Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 517.518+517.18

ЯДРО КАРЛЕМАНА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Ф. Н. Гарифьянов, С. А. Модина

Аннотация. Рассмотрены свойства известного ядра Карлемана. Указаны приложения к теории целых функций и разностных операторов.

Ключевые слова: граничная задача Карлемана, разностные уравнения, проблема моментов.

Введение. Пусть R — внутренность фундаментального многоугольника собственно разрывной группы Γ (конкретной реализации на плоскости замкнутой римановой поверхности конечного рода ρ), а $S_r(z)$ — преобразования группы такие, что $S_r(\overline{R}) \cap \overline{R} \neq \varnothing$, $S_r(z) \neq z$. Порождающие преобразования Γ и обратные к ним индуцируют на каждой стороне инволютивный сдвиг $\alpha(t) : \partial^+ R \to \partial^- R$, имеющий в вершинах t_k точки разрыва первого рода. В 1932 г. Карлеман в докладе на международном математическом конгрессе в Цюрихе [1] впервые обратил внимание на важность исследования интегрального уравнения Фредгольма

$$(T_\lambda \varphi)(t) \equiv \varphi(t) + (4\pi i)^{-1} \lambda \int\limits_{\partial R} K(t, \tau) \varphi(\tau)\, d\tau = 2^{-1} g(t), \quad t \in \partial R \setminus \{t_k\}, \tag{1}$$

которое при $\lambda = 1$ впредь будем называть *уравнением Карлемана*. Здесь

$$K(t, \tau) = A(t, \tau) - \alpha'(\tau) A[\alpha(t), \alpha(\tau)], \tag{2}$$

где, в свою очередь,

$$A(z, \tau) = (\tau - z)^{-1} + \sum_r [\tau - S_r(z)]^{-1}. \tag{3}$$

Ядро (3) также называется *ядром Карлемана*.

Поясним, почему возникло ядро именно такой структуры. Рассмотрим простейший случай задачи Карлемана (так называемую задачу о скачке):

$$F^+(t) - F^+[\alpha(t)] = g(t), \quad t \in \partial R \setminus \{t_k\}, \tag{4}$$

с естественным ограничением на свободный член

$$g(t) + g[\alpha(t)] = 0, \tag{5}$$

гарантирующим от переопределенности. Карлеман подчеркивает, что интегральное представление искомого решения в виде интеграла Коши здесь недопустимо, поскольку тогда краевое условие (4) сведется к сингулярному интегральному уравнению в вырожденном случае. Чтобы избавиться от сингулярности,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–97008–р–Поволжье–а и 12–01–00636–а).

он предложил искать решение в виде

$$F(z) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\partial R} A(z,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau + C \tag{6}$$

с неизвестной плотностью $\varphi(\tau)$, удовлетворяющей условию (5), что приводит к уравнению (1). Его исследования Карлеман не провел.

Впервые попытка исследования уравнения (1) была предпринята В. И. Показеевым [2]. Однако его результаты требуют уточнения [3, с. 49]. Действительно, в статье [2] утверждается , что однородное уравнение

$$T_1\varphi = 0 \tag{7}$$

имеет лишь тривиальное решение, т. е. уравнение Карлемана безусловно разрешимо по альтернативе Фредгольма. Отсюда делается вывод о безусловной разрешимости задачи (4). Между тем хорошо известно (см. [4, 5]), что критерием разрешимости этой задачи при $\rho \geqslant 1$ является выполнение условий

$$\int\limits_{\partial R} g(t)h_j(t)\,dt = 0, \quad j = \overline{1,\rho}, \tag{8}$$

где $\{h_j(t)\}$ — линейно независимая система аналитических в R автоморфных форм первого порядка (автоморфных ковариантов). Необходимость условий (8) легко проверить и непосредственным интегрированием. Функции $h_j(t)$ являются решениями союзного уравнения

$$T_1'\psi = 0, \tag{9}$$

что опять проверяется прямой подстановкой. Такие парадоксы у В. И. Показеева возникли за счет того, что он считал интеграл (6) функцией, голоморфной вне ∂R. На самом деле интеграл (6) вне ∂R имеет линии разрыва.

Основная трудность при исследовании уравнения (1) состоит в следующем. Кроме ранее указанных союзное уравнение (9) может иметь дополнительные решения, удовлетворяющие условию

$$\psi(t) = \alpha'(t)\psi[\alpha(t)], \tag{10}$$

но не являющиеся граничными значениями аналитических в R функций. Следуя терминологии Ф. Д. Гахова [6, с. 568], назовем их *паразитическими*. При наличии паразитических решений уравнение Карлемана имеет больше условий разрешимости, чем соответствующая задача о скачке (4), т. е. они не равносильны. Такое может возникнуть за счет того, что не любое решение задачи (4) представимо в виде (6). Утверждение о равносильности уравнения Карлемана и задачи о скачке далее будем называть *гипотезой Карлемана*. Вся проблема заключается в том, чтобы доказать отсутствие паразитических решений.

В 1983 г. вышла в свет статья [7], где в ядро Карлемана (3) были добавлены дополнительные слагаемые, соответствующие некоторым преобразованиям Γ, удовлетворяющим условию $S_r(\overline{R})\cap\overline{R} = \varnothing$. Другими словами, ядро по-прежнему имеет вид (3) и содержит конечное число слагаемых, но кроме слагаемых, предложенных Карлеманом, имеются и дополнительные. Такое ядро назовем *ядром типа Карлемана*, а соответствующее уравнение (1) — *уравнением типа Карлемана.* Основной результат в [7] формулируется так: за счет введения в ядро (3) дополнительных слагаемых всегда можно добиться справедливости гипотезы Карлемана.

В 1984 г. Л. И. Чибрикова предприняла две попытки доказать гипотезу Карлемана для исходного ядра (3). В первой части статьи [8] сформулированы теоремы 1–4, на основании которых сделаны далеко идущие выводы, в том числе и о справедливости гипотезы Карлемана. По поводу этой работы сделаем два замечания. Во-первых, доказательства теорем 1–4 так никогда и не были опубликованы. Во-вторых, совокупность этих теорем противоречива. Приведем наиболее яркий пример. В обозначениях из [8] имеем $K_\lambda \equiv T_\lambda$. В теореме 3 из [8, с. 819], в частности, утверждается, что константа является одной из собственных функций уравнения $(K_{-1}\varphi)(t) = 0$, в теореме 4 из [8] — что константа является одной из собственных функций уравнения $(K_1\varphi)(t) = 0$. Непонятно, каким образом одна и та же функция (в данном случае постоянная) может быть собственной функцией уравнения $(K_\lambda\varphi)(t) = 0$ при двух различных значениях параметра λ?! Заметим, кстати, что приведенное утверждение из теоремы 4 просто неверно (проверяется непосредственной подстановкой).

В [9] была сделана попытка доказать гипотезу Карлемана и получить из нее некоторые следствия в частном случае двоякопериодической группы ($\rho = 1$). К сожалению, приведенное доказательство неверно. В [9] неверна формула (25), а именно на ней основаны выводы теорем. Неверность этой формулы можно показать многими способами, но проще всего установить, что она противоречит самим результатам [9]. Действительно, на с. 202 утверждается, что существует единственное нетривиальное решение уравнения $(K_{-1}\varphi)(t) = 0$ со свойством (5), причем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R} A(z,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = C \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R} A(z,\tau)[\varphi(\tau) - C]\,d\tau = 0, \quad z \in R. \qquad (*)$$

Автор [9] утверждает, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R} A(z,\tau)\psi(\tau)\,d\tau = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R} \psi(\tau)A(z,\tau)\,d\tau = -\Theta(z), \quad z \in R^-,$$

причем $\Theta^-(t) = \psi(t)$. Это и есть формула (25) в [9]. Применим к двум последним равенствам формулы Сохоцкого. Имеем

$$0 = \frac{1}{2}[\psi(t) - \psi[\alpha(t)]] + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R} A(t,\tau)\psi(\tau)\,d\tau,$$

$$-\psi(t) = -\frac{1}{2}[\psi(t) - \psi[\alpha(t)]] + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R} A(t,\tau)\psi(\tau)\,d\tau.$$

Взяв их разность, получим $\psi(t) = \psi(t) - \psi[\alpha(t)]$, т. е. $\psi(t) \equiv 0$. Тогда $(*) \Rightarrow \varphi(\tau) = C$ и $C = 0$ в силу (5). Собственная функция $\varphi(t)$ тождественно равна 0; противоречие. Остается сделать вывод, что справедливость гипотезы Карлемана до настоящего времени не установлена.

Несмотря на вышесказанное, можно указать ряд полезных приложений интегрального представления (6). Но это совсем не те приложения, которые указал Карлеман в [1]. Дело в том, что неоднородная задача Карлемана, простейшим частным случаем которой является задача (4), давно уже исследована сведением к задаче Римана на римановой поверхности [4, 5]. Поставим вопрос: можно ли регуляризовать задачу (4), используя ядра вида (3), но содержащие меньше слагаемых, чем это указал Карлеман? При этом проблема равносильности регуляризации не будет для нас существенной. Положительный ответ на этот вопрос был впервые получен на примере двоякопериодической группы в [10], а в общем случае — в [11]. Он заключается в том, что это возможно для тех и только тех групп, для которых каждая вершина фундаментального многоугольника является общей для четного или бесконечного числа конгруэнтных ему многоугольников, сходящихся в этой точке. Тогда множество преобразований $S_r(z)$, входящих в ядро (3), можно разбить на два таких непересекающихся подмножества B_1 и B_2, что

$$A_1(z,\tau) = (\tau - z)^{-1} + \sum_{S_r \in B_1} [\tau - S_r(z)]^{-1}, \quad A_2(z,\tau) = \sum_{S_r \in B_2} [\tau - S_r(z)]^{-1}.$$

При этом $A_1 + A_2 = A$ и ограниченным будет не только ядро (2), но и ядра $K_j(t,\tau) = A_j(t,\tau) - \alpha'(\tau) A_j[\alpha(t), \alpha(\tau)]$, $\tau, t \in \partial R$, $j = 1, 2$. Будем говорить, что в этом случае ядро Карлемана *можно расщепить на ядра* A_1 и A_2. Конкретный алгоритм расщепления указан в [11]. Оно возможно для некоторых конечных групп, двоякопериодической группы и изоморфной ей группы с двумя предельными точками и некоторых фуксовых групп.

Замечание 1. Любопытно, что в случае римановой поверхности рода $\rho = 1$ фундаментальную область двоякопериодической группы можно взять либо в виде параллелограмма, либо в виде правильного шестиугольника («соты»). В первом случае расщепление соответствующего ядра Карлемана возможно, во втором — нет.

Из двух ядер, полученных в результате расщепления ядра (3), более полезным в смысле приложений оказалось второе, не содержащее ядра Коши. Это объясняется тем, что интеграл типа Коши $\Phi(z)$ по замкнутому контуру является кусочно голоморфной функцией. Между тем ядро A_2 однородно в том смысле, что все входящие туда преобразования переводят точку z из R во внешность R. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \varphi(\tau) A_2(z,\tau)\, d\tau = \sum_{S_r \in B_2} \Phi^-[S_r(z)], \quad z \in R, \tag{11}$$

в то время как

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \varphi(\tau) A_1(z,\tau)\, d\tau = \Phi^+(z) + \sum_{S_r \in B_1} \Phi^-[S_r(z)], \quad z \in R. \tag{12}$$

Соотношение (11) выгодно отличается от (12) тем, что туда входят значения только одной функции, аналитической вне R. Использование ядра A_2 позволило получить ряд интересных приложений. Были рассмотрены линейные разностные уравнения (л.р.у.) с постоянными коэффициентами в классе функций, аналитических в окрестности бесконечно удаленной точки и исчезающих на бесконечности, к которым не применимы обычные методы исследования операторов свертки [12]. Другим приложением является построение биортогонально сопряженных на контуре систем аналитических функций и представления некоторых классов аналитических в круговых невыпуклых областях функций соответствующими биортогональными рядами (см., например, [13]). С помощью преобразования Бореля соотношение (11) можно записать в терминах теории целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.). Это позволило исследовать классические проблемы моментов ц.ф.э.т. с экспоненциальным весом [14, 15], причем рассмотреть корректные и некорректные задачи.

Основной целью данной статьи является получение подобных приложений для исходного ядра Карлемана. Еще раз подчеркнем, что вопрос о справедливости гипотезы Карлемана здесь не рассматривается. Вместо интегрального уравнения (1) исследуется другое уравнение, где контур интегрирования уже не является замкнутым. Для регуляризации задачи (4) используется интегральное представление

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Omega} A(z,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau+C,\quad z\in R, \tag{13}$$

где Ω — «половина» ∂R (более подробно см. ниже п. 1).

В п. 1 рассматриваются л.р.у., порожденные ядром (3).

В п. 2 теория автоморфных функций применяется для исследования проблемы моментов ц.ф.э.т. и проблемы полноты систем функций в $L_2(\Omega)$, связанных с ядром (3).

1. Пусть $\Omega\subset\partial R$ удовлетворяет трем условиям:

1) Ω — кусочно гладкая кривая (или конечная совокупность таких кривых Ω_j, причем $\overline{\Omega}_k\cap\overline{\Omega}_m=\varnothing$ при $k\neq m$), не содержащая конгруэнтных точек;

2) $\overline{\Omega}\cup\alpha(\Omega)=\partial R$ (с точностью до вершин t_k);

3) если B_1 — выпуклая оболочка множества Ω, то $R\backslash\overline{B_1}\neq\varnothing$.

Подставляя в условие (4) интегральное представление (13) и используя формулы Сохоцкого, имеем

$$(H\varphi)(t)\equiv\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Omega} h(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=g(t),\quad t\in L\backslash t_k, \tag{14}$$

где ядро

$$h(t,\tau)=A(t,\tau)-A[\alpha(t),\tau] \tag{15}$$

ограничено. Последнее прямо следует из определения ядра (3). Итак, оператор H является каноническим оператором Фредгольма. Укажем на конкретных примерах некоторые приложения оператора (14).

Пусть R — единичный квадрат с вершинами $t_1=-t_3=-2^{-1}(1+i)$, $t_2=-t_4=-2^{-1}(1-i)$, перечисленными в порядке обхода положительно ориентированной границы ∂R, а L — ломаная с вершинами $\tau_1=-2^{-1}$, t_1, $\tau=-2^{-1}i$. Возьмем множество $\Omega=L\cup(-L)$. Рассмотрим л.р.у.

$$(Vf)(z)\equiv f(z)+\sum_{j=1}^{8} f[S_{j(z)}]=g(z),\quad z\in R, \tag{16}$$

при следующих предположениях.

1. Преобразования $S_j(z)$ входят в соответствующее ядро Карлемана (3).

2. Решение $f(z)$ ищется в классе функций, голоморфных вне L и исчезающих на бесконечности. В узлах Ω допускаются логарифмические особенности, причем граничные значения $f^{\pm}(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера на любом компакте $\bar{d}\in\Omega$, не содержащем узлов. Такой класс обозначим через B.

3. Свободный член $g(z)$ аналитичен в R, и его граничное значение $g^{+}(t)$ лежит в $H(\partial R)$.

Назовем такую задачу *задачей* I.

Будем искать решение л.р.у. (16) в виде интеграла типа Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Omega}(\tau-z)^{-1}\varphi(\tau)\,d\tau \tag{17}$$

с неизвестной плотностью $\varphi(\tau)$. Пользуясь (17), перепишем (16) в виде

$$(E\varphi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega} \varphi(\tau)A(z,\tau)\,d\tau = g(z), \quad z \in R. \tag{18}$$

Перейдем в соотношении (18) к пределу по $z \to t \in \Omega$, т. е.

$$(E^{+}\varphi)(t) \equiv 2^{-1}\varphi(t) + (E\varphi)(t) = g^{+}(t), \tag{19}$$

где особый интеграл $(E\varphi)(t)$ понимается в смысле главного значения по Коши. Устремим теперь в равенстве (18) точку z к точке $\alpha(t)$. Тогда

$$(E^{+}\varphi)(\alpha(t)) = -2^{-1}\varphi(t) + (E\varphi)(\alpha(t)) = g^{+}(\alpha(t)). \tag{20}$$

Вычитая из равенства (19) равенство (20), имеем

$$(H\varphi)(t) \equiv g^{+}(t) - g^{+}[\alpha(t)]. \tag{21}$$

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение Фредгольма

$$(H\varphi)(t) = 0. \tag{22}$$

Теорема 1. *Уравнение* (22) *имеет единственное нетривиальное решение* $\varphi_0(t)$, *причем с учетом нормировки*

$$\int_{\Omega} \varphi_0(\tau)\,d\tau = 1. \tag{23}$$

Доказательство. Рассмотрим соответствующее союзное уравнение

$$H'\psi = 0. \tag{24}$$

В силу кососимметричности ядра (3) при $\rho = 1$ запишем (24) в виде

$$\psi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega} A(t,\tau)\psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega} A(t,\alpha(\tau))\psi(\tau)\,d\tau = 0$$

или

$$\psi(\tau) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \psi_1(\tau)A(t,\tau)\,d\tau = 0.$$

Здесь $\psi_1(\tau) = \{\psi(\tau),\ \tau \in \Omega;\ \psi[\alpha(\tau)],\ \tau \in \alpha(\Omega)\}$. Очевидно, что постоянная является решением уравнения (24).

Предположим, что фундаментальная система решений (ф.с.р.) уравнения (24) содержит более чем одну функцию. Тогда в ф.с.р. уравнения (22) входит функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{\Omega} \varphi(\tau)\,d\tau = 0. \tag{25}$$

Покажем, что это невозможно. Пусть $M = \max|\varphi(t)|$, $t \in \Omega$. В силу симметрии без ограничения общности считаем, что последнее равенство достигается при $t \in [t_1, \tau_2]$, т. е. $h(t,\tau) = (u+i)^{-1} + (u+1+i)^{-1} + (u-1+i)^{-1} - (u-2i)^{-1} - (u-1-2i)^{-1} - (u+1-2i)^{-1}$, где $u = \tau - t$. Оценим интегралы от слагаемых, входящих в ядро (15), с учетом условия (25). Воспользуемся равенством $\int_{\Omega} \varphi(\tau)h(t,\tau)\,d\tau = \int_{\Omega} \varphi(\tau)[h(t,\tau) - h(t,0)]\,d\tau$. Рассмотрим два случая.

1. $\tau \in [t_1, \tau_2]$. Тогда

$$\beta_1 = |\tau(\tau - t + i)^{-1}(t - i)^{-1}| \leq 3^{-1}\sqrt{2};$$

$$\beta_2 = |\tau(\tau - t + 1 + i)^{-1}(t - 1 - i)^{-1}| \leq 2\sqrt{2}(\sqrt{65})^{-1};$$

$$\beta_3 = |\tau(\tau - t - 1 + i)^{-1}(t + 1 - i)^{-1}| \leq 0,4; \quad \beta_4 = |\tau(\tau - t - 2i)^{-1}(t + 2i)^{-1}| \leq 6^{-1}\sqrt{2};$$

$$\beta_5 = |\tau(\tau - t - 1 - 2i)^{-1}(t + 1 + 2i)^{-1}| \leq 2(\sqrt{85})^{-1};$$

$$\beta_6 = |\tau(\tau - t + 1 - 2i)^{-1}(t - 1 + 2i)^{-1}| \leq 2\sqrt{2}(\sqrt{221})^{-1}.$$

Итак,

$$\left| \int_{t_1}^{\tau_2} \varphi(\tau)[h(t,\tau) - h(t,0]) \, d\tau \right| \leq M.$$

2. $\tau \in [t_3, -\tau_2]$. В этом случае справедливы оценки

$$\beta_1 \leq 6^{-1}\sqrt{2}; \quad \beta_2 \leq \sqrt{2}(\sqrt{65})^{-1}; \quad \beta_3 \leq (2\sqrt{5})^{-1};$$

$$\beta_4 \leq 3^{-1}\sqrt{2}; \quad \beta_5 \leq (\sqrt{5})^{-1}; \quad \beta_6 \leq (\sqrt{13})^{-1}.$$

Поэтому

$$\left| \int_{t_3}^{-\tau_2} \varphi(\tau)[h(t,\tau) - h(t,0)] \, d\tau \right| \leq M.$$

Модуль каждого из двух интегралов по «вертикальным» отрезкам можно грубо оценить сверху числом $3 \cdot 2^{-1}\sqrt{2}M$. Поскольку $3\sqrt{2} + 2 < 2\pi$, то $M = 0$; пришли к противоречию, доказывающему теорему.

Следствие 1. *Неоднородное интегральное уравнение* (21) *безусловно разрешимо.*

Следствие 2. *Функция* $\varphi_0(t)$ *нечетна.*

Действительно, функция $\varphi_0(-t)$ также удовлетворяет равенству (22) (достаточно в этом равенстве заменить переменные τ и t на $-\tau$ и $-t$ соответственно, чтобы убедиться в этом и воспользоваться условием (23)).

Осуществим обратный переход от интегрального уравнения (21) к л.р.у. (16). Вообще говоря, вместо исходного уравнения (18) получим

$$(E\varphi)(z) = g(z) + C, \quad z \in R. \tag{26}$$

Остается выяснить, когда постоянная в равенстве (26) обращается в нуль. Пусть вначале $g(z) \equiv 0$. Тогда $C = 0$ в силу нечетности функции $\varphi_0(t)$.

Теорема 2. *Однородное л.р.у.*

$$(Vf)(z) = 0, \quad z \in R, \tag{27}$$

имеет единственное решение

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L (\tau - z)^{-1} \varphi_0(\tau) \, d\tau.$$

Теорема 3. *Пусть функция $g(z)$ нечетна. Неоднородное л.р.у.* (16) *безусловно разрешимо, и его общее решение имеет вид*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L(\tau-z)^{-1}\varphi(\tau)\,d\tau+\lambda f_0(z),$$

где $\varphi(\tau)$ — решение интегрального уравнения (21).

Доказательство. Достаточно использовать симметрию множества Ω относительно начала координат. Тогда $(H\varphi)(t)+(H\varphi)(-t)=0\Rightarrow\varphi(t)+\varphi(-t)=\beta\varphi_0(t)\Rightarrow\varphi(t)=-\varphi(-t)$. В силу нечетности константа в равенстве (26) обращается в нуль.

В общем случае неудобно использовать оператор H, поскольку он не является обратимым. Заметим, что ядро Карлемана (3) в данном случае представляет собой сумму первых девяти слагаемых разложения функций $\zeta(\tau-z)$ в ряд простейших дробей. Здесь $\zeta(z)$ — квазипериодическая дзета-функция Вейерштрасса, построенная по примитивным периодам 1 и i [16, гл. 2, § 11]. Пусть $D(z,\tau)=\zeta(\tau-z)-A(z,\tau)$. В силу следствия 1 и условия (23) существует решение $\varphi(t)$ неоднородного уравнения (21), удовлетворяющее равенству (25). Поэтому

$$(H_1\varphi)(t)\equiv\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\{D[\alpha(t),\tau]-D(t,\tau)\}\varphi(\tau)\,d\tau=g^+(t)-g^+[\alpha(t)]. \tag{28}$$

Имеем (28)⇒(25), что проверяется непосредственным интегрированием (28). Итак, оператор H_1 уже обратим. Поэтому $\varphi(t)=H_1^{-1}[g^+(t)-g^+[\alpha(t)]]$. Совершенно аналогично $\varphi_0(t)=H_1^{-1}(\eta_t)$, где кусочно постоянная η_t равна $\zeta(t)-\zeta[\alpha(t)]$.

Теорема 4. *Л.р.у.* (16) *разрешимо тогда и только тогда, когда*

$$\big(EH_1^{-1}(g^+(t)-g^+[\alpha(t)])\big)(0)=g(0).$$

Замечание 2. Функция $(Vf)(z)$ является кусочно голоморфной функцией. Множество ее точек аналитичности распадается на две связные компоненты, одной из которых является квадрат R, а другая содержит бесконечно удаленную точку.

Замечание 3. По каждой функции $g(z)$ можно подобрать такую постоянную C_g, что л.р.у. $(Vf)(z)=g(z)+C_g$, $z\in R$, безусловно разрешимо.

Замечание 4. Совершенно аналогичные результаты можно получить для семиэлементного л.р.у., выведенного из л.р.у. (16) исключением из левой части двух слагаемых в результате соответствующего преобразования $S(z)\equiv z\pm(1-i)$. Получить аналоги оценок, приведенных при доказательстве теоремы 1, предоставляем читателю.

Замечание 5. При $g(z)\equiv C\neq 0$ л.р.у. (16) неразрешимо.

Пусть теперь $\Omega=l_1\cup l_2$, где l_1,l_2 соответственно левая и нижняя стороны квадрата. Оценки величин β_j, $j=\overline{1,6}$, получаемые в этом случае, также позволяют доказать теорему 1. Однородное л.р.у. (27) будет разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\big(EH_1^{-1}(\eta_t)\big)(0)=0$. Не удалось выяснить, выполняется ли оно. Множество Ω уже не симметрично относительно начала координат, и вопрос о справедливости теоремы 3 также остается открытым. Тем не менее выполняется теорема 4. Такую задачу назовем *задачей* II.

Теперь рассмотрим случай конечных групп. Пусть D — полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$. Если добавить к D «половину» границы, то получим фундаментальное множество группы Γ. Эта группа содержит четыре преобразования $\sigma_0(z) = z$, $\sigma_1(z) = -z$, $\sigma_2(z) = z^{-1}$, $\sigma_3(z) = -z^{-1}$. На границе они индуцируют сдвиг $\alpha(t) = \{-t,\ \operatorname{Im} t = 0;\ -t^{-1},\ |t| = 1\}$. Ядро (3) имеет вид

$$A(z,\tau) = \sum_{j=0}^{3} (\tau - \sigma_j(z))^{-1}.$$

Тогда для ядра (15) имеем $h(t,\tau) = 0$, т. е. $\varphi(t) = g^+(t) - g^+[\alpha(t)]$, $t \in \Omega$. Пусть $\Omega = l_1 \cup l_2$, где $l_1 \subset [-1;1]$ и $t \in l_2 \Rightarrow |t| = 1$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Omega} \varphi(\tau) A(z,\tau)\, d\tau = g(z) - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\alpha(l_2)} \tau^{-1} g^+(\tau)\, d\tau,$$

если воспользоваться тождеством

$$\sigma'(\tau)(\sigma(\tau) - z)^{-1} = (\tau - \sigma^{-1}(z))^{-1} - (\tau - \sigma^{-1}(\infty))^{-1}, \quad \sigma \in \Gamma.$$

Теорема 5. *Четырехэлементное функциональное уравнение*

$$(Vf)(z) \equiv \sum_{j=0}^{3} f[\sigma_j(z)] = g(z), \quad z \in D,$$

в классе функций B разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\int\limits_{\alpha(l_2)} \tau^{-1} g^+(\tau)\, d\tau = 0.$$

При его выполнении задача имеет единственное решение

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Omega} (\tau - z)^{-1} [g^+(\tau) - g^+[\alpha(\tau)]]\, d\tau.$$

Замечание 6. Возьмем любую конечную группу и рассмотрим ядро типа Карлемана, в которое входят все преобразования группы. Тогда (21) $\Rightarrow \varphi(t) = g^+(t) - g^+[\alpha(t)]$ и непосредственной подстановкой в (26) при $C = 0$ остается получить условие разрешимости.

Замечание 7. При фиксированной функции $g(z)$ картина разрешимости задачи, вообще говоря, может зависеть от выбора множества Ω.

Замечание 8. Изложенная выше схема исследования функционального уравнения пригодна и для групп более сложной структуры (разумеется, при наличии оценок, позволяющих доказать аналог теоремы 1). Пусть, например, Γ — фуксова группа сходящегося типа [17, с. 226]. Тогда вместо дзета-функции Вейерштрасса надо взять квазиавтоморфный аналог ядра Коши, построенный Л. И. Чибриковой и В. В. Сильвестровым [18] в виде тэта-ряда Пуанкаре.

2. Все полученные результаты можно интерпретировать как некоторые задачи теории ц.ф.э.т. Для этого воспользуемся преобразованием Бореля [19, гл. 1, § 1]. Покажем это на примере задачи I в случае, когда функция $g(z)$ нечетна (теорема 3). Рассматриваем $f(z)$ как нижнюю функцию, ассоциированную по Борелю с четной ц.ф.э.т. $F(z)$. Сопряженной индикаторной диаграммой является шестиугольник B_1 с вершинами $t_1, \tau_2, -\tau_1, t_3, -\tau_2, \tau_1$, перечисленными в порядке положительного обхода его границы. Выберем точку $z \in R\backslash\overline{B}_1$, причем $\operatorname{Im} z > 0$. Получим

$$f[S_j(z)] = \int\limits_{\arg\tau=\frac{5\pi}{4}} F(\tau)\exp(-S_j(z)\tau)\,d\tau, \quad j=\overline{0,5},$$

где $S_0(z)=z$, $S_1(z)=z-1$, $S_2(z)=z-1-i$, $S_3(z)=z-1+i$, $S_4(z)=z+i$, $S_5(z)=z+i+1$. Кроме того,

$$f(z-i) = \int\limits_{\arg\tau=\frac{\pi}{2}} F(\tau)\exp[(i-z)\tau]\,d\tau;$$

$$f(z+1) = \int\limits_{\arg\tau=0} F(\tau)\exp[(-1-z)\tau]\,d\tau;$$

$$f(z+1-i) = \int\limits_{\arg\tau=0} F(\tau)\exp[(i-1-z)\tau]\,d\tau;$$

$$(16) \Leftrightarrow \int\limits_{\arg\tau=\frac{5\pi}{4}} \tau^k F(\tau)\sum_{j=0}^{5}\exp(-S_j(z_0)\tau)\,d\tau + \int\limits_{\arg\tau=\frac{\pi}{2}} \tau^k F(\tau)\exp((i-z_0)\tau)\,d\tau$$
$$+ \int\limits_{\arg\tau=0} \tau^k F(\tau)[\exp((-1-z_0)\tau)+\exp((i-1-z_0)\tau)]\,d\tau = (-1)^k g^{(k)}(z_0).$$

Это степенная проблема моментов, которую можно рассматривать как обобщение классических проблем Стилтьеса и Гамбургера на случай трех лучей.

Рассмотрим задачу I с другой точки зрения. Введем на Ω систему функций $\{h_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$, где $h_0(t)=1$ и $h_m(t)=t^{-m-1}+\sum\limits_{j=1}^{8}[S_j(t)]^{-m-1}$, $m\geq 1$. Она замкнута в $L_2(\Omega)$ в том смысле, что

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(\tau)h_m(\tau)\,d\tau = 0,\ m=\overline{0,\infty}, \quad \Rightarrow \varphi(\tau)\equiv 0,$$

как это следует из результатов п. 1. Следовательно, она полна в $L_2(\Omega)$, причем минимально полна. Рассмотрим также систему функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, где $(E\varphi_k)(z)=z^k+C_k$, $k>0$, и

$$\int\limits_{\Omega} \varphi_k(t)\,dt = 0, \quad k>0.$$

Напомним, что $C_{2k+1}=0$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Omega} \varphi_k(t)h_m(t)\,dt = \delta_{m,k}.$$

Это означает, что система функций $\{\varphi_k(t)\}$ также полна в $L_2(\Omega)$.

В заключение авторы выражают благодарность доценту Е. П. Аксентьевой за ценные замечания в ходе выполнения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carleman T.* Sur la théorie des équations intégrales et ses applications. // Verh. Int. Math. Kongress. Zurich, 1932. Bd I. S. 138–151.

2. *Показеев В. И.* Краевая задача Карлемана для фундаментального многоугольника // Уч. зап. Казанск. гос. ун-та. 1963. Т. 123, № 10. С. 40–57.

3. *Чибрикова Л. И.* Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1980. Т. 18. С. 3–66. (Итоги науки и техники).

4. *Чибрикова Л. И.* Граничная задача Римана на римановой поверхности с краем // Уч. зап. Казанск. гос. ун-та. 1963. Т. 123, № 10. С. 3–14.

5. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 1. С. 113–172.

6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

7. *Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н.* К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана // Изв. вузов. Математика. 1983. № 4. С. 43–51.

8. *Чибрикова Л. И.* Разрешимость и применение одного интегрального уравнения Карлемана // Докл. АН СССР. 1984. Т. 78, № 4. С. 817–820.

9. *Чибрикова Л. И.* Исследование разрешимости одного интегрального уравнения Фредгольма и его применение // Тр. семинаров по краевым задачам. Казань, 1984. № 21. С. 193–209.

10. *Гарифьянов Ф. Н.* Проблема обращения особого интеграла и разностные уравнения для функций, аналитических вне квадрата // Изв. вузов. Математика. 1993. № 7. С. 7–16.

11. *Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н.* О лакунарных аналогах тэта-ряда Пуанкаре и их приложение // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 5. С. 977–986.

12. *Гарифьянов Ф. Н.* Разностные уравнения для функций, аналитических вне нескольких квадратов // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 3. С. 550–559.

13. *Гарифьянов Ф. Н.* Биортогональные ряды, порожденные группой диэдра // Изв. вузов. Математика. 2001. № 4. С. 11–15.

14. *Гарифьянов Ф. Н.* Моменты Стилтьеса целых функций экспоненциального типа // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 5. С. 674–679.

15. *Гарифьянов Ф. Н.* Об одном разностном уравнении и его приложении к проблеме моментов // Мат. заметки. 2003. Т. 76, № 6. С. 821–826.

16. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968.

17. *Винберг Э. Б., Шварцман О. В.* Римановы поверхности // Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1978. Т. 16. С. 191–245. (Итоги науки и техники).

18. *Чибрикова Л. И., Сильвестров В. В.* К вопросу об эффективности решения краевой задачи Римана для автоморфных функций // Изв. вузов. Математика. 1978. № 12. С. 117–121.

19. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 26 февраля 2012 г.

Гарифьянов Фархат Нургаязович, Модина Светлана Анатольевна
Казанский гос. энергетический университет, кафедра высшей математики,
ул. Красносельская, 51, Казань 420066
`f.garifyanov@mail.ru`, `modinasvetlana@rambler.ru`