Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 517.518.23+517.518.83+519.651

ПОГРЕШНОСТЬ, ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ И ГАРАНТИРОВАННАЯ ТОЧНОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ КУБАТУР

В. Л. Васкевич

Аннотация. Проведена оценка сверху уклонения нормы возмущенного функционала погрешности от нормы исходного функционала погрешности многомерной сферической кубатурной формулы. Уклонение возникает в результате комбинированного влияния на итог вычислений малых изменений весов кубатурной формулы и округлений при последующем подсчете кубатурной суммы в условиях заданных стандартов приближения вещественных чисел. Дана оценка практической погрешности кубатурной формулы при ее действии на произвольную функцию из единичного шара нормированного пространства подынтегральных функций. Полученные оценки применены при исследовании практической погрешности сферических кубатурных формул в случае подынтегральных функций из пространств типа Соболева на многомерной единичной сфере. Норма функционала погрешности в сопряженном соболевскому классу пространстве представлена в виде положительно определенной квадратичной формы от весов кубатурной формулы. Проведена оценка практической погрешности для сферических кубатурных формул, каждая из которых конструируется как прямое произведение квадратурной формулы Гаусса по меридиану сферы и квадратурной формулы прямоугольников по экватору сферы. Веса такого прямого произведения с $2m^2$ узлами положительны, сама же формула точна на всех сферических гармониках до порядка $2m-1$ включительно.

Ключевые слова: сферическая кубатурная формула, функционал погрешности, пространство Соболева на многомерной сфере, константы и функции вложения, практическая погрешность, гарантированная точность.

Введение

На единичной сфере S пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассматриваются кубатурные формулы вида

$$\frac{1}{\sigma_{n-1}} \int\limits_S \varphi \, dS \approx \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(\theta^{(j)}), \tag{1}$$

где $\sigma_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь сферы S, $\theta^{(j)}$ — лежащие на S узлы формулы, а c_j — ее ненулевые веса, подчиненные условию

$$\sum_{j=1}^{N} c_j = 1. \tag{2}$$

Таким образом, все рассматриваемые далее кубатурные формулы на тождественно постоянных функциях точны. Правила, указывающие узлы $\theta^{(j)}$ и веса

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–00061 и 11–01–00147).

c_j кубатурной формулы (1), от выбора конкретной подынтегральной функции $\varphi(\theta)$ не зависят; варьируемая часть формулы (1) — это подынтегральные функции φ. Отметим, что проблема эффективного приближения интегральных операторов по ограниченным замкнутым поверхностям, в том числе интегралов по сферам, весьма актуальна, особенно в связи с решением краевых задач для уравнений и систем эллиптического типа [1].

Множество подынтегральных функций, как предполагается, представляет собой банахово пространство $X = X(S)$, вложенное ограниченным образом в пространство $C(S)$ непрерывных на S функций. Иными словами, существует конечная *константа вложения* [2–4] — минимальное положительное число $A_n = A_n(S)$, для которого имеют место неравенства

$$\sup_{\theta\in S}|\varphi(\theta)| \leq A_n\|\varphi \mid X(S)\| \quad \forall\,\varphi \in X(S). \tag{3}$$

Указанная константа A_n представляет собой норму действующего из $X(S)$ в $C(S)$ оператора вложения. Если тождественно единичная функция принадлежит $X(S)$, имея здесь единичную же норму, то $A_n \geq 1$ (именно так далее и предполагается).

Проекция на сферу S произвольной отличной от начала координат точки x из $\mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, обозначается далее через θ, т. е. полагается, что $\theta = x/\rho$, где $\rho = |x|$. Интегралы по $d\theta$ в дальнейшем — это то же самое, что интегралы по поверхности сферы S.

Кубатурную формулу (1) естественно рассматривать как некоторый стандарт приближения сингулярной обобщенной функции $M_S(x)$, действие которой на пробную функцию $\varphi(x)$ представляет собой сферическое среднее по S от этой самой функции:

$$(M_S,\varphi) = \frac{1}{\sigma_{n-1}}\int \varphi(\theta)\,d\theta.$$

В качестве типичных средств для такого стандартного приближения используются линейные комбинации сдвигов хорошо известной дельта-функции Дирака $\delta(x)$, т. е. кубатурные суммы вида

$$(\Sigma_N,\varphi) \equiv \left(\sum_{j=1}^{N} c_j\delta(x-\theta^{(j)}),\varphi(x)\right) = \sum_{j=1}^{N} c_j\varphi(\theta^{(j)}) \quad \forall\,\varphi \in C(S).$$

Носитель так определенной обобщенной функции $\Sigma_N(x)$ — это конечное дискретное множество точек, представляющих собой узлы исходной кубатурной формулы. Тем самым чтобы найти действие функционала $\Sigma_N(x)$ на пробную функцию $\varphi(x)$, достаточно знать эту пробную функцию лишь в узлах кубатурной формулы.

Теоретически погрешность приближения обобщенной функции $M_S(x)$ кубатурной суммой $\Sigma_N(x)$ исследуют (см. [5, 6]), оценивая значения на конкретных элементах φ из $X(S)$ *функционала погрешности* l_N формулы, задаваемого равенством

$$(l_N,\varphi) = (M_S-\Sigma_N,\varphi) = \left(M_S(x) - \sum_{j=1}^{N} c_j\delta(x-\theta^{(j)}),\varphi(x)\right) \quad \forall\,\varphi \in X(S).$$

Естественная область определения функционала погрешности l_N — пространство $C(S)$ непрерывных функций, где l_N линеен и ограничен. *Погрешность формулы* на произвольной функции φ из $X(S)$ подчинена оценке

$$|(l_N,\varphi)| \leq \|l_N \mid X(S)^*\| \cdot \|\varphi \mid X(S)\| \quad \forall\,\varphi \in X(S). \tag{4}$$

Однако в реальности при заданных узловых значениях подынтегральной функции φ приблизить среднее (M_S, φ) кубатурной суммой (Σ_N, φ) возможно, лишь вычислив эту кубатурную сумму. В общем случае для этого придется выполнить N умножений и N сложений вещественных чисел, что по известным причинам можно сделать лишь приближенно. Обозначив через $(\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)$ результат, получающийся в итоге указанных вычислений кубатурной суммы, заметим, что эта величина с исходной суммой (Σ_N, φ), вообще говоря, совпадать не обязана. Иными словами, вместе с теоретической появляется некоторая новая погрешность — практическая.

§ 1. Практическая погрешность

Практическая погрешность кубатурной формулы характеризуется не функционалом l_N, а некоторым его аналогом — функционалом $\tilde{l}_N$:

$$(\tilde{l}_N, \varphi) = (M_S - \widetilde{\Sigma}_N, \varphi) \quad \forall\, \varphi \in X(S).$$

Функционал практической погрешности $\tilde{l}_N$ нелинеен, с исходным функционалом l_N не совпадает, и оценка (4) к нему неприменима. Тем не менее если мы хотим получить действие (M_S, φ) численно и с гарантированной точностью, то необходимо иметь какой-либо аналог неравенства (4) для оценки практической погрешности. Чтобы такой аналог предложить, требуется более подробно разобраться в причинах различия практической и теоретической погрешностей.

Первая и главная причина указанного различия состоит в необходимости приближать вещественные числа элементами некоторого конечного и дискретного подмножества $\mathbf{F}$ числовой оси $\mathbb{R}$. Элементы множества $\mathbf{F}$ называют *машинными числами* (именно с ними оперирует компьютер). Вполне определенные стандарты приближения вещественных чисел машинными описаны в рамках широко известной модели арифметики с конечной точностью (или представления вещественных чисел с плавающей точкой) [7–9]. При этом в множестве $\mathbf{F}$ выделяются три фундаментальные положительные константы: порог машинного нуля ε_0, порог переполнения ε_∞ и относительная погрешность ε_1 (определяемая тем условием, что $1 + \varepsilon_1$ принадлежит $\mathbf{F}$, а на интервале $(1, 1 + \varepsilon_1)$ нет ни одного числа из $\mathbf{F}$). Число ε_0 значительно меньше числа ε_1, которое, в свою очередь, значительно меньше единицы, в то время как ε_∞ превосходит единицу во много раз. Далее предполагается, что ε-константы, соответствующие принятому в вычислениях стандарту представления с плавающей точкой, удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\varepsilon_1 \le 1/2, \quad 2\varepsilon_\infty^{1/3} \le \sqrt{\varepsilon_\infty \varepsilon_1}, \quad \varepsilon_0 \le \sqrt{2}\varepsilon_1^{11/2}. \tag{5}$$

Пример. Общепринятый IEEE-стандарт двоичной арифметики отводит под запись машинного числа обычной, или одинарной, точности 32 бита (1 бит под двоичную запись знака s числа, 8 битов под двоичную запись показателя e числа и 23 бита под двоичные цифры его мантиссы f). Заданным s, e и f соответствует машинное число $(-1)^s 2^{e-127}(1 + f)$. В этом случае ε-константы задаются следующими соотношениями [9, с. 19]:

$$\begin{gathered}\varepsilon_0 = 2^{-126} \approx 10^{-38}, \quad \varepsilon_\infty = 2^{127}(2 - 2^{-23}) \approx 2^{128} \approx 4 \times 10^{38}, \\ \varepsilon_1 = 2^{-23} \approx 12 \times 10^{-8}.\end{gathered} \tag{6}$$

Как можно убедиться непосредственными вычислениями, константы (6) ограничениям (5) удовлетворяют.

Проведем предварительный анализ влияния на практическую погрешность кубатурной формулы многократных замен вещественных чисел их машинными приближениями, т. е. анализ влияния на итоговый результат осуществляемых округлений. В общем случае кубатурная сумма (Σ_N, φ) представляет собой скалярное произведение вектора $\vec{c} = (c_1, \dots, c_N)$ ее весов на вектор $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, $\varphi_j = \varphi(\theta^{(j)})$, значений подынтегральной функции в узлах:

$$(\Sigma_N, \varphi) = (\vec{c}, \vec{\varphi}) \quad \forall\, \varphi \in X(S).$$

Следовательно, величину $(\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)$ естественно рассматривать как результат работы того или иного метода вычисления скалярного произведения (Σ_N, φ) в арифметике с заданным набором ε-констант. Далее предполагается, что как значения в узлах подынтегральной функции, так и веса кубатурной формулы заданы с одной и той же машинной точностью, характеризуемой набором констант $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_\infty)$.

Простейшая оценка уклонения $(\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)$ от исходной кубатурной суммы содержится в [6, с. 24]. Переформулируем эту оценку в принятых нами обозначениях.

Предложение. *Пусть* $N\varepsilon_1 \le 2h(1+h)$, $h > 0$. *Тогда*

$$|(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \le (N+1)\varepsilon_1(1+h)\, \|\vec{c}\|_2\, \|\vec{\varphi}\|_2, \tag{7}$$

где через $\|\cdot\|_2$ *обозначена евклидова норма вектора.*

Вернувшись к практической погрешности, предложим для нее аналог оценки (4), потребовав его выполнения уже не для всех функций φ из $X(S)$, а лишь для тех из них, которые принадлежат следующему шаровому слою:

$$\mathbf{B}L_\varepsilon = \bigl\{\varphi \in X(S) \mid \sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \le A_n\|\varphi \mid X(S)\| \le \varepsilon_\infty^{1/3}\bigr\}. \tag{8}$$

Изначально потребуем, чтобы этот слой содержал внутри себя единичную сферу пространства $X(S)$, т. е. чтобы удовлетворялись условия $\sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \le A_n \le \varepsilon_\infty^{1/3}$. Левое из этих неравенств заведомо справедливо, ибо в силу первого из условий (5) верна оценка $\sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \le 1$, а константа вложения A_n всегда не меньше единицы; второе же из рассматриваемых неравенств накладывает явное ограничение сверху на нормы операторов допускаемых вложений $X(S)$ в $C(S)$.

Введем в рассмотрение следующую величину:

$$\mathbf{R_F} = \sup_{\sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \le A_n\|\varphi|X(S)\| \le \varepsilon_\infty^{1/3}} \frac{|M_S(\varphi) - (\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)|}{\|\varphi \mid X(S)\|}. \tag{9}$$

При любом числе узлов N на основании оценок (4) и (7), а также неравенства треугольника $|M_S(\varphi) - (\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)| \le |(l_N, \varphi)| + |(\Sigma_N, \varphi) - (\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)|$ заключаем, что величина $\mathbf{R_F}$ неотрицательна и конечна.

Из определения (9) сразу следует, что для всякой функции φ из шарового слоя (8) практическая погрешность подчинена следующей оценке:

$$|M_S(\varphi) - (\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)| \le \mathbf{R_F}\|\varphi \mid X(S)\| \quad \forall\, \varphi \in \mathbf{B}L_\varepsilon. \tag{10}$$

Величина $\mathbf{R_F}$ играет здесь ту же роль, что и норма $\|l_N \mid X(S)^*\|$ в оценке (4). В частности, $\mathbf{R_F}$ зависит как от числа узлов N формулы, так и от их расположения на поверхности сферы.

§ 2. Обусловленность кубатурной формулы

Выясним, при каких условиях введенный равенством (9) параметр $\mathbf{R_F}$ мало отличается от нормы $\|l_N \mid X(S)^*\|$ (именно такие кубатурные формулы интересны практически). С этой целью остановимся на вполне определенном алгоритме Υ вычисления скалярного произведения в формулировке, приведенной, к примеру, в [6, с. 22–25] или в [7, с. 246, 247]. Ключевую роль в дальнейшем анализе играет приведенная в [7, с. 247] оценка практической погрешности упомянутого алгоритма Υ при $N < 2/\varepsilon_1$:

$$|(\vec{c},\vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \le \frac{N\varepsilon_1}{1-N\varepsilon_1/2}\sum_{j=1}^N |c_j\varphi(\theta^{(j)})| + \frac{N\varepsilon_0}{1-N\varepsilon_1/2}. \tag{11}$$

Для выполнимости всех операций выбранного алгоритма Υ достаточно потребовать, чтобы векторы $\vec{c} = (c_1,\dots,c_N)$ и $\vec{\varphi} = (\varphi_1,\dots,\varphi_N)$ удовлетворяли следующим условиям [7, с. 246]:

$$\left(\sum_{j=1}^N \varphi_j^2\right)^{1/2} \le \frac{\sqrt{\varepsilon_\infty}}{2}, \quad \left(\sum_{j=1}^N c_j^2\right)^{1/2} \le \frac{\sqrt{\varepsilon_\infty}}{2}.$$

В этом случае никаких аварийных остановок из-за переполнений возникнуть не может и для $N \le 1/\varepsilon_1$ машинное число $\widetilde{\Sigma}_N(\varphi)$ гарантированно будет получено.

Теорема 1. *Пусть соответствующие стандарту представления машинных чисел константы ε_0, ε_1 и ε_∞ подчинены ограничениям (5), константа вложения A_n подчинена условиям $1 \le A_n \le \varepsilon_\infty^{1/3}$, а веса $(c_1,\dots,c_N)$ кубатурной формулы таковы, что $\left(\sum\limits_{j=1}^N c_j^2\right)^{1/2} \le \sqrt{\varepsilon_\infty}/2$. Тогда уклонение введенного равенством (9) параметра $\mathbf{R_F}$ от нормы $\|l_N \mid X(S)^*\|$ функционала погрешности при $N \le 1/\varepsilon_1$ удовлетворяет следующей оценке:*

$$|\mathbf{R_F} - \|l_N \mid X(S)^*\|| \le 2NA_n\varepsilon_1\left(\sum_{j=1}^N |c_j| + 1\right). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть функция φ лежит в шаровом слое (8). С помощью оценки (3) и неравенств $N \le 1/\varepsilon_1$, $2\varepsilon_\infty^{1/3} \le \sqrt{\varepsilon_\infty\varepsilon_1}$, первое из которых справедливо по условию теоремы, а второе имеет место в силу ограничений (5), получаем

$$\|\vec{\varphi}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^N |\varphi(\theta^{(j)})|^2\right)^{1/2} \le A_n\sqrt{N}\|\varphi \mid X(S)\| \le \frac{A_n}{\sqrt{\varepsilon_1}}\|\varphi \mid X(S)\| \le \frac{\varepsilon_\infty^{1/3}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \le \frac{\sqrt{\varepsilon_\infty}}{2}.$$

Эта оценка и условие $\|\vec{c}\|_2 \le \sqrt{\varepsilon_\infty}/2$ достаточны для выполнимости всех операций выбранного алгоритма Υ (см. [7, с. 246]). В частности, справедливо соотношение

$$|(\vec{c},\vec{\varphi})| \le \|\vec{c}\|_2\|\vec{\varphi}\|_2 \le \varepsilon_\infty/4,$$

и к скалярному произведению $(\vec{c},\vec{\varphi}) = \Sigma_N(\varphi)$ применимо округление в избранном двоичном формате.

Пусть $R_{\mathbf{F}}(\varphi, \Sigma_N) = |M_S(\varphi) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)|$. Пользуясь неравенством треугольника, имеем

$$R_{\mathbf{F}}(\varphi, \Sigma_N) \le |(l_N, \varphi)| + |(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \\ \le \|l_N \mid X(S)^*\| \cdot \|\varphi \mid X(S)\| + |(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)|. \quad (13)$$

По условию $\varepsilon_1 N \le 1$ и, следовательно, $1 - N\varepsilon_1/2 \ge 1/2$. Подставляя эту оценку в (11) и пользуясь неравенством (3), приходим к соотношению

$$|(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \le 2N\varepsilon_1 \left(A_n \|\varphi \mid X(S)\| \sum_{j=1}^{N} |c_j| + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \right). \quad (14)$$

В условиях (5) и (8) справедливы оценки $\varepsilon_0/\varepsilon_1 \le \sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \le A_n \|\varphi \mid X(S)\|$. После подстановки этих неравенств в (14) имеем

$$|(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \le 2NA_n\varepsilon_1 \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| + 1 \right) \|\varphi \mid X(S)\|. \quad (15)$$

Подставив (15) в (13), получаем

$$\frac{R_{\mathbf{F}}(\varphi, \Sigma_N)}{\|\varphi \mid X(S)\|} \le \|l_N \mid X(S)^*\| + 2NA_n\varepsilon_1 \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| + 1 \right).$$

Взяв точную верхнюю грань от обеих частей этого неравенства по функциям φ из шарового слоя (8) и воспользовавшись определением (9), выводим оценку уклонения сверху:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{F}} - \|l_N \mid X(S)^*\| \le 2NA_n\varepsilon_1 \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| + 1 \right). \quad (16)$$

Пусть теперь φ — произвольный элемент единичной сферы пространства $X(S)$, вложенной по условию в шаровой слой (8). Тогда к функции φ применима оценка (15). Пользуясь ею вместе с неравенством треугольника, имеем

$$R_{\mathbf{F}}(\varphi, \Sigma_N) \ge |(l_N, \varphi)| - |(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \ge |(l_N, \varphi)| - 2NA_n\varepsilon_1 \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| + 1 \right).$$

Переходя здесь к точной верхней грани, взятой по всем φ из единичной сферы пространства $X(S)$, получаем

$$\sup_{\|\varphi | X(S)\| = 1} R_{\mathbf{F}}(\varphi, \Sigma_N) \ge \|l_N \mid X(S)^*\| - 2NA_n\varepsilon_1 \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| + 1 \right).$$

Пользуясь в очередной раз вложенностью единичной сферы пространства $X(S)$ в шаровой слой (8), а также определением (9), приходим к оценке

$$\mathbf{R}_{\mathbf{F}} \ge \sup_{\|\varphi | X(S)\| = 1} R_{\mathbf{F}}(\varphi, \Sigma_N).$$

Из двух последних неравенств вытекает оценка уклонения снизу:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{F}} - \|l_N \mid X(S)^*\| \ge -2NA_n\varepsilon_1 \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| + 1 \right).$$

Объединяя эту оценку с (16), приходим к искомому неравенству (12). $\square$

Следствие 1. *Практическая погрешность кубатурной формулы* (1) *на всякой функции* φ *из единичного шара пространства* $X(S)$ *при* $N \leq 1/\varepsilon_1$ *допускает следующую оценку сверху:*

$$|M_S(\varphi) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \leq \|l_N \mid X(S)^*\| + 2NA_n\varepsilon_1\left(\sum_{j=1}^{N}|c_j| + 1\right). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть φ принадлежит $X(S)$, $\|\varphi \mid X(S)\| \leq 1$ и при этом $\varphi \in \mathbf{B}L_\varepsilon$. Тогда $|M_S(\varphi) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \leq \mathbf{R_F}\|\varphi \mid X(S)\| \leq \mathbf{R_F}$ и, применяя к правой части этого неравенства оценку (12), получаем (17).

Если же $\|\varphi \mid X(S)\| \leq 1$ и $\varphi \notin \mathbf{B}L_\varepsilon$, то в силу (3) и (8) справедливы неравенства

$$\sup_{\theta \in S}|\varphi(\theta)| \leq A_n\|\varphi \mid X(S)\| \leq \sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2}. \tag{18}$$

В этом случае в соответствии с оценкой (13) имеем

$$|M_S(\varphi) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \leq \|l_N \mid X(S)^*\| + |(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)|.$$

Второе слагаемое в правой части при $N \leq 1/\varepsilon_1$ оценим с помощью (11):

$$|(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \leq 2N\varepsilon_1\left(\sum_{j=1}^{N}|c_j|\right)\sup_{\theta \in S}|\varphi(\theta)| + 2N\varepsilon_0.$$

Подставив сюда оценку (18) и учтя, что $\varepsilon_0/\varepsilon_1 \leq \sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2}$, получим

$$|(\vec{c}, \vec{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \leq 2N\varepsilon_1\left(\sum_{j=1}^{N}|c_j| + 1\right)\sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2}.$$

В силу первого из ограничений (5) имеем $\sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \leq 2^{-4} < 1$, и, следовательно, в этом случае имеет место оценка

$$|M_S(\varphi) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \leq \|l_N \mid X(S)^*\| + 2N\varepsilon_1\left(\sum_{j=1}^{N}|c_j| + 1\right).$$

Это неравенство вместе с соотношением $A_n \geq 1$ приводит к искомой оценке (17). $\square$

Как вытекает из оценок (12) и (17), произведение $2NA_n\left(\sum_{j=1}^{N}|c_j| + 1\right)$ естественно рассматривать в качестве числа обусловленности кубатурной формулы $M_S(\varphi) \cong \Sigma_N(\varphi)$ на пространстве $X(S)$ (см. также [10, 11]).

Применим полученные оценки к погрешности сферических кубатурных формул на пространствах соболевского типа, но прежде уточним, что это за пространства.

§ 3. Классы подынтегральных функций

Пусть φ — сферический полином, разложенный по сферическим гармоникам:

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\sigma(k)} a_{k,l}Y_{k,l}(\theta), \quad a_{k,l} = a_{k,l}(\varphi).$$

В правой части этого равенства лишь конечное число коэффициентов $a_{k,l}$ отлично от нуля, параметр $\sigma(k)$ определяется соотношением

$$\sigma(k) = (n+2k-2)\frac{(n+k-3)!}{k!(n-2)!} \sim \frac{2}{(n-2)!}k^{n-2},$$

функции множества $\{Y_{k,l}(\theta) \mid l = 1, 2, \dots, \sigma(k)\}$ образуют в пространстве сферических гармоник порядка k ортонормированный базис:

$$\int Y_{k,l}(\theta) Y_{k,p}(\theta)\, d\theta = \delta_l^p.$$

Гармоника $Y_{0,1}(\theta)$ тождественно постоянна и равна $1/\sqrt{\sigma_{n-1}}$.

В качестве пространства подынтегральных функций далее рассматривается пополнение $X_2^r(S)$ совокупности всех сферических полиномов φ по норме

$$\|\varphi \mid X_2^r(S)\| = \left\{ \left| \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \varphi(\theta)\, d\theta \right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k}^{2r} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} |a_{k,l}(\varphi)|^2 \right\}^{1/2}. \tag{19}$$

Здесь $\lambda_{n,k} = k(n+k-2)$ — собственное число оператора Лапласа — Бельтрами, а $\sigma(k)$ — его кратность. Число r в (19), возможно и дробное, характеризует минимально возможную гладкость элементов из $X_2^r(S)$, т. е. r — гладкость класса. Будем всегда предполагать, что $r > (n-1)/4$.

Коэффициенты $a_{k,l}(\varphi)$ в (19) представимы в виде

$$a_{0,1}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{n-1}}} \int \varphi(\theta)\, d\theta; \quad a_{k,l}(\varphi) = \int \varphi(\theta) Y_{k,l}(\theta)\, d\theta, \ k = 1, 2, \dots.$$

Отметим, что тождественно единичная функция классу $X_2^r(S)$ принадлежит, имея здесь единичную норму.

Пространство $X_2^r(S)$ гильбертово со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{X_2^r} = \frac{1}{\sigma_{n-1}} a_{0,1}(\varphi) a_{0,1}(\psi) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k}^{2r} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} a_{k,l}(\varphi) a_{k,l}(\psi).$$

Произвольный элемент φ из $X_2^r(S)$ разлагается в сходящийся по норме (19) ряд:

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} a_{k,l} Y_{k,l}(\theta), \quad a_{k,l} = a_{k,l}(\varphi).$$

Имеет место следующая теорема вложения [4].

Теорема 2. *При $r > (n-1)/4$ для любой функции $\varphi(\theta)$ из $X_2^r(S)$ справедлива оценка*

$$\sup_{\theta \in S} |\varphi(\theta)| \le A_n^{(r)} \|\varphi \mid X_2^r(S)\|, \tag{20}$$

где $A_n^{(r)}$ — константа вложения, определяемая равенством

$$A_n^{(r)} = \left\{ 1 + \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} \right\}^{1/2}.$$

В $X_2^r(S)$ существует функция вложения $G_{\theta_0}(\theta)$, для которой в (20) *имеет место равенство. Функция вложения $G_{\theta_0}(\theta)$ представима в виде следующего абсолютно сходящегося ряда:*

$$G_{\theta_0}(\theta) = 1 + \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} G_k^{(n)}(\theta \cdot \theta_0). \tag{21}$$

Здесь θ_0 — произвольный узел на сфере S, а $G_k^{(n)}(t)$ — полиномом Гегенбауэра, нормализованный условием $G_k^{(n)}(+1) = 1$.

Нормализованный полином Гегенбауэра $G_k^{(n)}(t)$ выражается через обычный полином Гегенбауэра $C_k^{(n/2-1)}(t)$ степени k с помощью равенства

$$G_k^{(n)}(t) = \frac{k!\Gamma(n-2)}{\Gamma(k+n-2)}\, C_k^{(n/2-1)}(t).$$

Как известно [12], функция $C_k^{(n/2-1)}(\theta \cdot \theta_0)$ представляет собой сферическую гармонику порядка k. При $n = 2$ полином $G_k^{(2)}(t)$ совпадает с полиномом Чебышева $T_k(t)$ степени k; при $n = 3$ полином $G_k^{(3)}(t)$ — это полином Лежандра $P_k(t)$ степени k. При $n = 3$ имеем также $\sigma_2 = 4\pi$, $\sigma(k) = 2k+1$, $\lambda_{3,k} = k(k+1)$, и, следовательно, в этом случае и при $r > 1/2$ константа вложения определяется из соотношения

$$\left(A_3^{(r)}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^{2r}(k+1)^{2r}}. \tag{22}$$

В случае произвольного n при $r > (n-1)/4$, оставляя в представлении константы $A_n^{(r)}$ лишь слагаемое, соответствующее $k = 1$, и пользуясь равенствами $\sigma(1) = n$, $\lambda_{n,1} = n-1$, получаем простейшую оценку снизу:

$$\left(A_n^{(r)}\right)^2 - 1 = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} \geq \frac{1}{\sigma_{n-1}} \frac{\sigma(1)}{\lambda_{n,1}^{2r}} = \frac{n\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-1)^{2r}}.$$

Классы функций на сфере, близкие к $X_2^r(S)$, рассматривались ранее в [13, 14]. Точнее, в [13] определено пространство $W_2^{(m)}(S)$, эквивалентное $X_2^{m/2}(S)$. В [14] на сфере в трехмерном пространстве введен класс $H^{2r}(S)$, представляющий собой фактор-пространство $X_2^r(S)$ по подпространству сферических полиномов нулевой степени.

§ 4. Экстремальные функции кубатурных формул и нормы их функционалов погрешности

Пусть функционал l линеен и ограничен на пространстве $X_2^r(S)$. Функция $u(\theta)$ из $X_2^r(S)$ называется *экстремальной* для l, если выполняются соотношения

$$\|l \mid X_2^r(S)^*\|^2 = (l, u) = \|u \mid X_2^r(S)\|^2.$$

Как следует из строгой выпуклости единичной сферы в гильбертовом пространстве, *для данного функционала l из $X_2^r(S)^*$ может существовать не более одной экстремальной функции.*

Существование экстремальной для l функции вытекает из теоремы Рисса об общем виде линейного ограниченного на гильбертовом пространстве функционала. В соответствии с ней в $X_2^r(S)$ имеется единственная функция $u(\theta)$ такая, что для всех функций φ из $X_2^r(S)$ справедливо равенство $(l, \varphi) = \left(\varphi, u\right)_{X_2^r}$. Именно эта функция $u(\theta)$, как легко убедиться, является для l экстремальной.

Вернемся теперь к функционалу погрешности l_N исходной кубатурной формулы:

$$(l_N, \varphi) \equiv \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \varphi(\theta)\, d\theta - \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(\theta^{(j)}).$$

Он линеен и ограничен на $C(S)$, а значит, по теореме 2 этот же функционал линеен и ограничен на $X_2^r(S)$, $r > (n-1)/4$. Экстремальная для l_N функция $u_N(\theta)$ определяется из соотношений

$$\|l_N \mid X_2^r(S)^*\|^2 = (l_N, u_N) = \|u_N \mid X_2^r(S)\|^2.$$

Из равенств $(l_N, 1) = \big(1, u_N\big)_{X_2^r} = 0$ и определения скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_{X_2^r}$ вытекает, что экстремальная функция ортогональна тождественной единице:

$$\int u_N(\theta)\, d\theta = 0.$$

Теорема 3 (общий вид экстремальных функций). *При $r > (n-1)/4$ экстремальная в $X_2^r(S)$ функция $u_N(\theta)$ заданной кубатурной формулы*

$$\frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \varphi\, d\theta \approx \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(\theta^{(j)})$$

представима в виде следующей линейной комбинации:

$$u_N(\theta) = u(\theta \mid \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(N)}) = \sum_{j=1}^{N} c_j u(\theta \mid \theta^{(j)}), \tag{23}$$

где каждая из функций $u(\theta \mid \theta^{(j)})$ экстремальна для соответствующей кубатурной формулы с единственным узлом:

$$\frac{1}{\sigma_{n-1}} \int\limits_S \varphi\, dS \approx \varphi(\theta^{(j)}).$$

Функция $u(\theta \mid \theta^{(j)})$ представима в виде следующего абсолютно сходящегося ряда:

$$u(\theta \mid \theta^{(j)}) = -\frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} G_k^{(n)}(\theta \cdot \theta^{(j)}), \tag{24}$$

где $G_k^{(n)}(t)$ тот же нормализованный полином Гегенбауэра, что и в равенстве (21).

Доказательство. Зафиксировав на сфере S узел $\theta^{(1)}$, рассмотрим функционал погрешности кубатурной формулы с этим узлом:

$$(l_1(\theta \mid \theta^{(1)}), \varphi(\theta)) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \varphi(\theta)\, d\theta - \varphi(\theta^{(1)}).$$

Функционал $l_1(\theta \mid \theta^{(1)})$ на пространстве $C(S)$ линеен и ограничен:

$$|(l_1(\theta \mid \theta^{(1)}), \varphi(\theta))| \le \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int |\varphi(\theta)|\, d\theta + |\varphi(\theta^{(1)})| \le 2 \sup_{\theta \in S} |\varphi(\theta)| \quad \forall\, \varphi \in C(S).$$

В силу вложения $X_2^r(S)$ в $C(S)$ функционал $l_1(\theta \mid \theta^{(1)})$ ограничен также и на $X_2^r(S)$.

По теореме Рисса об общем виде линейного функционала на гильбертовом пространстве существует такая функция $u_1(\theta)$ из $X_2^r(S)$, что для всякой функции φ из $X_2^r(S)$ имеют место равенства

$$(l_1(\theta \mid \theta^{(1)}), \varphi(\theta)) = (\varphi, u_1)_{X_2^r} = \frac{1}{\sigma_{n-1}} a_{0,1}(\varphi) a_{0,1}(u_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k}^{2r} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} a_{k,l}(\varphi) a_{k,l}(u_1). \tag{25}$$

При этом $(l_1(\theta \mid \theta^{(1)}), u_1(\theta)) = \|u_1(\theta) \mid X_2^r(S)\|^2 = \|l_1(\theta \mid \theta^{(1)}) \mid X_2^r(S)^*\|^2$, т. е. функция $u_1(\theta)$ экстремальна для $l_1(\theta \mid \theta^{(1)})$. Найдем $u_1(\theta)$ в явном виде.

Функционал $l_1(\theta \mid \theta^{(1)})$ точен на тождественно единичной функции, поэтому, как вытекает из (25), $a_{0,1}(u_1) = 0$. Следовательно, для любой функции $\varphi(\theta)$ из $X_2^r(S)$ имеем

$$(l_1(\theta \mid \theta^{(1)}), \varphi(\theta)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k}^{2r} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} a_{k,l}(\varphi) a_{k,l}(u_1).$$

Поочередно подставляя сюда вместо $\varphi(\theta)$ сферические гармоники $Y_{k,\,l}(\theta)$, $k = 1, 2, \dots$, из исходного ортонормированного базиса, приходим к соотношениям

$$(l_1(\theta \mid \theta^{(1)}), Y_{k,\,l}(\theta)) = -Y_{k,\,l}(\theta^{(1)}) = \lambda_{n,k}^{2r} a_{k,l}(u_1).$$

Выражая из этого равенства $a_{k,l}(u_1)$, получаем искомую функцию $u_1(\theta)$ в виде ряда по сферическим гармоникам:

$$u_1(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} a_{k,l}(u_1) Y_{k,\,l}(\theta) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n,k}^{2r}} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} Y_{k,\,l}(\theta^{(1)}) Y_{k,\,l}(\theta).$$

По известной теореме сложения для сферических гармоник [15, с. 10] имеем

$$\sum_{l=1}^{\sigma(k)} Y_{k,\,l}(\theta^{(1)}) Y_{k,\,l}(\theta) = \frac{\sigma(k)}{\sigma_{n-1}} G_k^{(n)}(\theta^{(1)} \cdot \theta),$$

где $G_k^{(n)}(t)$ — нормализованный полином Гегенбауэра степени k. Таким образом, справедливо равенство

$$u_1(\theta) = -\frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} G_k^{(n)}(\theta^{(1)} \cdot \theta).$$

Исследуем ряд справа на сходимость. Как известно [12, с. 485], полином Гегенбауэра $C_k^{(n/2-1)}(t)$ удовлетворяет оценке

$$\left| C_k^{(n/2-1)}(\cos\theta) \right| \leq \frac{\Gamma(n+k-2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-2)},$$

причем равенство здесь достигается при $\cos\theta = 1$. Следовательно, для нормализованного полинома Гегенбауэра $G_k^{(n)}(t)$ действительно справедливо равенство

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} \left| G_k^{(n)}(t) \right| = G_k^{(n)}(+1) = 1. \tag{26}$$

Учитывая его и асимптотические соотношения $\lambda_{n,k} \sim k^2$, $\sigma(k) \sim \frac{2}{(n-2)!}k^{n-2}$, получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} G_k^{(n)}(\theta^{(1)} \cdot \theta)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} \le C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4r-n+2}} < +\infty.$$

Последнее неравенство имеет место в силу условия $4r > n-1$. Таким образом, задаваемая равенством (24) функция $u(\theta \mid \theta^{(1)})$ определена и непрерывна на S.

Пусть теперь $N \ge 2$ и $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j = 1$. Тогда имеет место равенство

$$\frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \varphi(\theta)\, d\theta - \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(\theta^{(j)}) = \sum_{j=1}^{N} c_j \left(\frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \varphi(\theta)\, d\theta - \varphi(\theta^{(j)}) \right)$$

или, что то же самое, $(l_N, \varphi) = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j (l_1(\theta \mid \theta^{(j)}), \varphi)$. Пользуясь уже установленной экстремальностью функции $u(\theta \mid \theta^{(j)})$, а также определением (23), имеем

$$(l_N, \varphi) = \sum_{j=1}^{N} c_j (\varphi(\theta), u_1(\theta \mid \theta^{(j)}))_{X_2^r}$$

$$= \left(\varphi(\theta), \sum_{j=1}^{N} c_j u_1(\theta \mid \theta^{(j)}) \right)_{X_2^r} = (\varphi(\theta), u_N(\theta))_{X_2^r}.$$

Следовательно, функция $u_N(\theta)$ из $X_2^r(S)$ соответствует функционалу погрешности l_N в силу теоремы Рисса, являясь тем самым экстремальной для него. □

Противоположная экстремальной функции $u(\theta \mid \theta^{(j)})$ функция $G(\theta, \theta^{(j)})$ известна также [14] как функция Грина оператора $(-\mathfrak{D})^{2r}$, где $\mathfrak{D}$ — оператор Лапласа — Бельтрами (угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах):

$$G(\theta, \theta^{(j)}) = -u(\theta \mid \theta^{(j)}) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} G_k^{(n)}(\theta \cdot \theta^{(j)}). \qquad (27)$$

Если $2r = m$ — натуральное число, то $(-1)^m \mathfrak{D}^m$ — это дифференциальный (полигармонический) оператор на сфере. Если же число $2r$ дробное, то $(-\mathfrak{D})^{2r}$ — псевдодифференциальный оператор на сфере. Ясно, что функция Грина $G(\theta, \theta^{(j)})$ как функция переменной θ принадлежит классу $X_2^r(S)$, а ее диагональные значения связаны с константой вложения $A_n^{(r)}$ соотношением

$$G(\theta, \theta) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} = \left(A_n^{(r)}\right)^2 - 1.$$

По теореме 3 экстремальная для l_N функция $u_N(\theta)$ выражается через функцию Грина по формуле

$$u_N(\theta) = -\sum_{j=1}^{N} c_j G(\theta, \theta^{(j)}). \qquad (28)$$

Коэффициенты c_j и точки $\theta^{(j)}$ в этом разложении — это в точности веса и узлы соответствующей кубатурной формулы.

Разность любых двух экстремальных функций $u_N^{(1)}(\theta)$ и $u_N^{(2)}(\theta)$ с одинаковым множеством узлов $\{\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(N)}\}$ представима в виде $u_N^{(2)}(\theta) - u_N^{(1)}(\theta) = \sum_{j=1}^{N} d_j G(\theta, \theta^{(j)})$, где $d_j = c_j^{(1)} - c_j^{(2)}$ и, следовательно, $\sum_{j=1}^{N} d_j = 0$. Функции такого вида называются *сферическими сплайнами* [14].

Учитывая, что $\int G(\theta, \theta^{(j)})\, d\theta = -\int u(\theta \mid \theta^{(j)})\, d\theta = 0$, и пользуясь (28), получаем для квадрата нормы функционала погрешности представление

$$\|l_N \mid X_2^r(S)^*\|^2 = (l_N, u_N(\theta)) = -\sum_{j=1}^{N} c_j (l_N, G(\theta, \theta^{(j)})) = \sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j G(\theta^{(i)}, \theta^{(j)}). \tag{29}$$

При $n = 2$ имеем следующее выражение для $G(\theta, \theta^{(j)})$:

$$G(\theta, \theta^{(j)}) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4r}} T_k(\theta \cdot \theta^{(j)}) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega}{k^{4r}}.$$

Здесь через ω обозначен угол между векторами θ и $\theta^{(j)}$ единичной окружности. Если же $n = 3$, то

$$G(\theta, \theta^{(j)}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^{2r}(k+1)^{2r}} P_k(\theta \cdot \theta^{(j)}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^{2r}(k+1)^{2r}} P_k(\cos\omega),$$

где $P_k(t)$ — полином Лежандра степени k.

Пусть $r > (n-1)/4$ и $u_N(\theta)$ — экстремальная функция кубатурной формулы (1) с условием (2). Вместе с разложением (28) для этой функции используется также ее разложение в ряд по сферическим гармоникам [16, с. 90]:

$$u_N(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} \frac{|(l_N, Y_{k,l}(\theta))|}{\lambda_{n,k}^{2r}} Y_{k,l}(\theta).$$

Применив к обеим частям этого равенства функционал погрешности l_N, получаем выражение квадрата нормы функционала погрешности через его коэффициенты Фурье [16, с. 88]:

$$\|l_N \mid X_2^r(S)^*\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n,k}^{2r}} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} |(l_N, Y_{k,l}(\theta))|^2. \tag{30}$$

Из (30) заключаем, в частности, что *норма $\|l_N \mid X_2^r(S)^*\|$ представляет собой монотонно убывающую функцию гладкости r рассматриваемого класса.*

§ 5. Оценка практической погрешности

Практическая погрешность кубатурной формулы на любой функции φ из единичного шара пространства $X_2^r(S)$, как вытекает из (17), допускает следующую оценку сверху:

$$|M_S(\varphi) - (\widetilde{\Sigma}_N, \varphi)| \le \|l_N \mid X_2^r(S)^*\| + 2NA_n^{(r)} \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| + 1 \right) \cdot \varepsilon_1. \tag{31}$$

Упростим правую часть этого неравенства, напомнив предварительно, что основным инструментом улучшения сферических кубатурных формул как в теории, так и на практике служит построение тех из них, которые точны сразу на всех сферических гармониках вплоть до заранее заданной степени [17].

Лемма. *Для любой сферической кубатурной формулы, точной на сферических гармониках до порядка $M-1$ включительно, имеет место равенство*

$$\|l_N \mid X_2^r(S)^*\|^2 = \sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j G_M(\theta^{(i)}, \theta^{(j)}), \tag{32}$$

где неполная функция Грина $G_M(\theta, \theta^{(j)})$ задается соотношением

$$G_M(\theta, \theta^{(j)}) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=M}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} G_k^{(n)}(\theta \cdot \theta^{(j)}). \tag{33}$$

При этом справедлива оценка

$$\|l_N \mid X_2^r(S)^*\| \le \left\{ \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=M}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} \right\}^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| \right). \tag{34}$$

Доказательство. Функция $G_k^{(n)}(\theta \cdot \theta^{(j)})$ представляет собой сферическую гармонику порядка k и по этой причине при $k = 1, 2, \dots, M-1$ выполняются равенства

$$\int G_k^{(n)}(\theta \cdot \theta^{(j)})\, d\theta = 0, \ \sum_{i=1}^{N} c_i G_k^{(n)}(\theta^{(i)} \cdot \theta^{(j)}) = -\big(l_N, G_k^{(n)}(\theta \cdot \theta^{(j)})\big) = 0, \ j = 1, \dots, N.$$

Пользуясь ими, а также определением (27) функции Грина, получаем искомое соотношение (32) из представления (29) нормы функционала погрешности.

Подставляя (33) в (32), получаем

$$\|l_N \mid X_2^r(S)^*\|^2 = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=M}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} \sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j G_k^{(n)}(\theta^{(i)} \cdot \theta^{(j)}).$$

Учитывая, что $|\theta^{(i)} \cdot \theta^{(j)}| \le 1$, и применяя к оценке каждого из слагаемых в правой части последнего равенства приведенные выше соотношения (26), в итоге имеем

$$\|l_N \mid X_2^r(S)^*\|^2 \le \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=M}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} \sum_{i,j=1}^{N} |c_i c_j| = \left\{ \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=M}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} \right\} \left(\sum_{i=1}^{N} |c_i| \right)^2,$$

т. е. искомую оценку (34). □

Для кубатурной формулы с положительными весами оценка (34) упрощается. В этом случае в силу (2) имеем $\sum_{j=1}^{N} |c_j| = \sum_{j=1}^{N} c_j = 1$ и норма функционала погрешности оценивается следующим образом:

$$\|l_N \mid X_2^r(S)^*\| \le \left\{ \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=M}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} \right\}^{1/2} = \{G_M(\theta, \theta)\}^{1/2}.$$

Применим полученные здесь оценки практической погрешности к конкретной последовательности кубатурных формул на сфере в трехмерном пространстве. Введем на сфере $S \subset \mathbb{R}^3$ сферические координаты (ϑ, φ):

$$x = \sin\vartheta \cos\varphi, \ y = \sin\vartheta \sin\varphi, \ z = \cos\vartheta, \quad 0 \le \vartheta \le \pi, \ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Определим кубатурную формулу на сфере как прямое произведение экваториальной квадратурной формулы прямоугольников с $2m$ узлами (m натуральное) и меридиональной квадратурной формулы Гаусса с m узлами [18, 19]. Точнее, в качестве узлов $\theta_{k,j}$ кубатурной формулы возьмем следующие лежащие на S точки:

$$(\sin\vartheta_k\cos(jh),\, \sin\vartheta_k\sin(jh),\, \cos\vartheta_k), \quad k=1,\dots,m;\ j=0,1,\dots,2m-1.$$

Здесь $h=\pi/m$, а $z_k=\cos\vartheta_k$ — это нули полинома Лежандра $P_m(z)$ степени m, упорядоченные по возрастанию. Приписав узлу $\theta_{k,j}$ вес

$$c_{k,j}=a_k^{(m)}h=\frac{2\pi}{m\big(1-z_k^2\big)[P_m'(z_k)]^2}, \quad \text{где} \quad a_k^{(m)}=\frac{2}{\big(1-z_k^2\big)[P_m'(z_k)]^2},$$

получим следующую кубатурную формулу с положительными весами:

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_S f(x,y,z)\,dS \approx \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2m-1}c_{k,j}f(\theta_{k,j}). \tag{35}$$

Формула (35) имеет $2m^2$ узлов и симметрична относительно каждой из координатных плоскостей. Следовательно, на любой функции $f(x,y,z)$, нечетной хотя бы по одной из своих переменных, эта формула точна. Известно, что $\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^{(m)}=2$, поэтому формула (35) точна также на тождественно постоянной функции:

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2m-1}c_{k,j}=\frac{1}{4\pi}\left(\sum_{k=1}^{m}a_k^{(m)}\right)\left(\sum_{j=0}^{2m-1}h\right)=1.$$

Пусть непрерывная на S функция $f(\vartheta,\varphi)$ допускает разделение переменных, т. е. представима в виде $f(\vartheta,\varphi)=\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$, имея при этом нулевое среднее значение по сфере S. Тогда функционал погрешности l_N^* формулы (35) по определению имеет на $f(\vartheta,\varphi)$ следующее значение:

$$(l_N^*,\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi))=\left[\sum_{k=1}^{m}a_k^{(m)}\Theta(\vartheta_k)\right]\frac{1}{4m}\left[\sum_{j=0}^{2m-1}\Phi\,(jh)\right]. \tag{36}$$

Задавшись натуральным l, применим равенство (36) к произведениям вида

$$P_l^{(s)}(\cos\vartheta)e^{\pm is\varphi}, \quad s=0,1,\dots,l, \tag{37}$$

где первый сомножитель $P_l^{(s)}(z)$ — присоединенная функция Лежандра. Функции множества (37) образуют базис в пространстве сферических гармоник порядка l. Среднее значение по сфере S любой из функций вида (37) равно нулю, и тем самым равенство (36) к ней применимо.

При $s=0$ и $1\le l\le 2m-1$ в силу известного свойства квадратурной формулы Гаусса с m узлами точно интегрировать полиномы вплоть до степени $2m-1$ включительно [20, с. 123] имеем

$$(l_N^*,P_l(\cos\vartheta))=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}a_k^{(m)}P_l(\cos\vartheta_k)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}P_l(z)\,dz=0. \tag{38}$$

Если s натуральное и $\Phi(\varphi) = e^{is\varphi}$, то для всех не кратных $2m$ значений s имеет место равенство

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \Phi\,(jh) = \sum_{j=0}^{2m-1} e^{is\pi j/m} = \frac{1 - e^{i2\pi s}}{1 - e^{i\pi s/m}} = 0, \quad \frac{s}{m} \neq 2k.$$

Следовательно, для всех натуральных и не кратных $2m$ значений s формула (35) точно интегрирует соответствующие этим s гармоники из множества (37). В частности,

$$\big(l_N^*, P_l^{(s)}(\cos\vartheta)e^{\pm is\varphi}\big) = 0, \quad 1 \leq s \leq l;\; 1 \leq l \leq 2m-1. \tag{39}$$

На основании равенств (38) и (39) заключаем, что формула (35) точно интегрирует все гармоники до порядка $2m-1$ включительно.

Запишем общую оценку (34) нормы в применении к сферической кубатурной формуле (35) при $N = 2m^2$. Пользуясь равенствами $\sigma_2 = 4\pi$, $\sigma(k) = 2k+1$, $\lambda_{3,k} = k(k+1)$, получаем

$$\|l_N^* \mid X_2^r(S)^*\| \leq \left\{ \frac{1}{4\pi} \sum_{k=2m}^{\infty} \frac{2k+1}{k^{2r}(k+1)^{2r}} \right\}^{1/2}. \tag{40}$$

Упростим выражение в правой части этого неравенства, заметив, что функция $f(y)$, значения которой в натуральных точках числовой оси здесь суммируются, монотонно убывает при $y \geq 1$:

$$f(y) = \frac{2y+1}{y^{2r}(y+1)^{2r}} = \frac{2}{y^{2r-1}(y+1)^{2r}} + \frac{1}{y^{2r}(y+1)^{2r}}, \quad r > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, для любых натуральных k и L справедливы соотношения

$$\int_k^{k+1} f(y)\,dy \geq f(k+1),$$

$$\int_L^{\infty} f(y)\,dy = \sum_{k=L}^{\infty} \int_k^{k+1} f(y)\,dy \geq \sum_{k=L}^{\infty} f(k+1) = \sum_{k=L+1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^{2r}(k+1)^{2r}}.$$

Подставляя неравенство $f(y) \leq 2/y^{4r-1}$, справедливое при всех $y \geq 1$, под интеграл в предыдущей строке, получаем

$$\sum_{k=L}^{\infty} \frac{2k+1}{k^{2r}(k+1)^{2r}} \leq 2 \int_{L-1}^{\infty} \frac{1}{y^{4r-1}}\,dy = \frac{1}{2r-1} \left(\frac{1}{L-1}\right)^{4r-2}. \tag{41}$$

Таким образом, упрощенно оценка (40) записывается как следующее соотношение:

$$\|l_N^* \mid X_2^r(S)^*\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi(2r-1)}(2m-1)^{2r-1}} \sim \frac{1}{2^{r+1}\sqrt{\pi\big(r-\frac{1}{2}\big)}} \left(\frac{1}{N}\right)^{r-\frac{1}{2}} \text{ при } N \to \infty. \tag{42}$$

Отметим, что чем меньше гладкость r класса подынтегральных функций, тем медленнее сходится рассматриваемая последовательность сферических кубатурных формул. В пределе же при $r \to 1/2$ полученная оценка нормы становится бесполезной.

Пользуясь представлением (22) константы вложения $A_3^{(r)}$ и неравенством (41) при $L = 2$, приходим к оценке константы вложения сверху:

$$A_3^{(r)} \leq \left\{ 1 + \frac{3}{\pi 2^{2r+2}} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_1^\infty \frac{1}{y^{4r-1}}\, dy \right\}^{1/2} = \left\{ 1 + \frac{3}{\pi 2^{2r+2}} + \frac{1}{4\pi(2r-1)} \right\}^{1/2}. \tag{43}$$

В частности, заключаем, что при $r \to \infty$ существует равный единице предел $A_3^{(r)}$.

Оценим, наконец, практическую погрешность кубатурной формулы (35) при $N = 2m^2$ на любой функции ψ из единичного шара пространства $X_2^r(S)$, $r > 1/2$. Пользуясь общей оценкой (31) практической погрешности, а также неравенствами (42) и (43), получаем

$$|M_S(\psi) - \widetilde{\Sigma}_N(\psi)| \leq \frac{1}{2^{r+1}\sqrt{\pi\left(r - \frac{1}{2}\right)}} \left(\frac{1}{N}\right)^{r-\frac{1}{2}} + 4N\varepsilon_1 \left\{ 1 + \frac{3}{\pi 2^{2r+2}} + \frac{1}{4\pi(2r-1)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{44}$$

Правая часть этого неравенства — функция вида $C(r)/N^\mu + D(r)\varepsilon_1 N$, где $\mu = r - 1/2$, а $C(r)$ и $D(r)$ — известные положительные величины, не зависящие от N. При $N \geq 1$ указанная функция сначала монотонно убывает, достигая своего минимального значения при некотором $N = N_{opt}$, а затем при $N > N_{opt}$ монотонно и неограниченно возрастает. Как несложно подсчитать, $N_{opt} = \left(\frac{\mu C(r)}{D(r)\varepsilon_1}\right)^{1/(\mu+1)}$.

Таким образом, среди сферических кубатурных формул вида (35) оптимальной с точки зрения минимизации полученной выше мажоранты практической погрешности на единичном шаре пространства $X_2^r(S)$, $r > 1/2$, является формула с числом узлов, ближайшим к вышеуказанному значению $N = N_{opt}$. Конечно, при выполнении конкретных расчетов для индивидуальных функций из единичного шара пространства $X_2^r(S)$ практическая погрешность может, во-первых, оказаться меньше, чем это гарантируется оценкой (44), и, во-вторых, эта меньшая практическая погрешность может достигаться при числе узлов формулы, отличном от параметра N_{opt}. Однако чтобы получить в этом случае априорные аналитические оценки практической погрешности, придется привлечь новую информацию о подынтегральной функции, существенно дополняющую и расширяющую сведения о ней только как об элементе единичного шара из $X_2^r(S)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белых В. Н.* Ненасыщаемый численный метод решения внешней осесимметричной задачи Неймана для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 6. С. 1234–1252.
2. *Triebel H.* Sampling numbers and embedding constants // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2005. V. 248. P. 275–284.
3. *Васкевич В. Л.* Константы вложения периодических пространств Соболева дробного порядка // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1019–1027.

4. *Васкевич В. Л.* Константы и функции вложения пространств соболевского типа на единичной сфере // Докл. РАН. 2010. Т. 433, № 4. С. 441–446.
5. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1996.
6. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
7. *Годунов С. К., Антонов А. Г., Кирилюк О. П., Костин В. И.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1988.
8. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
9. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001.
10. *Васкевич В. Л.* О возмущениях погрешности при малых шевелениях весов кубатурной формулы // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. Спец. выпуск. С. 19–26.
11. *Васкевич В. Л.* Критерий гарантированной точности вычисления многомерных интегралов // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9. Спец. выпуск. С. 44–49.
12. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
13. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
14. *Игнатов М. И., Певный А. Б.* Натуральные сплайны многих переменных. Л.: Наука, 1991.
15. *Müller C.* Spherical harmonics. Berlin: Springer-Verl., 1966.
16. *Салихов Г. Н.* Кубатурные формулы для многомерных сфер. Ташкент: Фан, 1985.
17. *Мысовских И. П.* Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
18. *Диткин В. А.* О некоторых приближенных формулах для вычисления трехкратных интегралов // Докл. АН СССР. 1948. Т. 62, № 4. С. 445–447.
19. *Мысовских И. П.* О кубатурных формулах для вычисления интегралов по поверхности сферы // Сиб. мат. журн. 1964. Т. 5, № 3. С. 721–723.
20. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.

Статья поступила 27 января 2012 г.

Васкевич Владимир Леонтьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vask@math.nsc.ru