\tau))g\bigl(s, x_n^n(s)\bigr)\,ds$$

$$+ \int_0^t e^{-\theta(t-s-\tau)}\chi(t-s-\tau)\bigl(g\bigl(s, x_n^n(s)\bigr) - g(s, y(s))\bigr)\,ds.$$

Отсюда в силу условий на функцию $g(t,v)$, очевидно, вытекает оценка

$$\left|x_n^n(t) - y(t)\right| \le G\int_0^T |\alpha_n\psi_n(s) - e^{-\theta(s-\tau)}\chi(s-\tau)|\,ds + L\int_0^t \left|x_n^n(s) - y(s)\right|ds, \quad t \ge \tau.$$

Следовательно, используя неравенство Гроноулла, имеем

$$\left|x_n^n(t)-y(t)\right| \le e^{L(t-\tau)}\left(G\int\limits_0^T |\alpha_n\psi_n(s)-e^{-\theta(s-\tau)}\chi(s-\tau)|ds + L\int\limits_0^\tau \left|x_n^n(s)\right|ds\right)$$

при $t \ge \tau$. Отсюда в силу (3.5), (3.6) получаем (3.7).

Из лемм 4, 5 непосредственно вытекает доказательство теоремы 1.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Последние компоненты решений задач (2.5), очевидно, являются решениями следующих задач Коши:

$$\left(\frac{d}{dt}-\lambda_1^n\right)\left(\frac{d}{dt}-\lambda_2^n\right)\dots\left(\frac{d}{dt}-\lambda_n^n\right)x_n^n = \alpha_n g\bigl(t,x_n^n\bigr),$$

$$x_n^n|_{t=0} = \dots = \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}x_n^n\bigg|_{t=0} = 0, \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x_n^n\bigg|_{t=0} = \alpha_n a, \quad n \ge n_0.$$

Как в [3], имеем систему нелинейных уравнений для последовательности из последних компонент решений задач (2.5):

$$x_n^n(t) = \alpha_n\psi_n(t)a + \alpha_n\int\limits_0^t \psi_n(t-s)g\bigl(s,x_n^n(s)\bigr)\,ds, \quad n \ge n_0. \tag{4.1}$$

Система (4.1) при $a=0$ совпадает с (3.1), поэтому, учитывая свойства последовательности функций $\{\psi_n(t)\}$, доказательство сходимости (2.6) можно провести по аналогии с доказательством (3.6), (3.7).

Прежде всего заметим, что из (4.1) с учетом ограниченности функции $g(t,v)$ вытекает оценка

$$\left\|x_n^n(t),L_2(0,\tau)\right\| \le (|a|+G\tau)\|\alpha_n\psi_n(t),L_2(0,\tau)\|.$$

Поэтому в силу леммы 3 имеем

$$\left\|x_n^n(t),L_2(0,\tau)\right\| \to 0, \quad n\to\infty. \tag{4.2}$$

Докажем сходимость последовательности $\bigl\{x_n^n(t)\bigr\}$ в пространстве $L_2(\tau,T)$. Вначале рассмотрим интегральное уравнение

$$y(t) = e^{-\theta(t-\tau)}a + \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)}g(s,y(s))\,ds, \quad t\ge\tau, \tag{4.3}$$

при этом $y(t)\equiv 0$, $t\in[0,\tau)$. Очевидно, на каждом промежутке $[k\tau,(k+1)\tau)$, $k=1,2,\dots$, функция $y(t)$ однозначно определяется и для любого $T>\tau$ имеем $y(t)\in C[\tau,T]$.

Учитывая интегральные уравнения (4.1) и (4.3), для разности $\bigl(x_n^n(t)-y(t)\bigr)$ приходим к тождеству

$$x_n^n(t)-y(t) \equiv \alpha_n\psi_n(t)a - e^{-\theta(t-\tau)}a$$
$$+\alpha_n\int\limits_0^t \psi_n(t-s)g\bigl(s,x_n^n(s)\bigr)\,ds - \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)}g(s,y(s))\,ds, \quad t\ge\tau.$$

По аналогии с доказательством леммы 5 перепишем его в следующем виде:

$$x_n^n(t)-y(t)\equiv(\alpha_n\psi_n(t)-e^{-\theta(t-\tau)})a$$
$$+\int\limits_0^t(\alpha_n\psi_n(t-s)-e^{-\theta(t-s-\tau)}\chi(t-s-\tau))g\big(s,x_n^n(s)\big)\,ds$$
$$+\int\limits_0^t e^{-\theta(t-s-\tau)}\chi(t-s-\tau)(g(s,x_n^n(s))-g(s,y(s)))\,ds.$$

Учитывая условие 4, нетрудно получить оценку

$$\big|x_n^n(t)-y(t)\big|\le|\alpha_n\psi_n(t)-e^{-\theta(t-\tau)}||a|+G\int\limits_0^t|\alpha_n\psi_n(s)-e^{-\theta(s-\tau)}\chi(s-\tau)|\,ds$$
$$+L\int\limits_0^\tau\big|x_n^n(s)\big|\,ds+L\int\limits_\tau^t\big|x_n^n(s)-y(s)\big|\,ds,\quad t\ge\tau.$$

Отсюда при $t\in(\tau,T)$ имеем

$$\int\limits_\tau^t\big|x_n^n(\xi)-y(\xi)\big|\,d\xi\le|a|\int\limits_\tau^T|\alpha_n\psi_n(\xi)-e^{-\theta(\xi-\tau)}|\,d\xi$$
$$+G\int\limits_\tau^T\int\limits_0^\xi|\alpha_n\psi_n(s)-e^{-\theta(s-\tau)}\chi(s-\tau)|\,dsd\xi$$
$$+(T-\tau)L\int\limits_0^\tau\big|x_n^n(s)\big|\,ds+L\int\limits_\tau^t\int\limits_\tau^\xi\big|x_n^n(s)-y(s)\big|\,dsd\xi.$$

Используя неравенство Гроноулла, получим

$$\int\limits_\tau^t\big|x_n^n(\xi)-y(\xi)\big|\,d\xi\le e^{L(t-\tau)}\Bigg(|a|\int\limits_\tau^T|\alpha_n\psi_n(\xi)-e^{-\theta(\xi-\tau)}|\,d\xi$$
$$+G\int\limits_\tau^T\int\limits_0^\xi|\alpha_n\psi_n(s)-e^{-\theta(s-\tau)}\chi(s-\tau)|\,dsd\xi+(T-\tau)L\int\limits_0^\tau\big|x_n^n(s)\big|\,ds\Bigg).$$

Отсюда в силу (3.4), (3.5), (4.2) вытекает сходимость (2.6).

Покажем, что предельная функция $y(t)$ принадлежит $W_2^1(\tau,T)$ и является обобщенным решением задачи (2.7).

Из (4.3) следует, что $y(t)\in C^1(k\tau,(k+1)\tau)$, но, вообще говоря, функция $y(t)$ не принадлежит классу $C^1(\tau,T)$ при любом $T>\tau$. Действительно, поскольку $y(\tau+0)=a$, имеем

$$y'(2\tau+0)-y'(2\tau-0)=g(\tau,a)-g(\tau,0).$$

Поэтому при произвольной функции $g(t,v)$ решение уравнения (4.3) может не иметь производной в точке $t=2\tau$, но, очевидно, имеет обобщенную производную $D_ty(t)$ на любом интервале (τ,T), при этом

$$D_ty(t)=-\theta y(t)+g(t-\tau,y(t-\tau)),\quad\tau<t<T.$$

Следовательно, функция $y(t) \in W_2^1(\tau, T) \cap L_2(0, T)$ и является обобщенным решением задачи (2.7).

Теорема доказана.

§ 5. Некоторые обобщения

Предельные теоремы позволяют указать эффективный метод для численного нахождения значений последней компоненты решений в случае очень большой размерности n (см., например, [1]). Еще одно интересное приложение таких теорем связано с использованием их при рассмотрении более общих нелинейных систем дифференциальных уравнений высокой размерности

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \widetilde{F}^n(t, \tilde{x}), \quad n \gg 1. \tag{5.1}$$

В ряде случаев приближенное значений последней компоненты решений $\tilde{x}_n(t)$ может быть получено применением следующего простого *метода сравнения*.

Идея этого метода заключается в том, чтобы исследуемую систему дифференциальных уравнений (5.1) при достаточно больших n рассматривать как возмущение исходной системы (1.1), а затем сравнивать последние компоненты решений задач Коши для систем (1.1) и (5.1). Будем неограниченно увеличивать число уравнений в обеих системах, и пусть для простоты в задачах Коши для них начальные условия будут нулевыми. Предположим, что для последовательностей функций, состоящих из последних компонент решений серии задач Коши для (1.1) и (5.1), установлена сходимость

$$\left|x_n^n(t) - \tilde{x}_n^n(t)\right| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.2}$$

Тогда, принимая во внимание теорему 1, нахождение приближенных значений последней компоненты решения системы (5.1) при $n \gg 1$ сводим к решению начальной задачи (2.4). Для получения оценки погрешности такой аппроксимации $\tilde{x}_n(t) \approx y(t)$ нужно оценить скорость сходимости (2.3) и (5.2).

Описанный метод позволяет эффективно доказывать предельные теоремы для некоторых классов систем дифференциальных уравнений высокой размерности (см., например, [5, 9, 10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.

2. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А.* О дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 538–552.

3. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 58–68.

4. *Демиденко Г. В., Мельник И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.

5. *Demidenko G. V., Kotova T. V.* Limit properties of solutions to one class of systems of differential equations with parameters // J. Anal. Appl. 2010. V. 8, N 2. P. 63–74.

6. *Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.

7. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.

8. *Хидиров Б. Н.* Об одном подходе к моделированию регуляторных механизмов живых систем // Мат. моделирование. 2004. Т. 16, № 7. С. 77–91.
9. *Котова Т. В., Мельник И. А.* О свойствах решений одной нелинейной системы дифференциальных уравнений с параметрами // Новосибирск, 2010. 17 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 253).
10. *Матвеева И. И., Мельник И. А.* О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 312–324.
11. *Салуквадзе М. Е.* К задаче синтеза оптимального регулятора в линейных системах с запаздыванием, подверженных постоянно действующим возмущениям // Автоматика и телемеханика. 1962. Т. 23, № 12. С. 1595–1601.
12. *Красовский Н. Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, № 4. С. 716–724.
13. *Репин Ю. М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, № 2. С. 226–235.
14. *Györi I.* Two approximation techniques for functional differential equations // Comput. Math. Appl. 1988. V. 16, N 3. P. 195–214.
15. *Györi I., Turi J.* Uniform approximation of a nonlinear delay equation on infinite intervals // Nonlinear Anal. TMA. 1991. V. 17, N 1. P. 21–29.
16. *Krasznai B., Györi I., Pituk M.* The modified chain method for a class of delay differential equations arising in neural networks // Math. Comput. Modelling. 2010. V. 51, N 5–6. P. 452–460.
17. *Демиденко Г. В.* О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер. Математический форум. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. Т. 5. С. 45–56.
18. *Демиденко Г. В.* Задача Коши для обобщенных уравнений С. Л. Соболева // Функциональный анализ и математическая физика. Новосибирск: Ин-т математики, 1985. С. 88–105.

Статья поступила 4 сентября 2012 г.

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru