Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 514.763+512.812.4+517.911

КВАЗИПРОСТРАНСТВА, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ИЗМЕРИМЫМИ В $\mathbb{R}^3$ ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ

А. В. Белых, А. В. Грешнов

Аннотация. Для одного класса базисных векторных полей в $\mathbb{R}^3$ с измеримыми координатами рассмотрены некоторые индуцированные ими метрические функции. Доказано, что эти функции являются квазиметриками в области определения векторных полей. При некоторых естественных ограничениях для рассматриваемых классов векторных полей доказаны аналоги теорем Рашевского — Чоу и Ball-Box.

Ключевые слова: векторное поле, квазиметрика, обобщенное неравенство треугольника, горизонтальная кривая.

Введение

В работе для векторных полей вида

$$X = (1, 0, f(x, y)), \quad Y = (0, 1, g(x, y)), \quad T = (0, 0, 1), \tag{0.1}$$

определенных на области O из $\mathbb{R}^3$ со стандартной системой координат (x, y, z), где

(q_1^0) функция $f(x, y)$ при всяком фиксированном y является измеримой функцией переменного x, а при всяком фиксированном x является липшицевой с константой L функцией переменного y,

(q_2^0) функция $g(x, y)$ при всяком фиксированном x является измеримой функцией переменного y, а при всяком фиксированном y является липшицевой с константой L функцией переменного x,

(q_3^0) константа L не зависит от выбора x и y,

(q_4^0) функции f и g ограничены в O некоторой константой K,

изучаются свойства отображения ϑ_u вида

$$\vartheta_u : (a, b, c) \to \exp(cT) \circ \exp(bY) \circ \exp(aX)(u), \quad u = (u_1, u_2, u_3) \in O. \tag{0.2}$$

Здесь $\exp(aX)(v)$, $\exp(bY)(v)$, $\exp(cT)(v)$ — концевые точки абсолютно непрерывных кривых $\gamma_{aX,v}(s)$, $\gamma_{bY,v}(s)$, $\gamma_{cT,v}(s)$, $s \in [0, 1]$, определяемых уравнениями

$$\gamma_{aX,v}(s) = v + \int_0^s aX(\gamma_{aX,v}(s))\,ds, \quad \gamma_{bY,v}(s) = v + \int_0^s bY(\gamma_{bY,v}(s))\,ds,$$

$$\gamma_{cT,v}(s) = v + \int_0^s cT(\gamma_{cT,v}(s))\,ds.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (соглашение № 8206).

Символом $d(u,v)$ обозначим метрическую функцию

$$d(u,v) = \max\{|a|, |b|, |c|^{1/2}\}, \quad v = \vartheta_u(a,b,c).$$

В работе установлено, что $d(u,v)$ является квазиметрикой, а при некотором дополнительном условии на функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$, аналогичном известному условию Хёрмандера, квазиметрика $d(u,v)$ билипшицево эквивалентна метрике Карно — Каратеодори ρ, индуцированной векторными полями X и Y.

Векторные поля вида $X_f = (1, 0, f(x,y,t))$, $X_g = (0, 1, g(x,y,t))$, где $f(x,y,t)$, $g(x,y,t)$ — гладкие функции, определенные на области $O \subset \mathbb{R}^3$ со стандартной системой координат (x,y,t), возникают при изучении некоторого класса эллиптических и параболических дифференциальных уравнений, который содержит как частный случай уравнение кривизны Леви [1], и называются *полями Леви* [2] (о геометрическом значении и применениях уравнения кривизны Леви см. в [3, 4]).

Напомним известное условие Хёрмандера [5, 6]. Пусть M — гладкое риманово многообразие, и пусть $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ — гладкие векторные поля на M. Говорят, что $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ *удовлетворяют условию Хёрмандера порядка* Υ, если значения всевозможных коммутаторов векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ порядка от 0 до Υ включительно (коммутаторы нулевого порядка здесь совпадают с $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$) натягивают все касательное пространство T_uM в каждой точке $u \in M$. Векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ обычно называют *горизонтальными*. Из классической теоремы Рашевского [7] и Чоу [8] вытекает, что в случае выполнения условия Хёрмандера любые две точки $u, v \in M$, достаточно близко расположенные друг к другу, можно соединить конечным числом отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей. *Метрика Карно — Каратеодори* ρ_{cc} на многообразии M определяется [6] как

$$\rho_{cc}(u,v) = \inf\{l(\gamma) \mid \gamma : [0, s_0] \to O,\ \gamma(0) = u,\ \gamma(s_0) = v\},$$

где $\gamma = \gamma(s)$ — *горизонтальная кривая*, т. е. такая абсолютно непрерывная кривая, что для почти всех $s \in [0, s_0]$ выполняется $\dot\gamma(s) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^s X_i(\gamma(s))$, α_i^s — некоторые измеримые функции, $l(\gamma)$ — длина γ. О метрике Карно — Каратеодори хорошо написано в [6]. Метрика Карно — Каратеодори «естественна» при решении задач теории субэллиптических уравнений [9, 10], но для получения тех или иных оценок удобнее использовать билипшицево эквивалентную ей квазиметрику.

Определение 0.1. Функция $d : A \times A \to \mathbb{R}^+ \cup 0$ (см., например, [11]), где A — некоторое множество, называется *квазиметрикой*, если

1) $d(u,v) \geq 0$ (аксиома неотрицательности), $d(u,v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$ (аксиома тождества);

2) $d(u,v) \leq \kappa_1 d(v,u)$ для некоторой константы κ_1, не зависящей от выбора u, v (обобщенная аксиома симметричности);

3) $d(u,v) \leq \kappa_2(d(u,w) + d(w,v))$ для некоторой константы κ_2, не зависящей от выбора $u, v, w \in A$ (обобщенное неравенство треугольника).

Пару (A, d) будем называть *квазипространством*.

Чтобы объяснить, какие квазиметрики эквивалентны метрике Карно — Каратеодори, рассмотрим в качестве примера эквирегулярные пространства Карно — Каратеодори [6]. Пусть $\{X_i\}_{i=1,\dots,h_1}$ — C^∞-гладкие в некоторой области $U \subset \mathbb{R}^N$ векторные поля, $1 < h_1 < N$, удовлетворяющие условию Хёрмандера и такие, что каждое подрасслоение H_i касательного расслоения TU, натянутое на всевозможные коммутаторы векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,h_1}$ до порядка $i-1$ включительно, обладает следующим свойством: размерность $\dim H_i(u) = h_i = \mathrm{const} > 0$ не зависит от выбора точки $u \in U$. Для каждого $i = 1, \dots, \Upsilon$ определим базис H_i по индукции: к базису векторных полей подрасслоения H_{i-1} добавим $h_i - h_{i-1}$ коммутаторов порядка $i-1$ векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,h_1}$ (обозначим «добавленные» коммутаторы через $X_{h_{i-1}+1}, \dots, X_{h_i}$, $h_0 = 0$, $H_0 = \{\varnothing\}$) так, что значения векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,h_i}$ линейно независимы в каждой точке $u \in U$. Тогда $H_\Upsilon = TU$. Далее рассмотрим экспоненциальное отображение

$$\theta_g : (a_1, \dots, a_N) \to \exp\left(\sum_{i=1}^{N} a_i X_i\right)(g), \quad g \in U,$$

где $\exp(Z)(g)$ обозначает концевую точку отрезка интегральной линии векторного поля Z с началом в точке g единичной временно́й длины [12]. Известно (см., например, [13]), что отображение θ_g является C^∞-гладким диффеоморфизмом в некоторой окрестности O_g точки g и задает там систему координат 1-го рода: компоненты вектора $(a_1, \dots, a_N)$ являются координатами 1-го рода точки $u_a = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} a_i X_i\right)(g) \in O_g$. Определим метрическую функцию

$$d_{cc}(u, v) = \max_{i=1,\dots,N} \left\{ |a_i|^{\frac{1}{\deg X_i}} \mid \exp\left(\sum_{i=1}^{N} a_i X_i\right)(u) = v \in O_g \right\},$$

где $\deg X_i = \min\{j \mid X_i \in H_j\}$. Следующий результат (даже в более общем случае) установлен в [9].

Теорема Ball-Box. *Найдутся область $O \subset U$ и константа $C > 0$ такие, что*

$$\frac{d_{cc}(u, v)}{C} \le \rho_{cc}(u, v) \le C d_{cc}(u, v) \quad \forall u, v \in O,$$

где ρ_{cc} — метрика Карно — Каратеодори, индуцированная в O векторными полями $\{X_i\}_{i=1,\dots,h_1}$.

Из определения d_{cc} и теоремы Ball-Box следует, что метрическая функция d_{cc} является квазиметрикой. Отметим, что приведенный выше способ определения квазиметрики, эквивалентной метрике Карно — Каратеодори, не является единственным (можно, например, использовать систему координат 2-го рода [14]).

В случае гладких векторных полей Леви X_f и X_g, удовлетворяющих условию Хёрмандера, в [1, 15] доказаны теоремы регулярности решений соответствующего уравнения кривизны Леви. Если векторные поля X_f, X_g не гладкие, то условие Хёрмандера для них по естественным причинам отсутствует. С другой стороны, в [16] отмечено, что условие на коммутаторы может быть заменено требованием, чтобы любая пара точек могла быть соединена абсолютно непрерывной кривой, составленной из конечного числа отрезков интегральных линий соответствующих векторных полей (в нашем случае — векторных полей X_f и X_g). При условии выполнения этого требования в [16] доказаны теоремы регулярности для решений класса дифференциальных уравнений, ассоциированных с негладкими дифференциальными операторами, которые определялись при помощи диагональных векторных полей $\lambda_j(x)e_j$, $j = 1, \dots, N$, где e_j —

стандартный орт евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, $\lambda_j(x)$ — некоторые неотрицательные непрерывные функции с непрерывными частными производными всюду, за исключением начала координат. Работа [16] явилась одним из стимулов к рассмотрению задач о регулярности решении субэллиптических уравнений для негладких векторных полей и связанных с этим вопросов о минимальных предположениях на регулярность векторных полей, при которых все еще верны теоремы Рашевского — Чоу и Ball-Box [2, 17, 18]. В [2] доказана теорема Ball-Box для негладких векторных полей степени $s \geq 2$. Как следствие полученного результата для C^1-гладких векторных полей типа Леви при некоторых дополнительных условиях, связанных с существованием обобщенных производных, установлена соответствующая теорема Ball-Box.

В настоящей работе мы рассматриваем частный случай полей типа Леви — поля пирамидального вида. Векторное поле X, определенное в $\mathbb{R}^N$ с системой координат $(x_1, \dots, x_N)$, имеет пирамидальный вид [19], если $X = (a_1, a_2(x_1), a_3(x_1, x_2), \dots)$, $a_1 = \text{const}$. Примером векторных полей пирамидального вида являются векторные поля $(1, 0, 2y)$, $(0, 1, -2x)$, $(0, 0, 1)$, образующие базис левоинвариантных векторных полей группалгебры Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ [20]. В § 1 доказано, что при каждом фиксированном $u \in O$ отображение ϑ_u является гомеоморфизмом, определенным в некоторой окрестности начала координат евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ (следствие 1.1); таким образом, отображение ϑ_u задает систему координат 2-го рода для некоторой окрестности точки u (см., например, [14]). Введем в рассмотрение анизотропную метрическую функцию

$$d(u, v) = \max\{|a|, |b|, |c|^{1/2}\}, \quad v = \vartheta_u(a, b, c).$$

Из определения 0.1 вытекает, что для $d(u, v)$ выполняется аксиома тождества. В § 1 доказано

Утверждение 0.1. *Функция $d(u, v)$ удовлетворяет: 1^0) обобщенной аксиоме симметричности, 2^0) обобщенному неравенству треугольника.*

Таким образом, метрическая функция $d(u, v)$ является квазиметрикой.

Обозначение 0.1. Открытый шар в квазиметрике d с центром в точке x радиуса R будем обозначать через $\operatorname{Box}(x, R)$.

Основными результатами § 2 являются обобщения теоремы Рашевского — Чоу и Ball-Box для векторных полей X, Y из (0.1).

Определение 0.2. Абсолютно непрерывная параметризованная кривая $\gamma(s) = (x, y, z)(s)$, $s \in [0, s_0]$, называется *горизонтальной*, если $\gamma(s)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \int_0^s (\dot{x} \cdot X(\gamma) + \dot{y} \cdot Y(\gamma))(s)\, ds. \tag{0.3}$$

Из (0.3) вытекает, что

$$z(t) = z(0) + \int_0^t (\dot{x} \cdot f(x, y) + \dot{y} \cdot g(x, y))(s)\, ds. \tag{0.4}$$

Длину l абсолютно непрерывной горизонтальной кривой $\gamma = \gamma(s)$, $s \in [0, s_0]$, будем вычислять по формуле

$$l(\gamma) = \int_0^{s_0} (\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s))^{\frac{1}{2}}\, ds.$$

Теорема 0.1. *Предположим, что $M(s_0, u) \neq 0$ в некоторой точке $u = (u_1, u_2, u_3) \in O$ для некоторого достаточно малого числа s_0. Тогда найдется окрестность O_u точки u такая, что любые две точки $u^1, u^2 \in O_u$ можно соединить абсолютно непрерывной горизонтальной кривой конечной длины.*

Здесь (см. [21])

$$M(s_0, u) = \frac{1}{s_0} \int\limits_0^{s_0} K(s, s_0, u)\, ds,$$

где

$$K(s, s_0, u) = \frac{(g(u_1 + s_0, u_2 + s) - g(u_1, u_2 + s)) - (f(u_1 + s, u_2 + s_0) - f(u_1 + s, u_2))}{s_0},$$

$u = (u_1, u_2, u_3) \in O$. Неравенство $M(s_0, u) \neq 0$ является аналогом условия Хёрмандера для векторных полей X, Y.

Используя результат теоремы 0.1, определим в области O_u метрику Карно — Каратеодори ρ.

Определение 0.3. *Метрикой Карно — Каратеодори* будем называть функцию $\rho(v, w) = \inf l(\gamma)$, где $\gamma \subset O_u$ — всевозможные абсолютно непрерывные горизонтальные пути, соединяющие точки $v, w \in O_u$.

Открытый шар в метрике ρ с центром в точке x радиуса R будем обозначать через $B(x, r)$.

Теорема 0.2. *Предположим, что найдется положительная константа σ такая, что*

$$0 < \sigma < |M(s, v)| \quad \forall s \in (0, s_0]\ \forall v \in O_u.$$

Тогда для некоторой константы $K = K(\sigma, L)$ равномерно по $v \in O_u$ выполняются включения $B(v, K^{-1}r) \subset \mathrm{Box}(v, r) \subset B(v, Kr)$.

Теорема 0.2 является аналогом теоремы Ball-Box в случае векторных полей X, Y из (0.1).

Настоящая работа распространяет на векторные поля (0.1) результаты работы [21], идеям которой мы и следовали. Однако в отличие от [21] мы использовали систему координат 2-го рода; использование системы координат 1-го рода в рамках поставленных задач при ограничениях (q_0^1)–(q_0^4) на функции f, g достаточно затруднительно. Рассмотрим систему о.д.у.

$$\dot{x}(s) = X(s, x),\ s \in (0, 1), \quad x(0) = g \in \mathbb{R}^N. \tag{0.5}$$

Теорема Каратеодори о существовании и единственности решений для о.д.у. (см. [22]) говорит о том, что если вектор-функция $X(s, x)$ при постоянном x является измеримой функцией переменного s на $(0, 1)$, существует неотрицательная функция $M(s)$, суммируемая на любом отрезке из $(0, 1)$, такая, что $|X(s, x)| \leq M(s)$ для любой точки x, и вектор-функция $X(s, x)$ такова, что для любой точки $\bar{x}$ при $s \in (0, 1)$ выполняется условие $|X(s, \bar{x}) - X(s, x(s))| \leq M(s)|\bar{x} - x(s)|$, то решение задачи (0.5) существует и единственно. Поэтому в рамках задач работы условия (q_0^1)–(q_0^4) в определенном смысле минимальны. Отметим, что даже на уровне частных случаев в математической литературе не отмечены примеры базисных векторных полей с более слабыми условиями на их регулярность, при которых выполняются соответствующие аналоги теорем

Рашевского —Чоу и Ball-Box. Поиск минимальных условий на регулярность базисных векторных полей общего вида, при которых выполняются аналоги теорем Рашевского —Чоу и Ball-Box, является актуальной интересной задачей (см. [2, 17, 18]).

§ 1. Некоторые свойства отображения ϑ_u

Свойство 1.1. (1^0) *В некоторой окрестности начала координат отображение ϑ_u биективно*;

(2^0) $\vartheta_u(0,0,0) = u$;

(3^0) *отображение ϑ_u непрерывно по переменным a, b, c.*

Доказательство. (1^0) Пусть $u = (u_1, u_2, u_3)$. По определению имеем

$$\exp(saX)(u) = \left(u_1 + as, u_2, u_3 + \int_0^s af(u_1 + at, u_2)\,dt\right),$$

$$\exp(sbY) \circ \exp(aX)(u) = \left(u_1 + a, u_2 + bs, u_3 + \int_0^1 af(u_1 + at, u_2)\,dt + \int_0^s bg(u_1 + a, u_2 + bt)\,dt\right), \quad (1.1)$$

$$\exp(cT) \circ \exp(bY) \circ \exp(aX)(u) = \left(u_1 + a, u_2 + b, u_3 + \int_0^1 af(u_1 + at, u_2)\,dt + \int_0^1 bg(u_1 + a, u_2 + bt)\,dt + c\right).$$

Рассмотрим произвольную точку $v = (v_1, v_2, v_3) = \vartheta_u(a, b, c)$, принадлежащую некоторой окрестности точки u. Тогда $a = v_1 - u_1$, $b = v_2 - u_2$, и в силу ограниченности интегралов последнего равенства из (1.1) единственным образом найдется c такое, что $\vartheta_u(a, b, c) = v$. Тем самым для любой точки v, принадлежащей некоторой окрестности точки u, единственным образом определяется точка (a, b, c), принадлежащая некоторой окрестности начала координат, такая, что $\vartheta_u(a, b, c) = v$. Таким образом, п. (1^0) доказан. П. (2^0) очевиден. Для доказательства п. (3^0) рассмотрим разность

$$\exp((c+\varepsilon_3)T)\circ\exp((b+\varepsilon_2)Y)\circ\exp((a+\varepsilon_1)X)(u) - \exp(cT)\circ\exp(bY)\circ\exp(aX)(u)$$
$$= \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 + \int_0^1 (a+\varepsilon_1)f(u_1+(a+\varepsilon_1)t, u_2)\,dt + \int_0^1 (b+\varepsilon_2)g(u_1+a+\varepsilon_1, u_2+(b+\varepsilon_2)t)\,dt - \int_0^1 af(u_1 + at, u_2)\,dt - \int_0^1 bg(u_1 + a, u_2 + bt)\,dt\right)$$
$$= \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 + \int_0^{a+\varepsilon_1} f(u_1 + \tau, u_2)\,d\tau - \int_0^a f(u_1 + \tau, u_2)\,d\tau\right.$$

$$+\int\limits_0^{b+\varepsilon_2} g(u_1+a+\varepsilon_1,u_2+\tau)\,d\tau-\int\limits_0^{b} g(u_1+a,u_2+\tau)\,d\tau\Bigg)$$

$$=\Bigg(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3+\int\limits_a^{a+\varepsilon_1} f(u_1+\tau,u_2)\,d\tau+\int\limits_b^{b+\varepsilon_2} g(u_1+a+\varepsilon_1,u_2+\tau)\,d\tau$$

$$+\int\limits_0^{b}(g(u_1+a+\varepsilon_1,u_2+\tau)-g(u_1+a,u_2+\tau))\,d\tau\Bigg)$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3+p_1(\varepsilon_1)+p_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2)+p_3(\varepsilon_1)). \quad (1.2)$$

При $\varepsilon_i\to 0$, $i=1,2,3$, имеем $p_1(\varepsilon_1)\to 0$, $p_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to 0$. Кроме того, используя липшицевость функции $g(x,y)$ по первому аргументу, получим $|p_3(\varepsilon_1)|\le bL\varepsilon_1$. Поэтому разность (1.2) стремится к 0 при $\varepsilon_i\to 0$, $i=1,2,3$, откуда и следует п. 3^0.

Следствие 1.1. *Для каждой точки $u\in O$ найдется такая окрестность $\mathscr{O}$ начала координат евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, что отображение ϑ_u является гомеоморфизмом на $\mathscr{O}$.*

Свойство 1.2. *Отображение ϑ_u непрерывно по переменной $u=(u_1,u_2,u_3)$.*

Доказательство. Рассмотрим точки $u=(u_1,u_2,u_3)$, $u^\varepsilon=(u_1+\varepsilon_1,u_2+\varepsilon_2,u_3+\varepsilon_3)$. Для того чтобы установить непрерывность отображения ϑ_u в точке u, покажем, что выражение $\vartheta_{u^\varepsilon}(a,b,c)-\vartheta_u(a,b,c)$ стремится к 0 при $\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}\to 0$. Используя (1.1), имеем

$$\vartheta_{u^\varepsilon}(a,b,c)-\vartheta_u(a,b,c)=\Bigg(u_1+a+\varepsilon_1,u_2+b+\varepsilon_2,u_3+\int\limits_0^1 af(u_1+at+\varepsilon_1,u_2+\varepsilon_2)\,dt$$

$$+\int\limits_0^1 bg(u_1+a+\varepsilon_1,u_2+bt+\varepsilon_2)\,dt+c+\varepsilon_3\Bigg)$$

$$-\Bigg(u_1+a,u_2+b,u_3+\int\limits_0^1 af(u_1+at,u_2)\,dt+\int\limits_0^1 bg(u_1+a,u_2+bt)\,dt+c\Bigg)$$

$$=\Bigg(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3+\int\limits_0^1 af(u_1+at+\varepsilon_1,u_2+\varepsilon_2)\,dt-\int\limits_0^1 af(u_1+at,u_2)\,dt$$

$$+\int\limits_0^1 bg(u_1+\varepsilon_1+a,u_2+\varepsilon_2+bt)\,dt-\int\limits_0^1 bg(u_1+a,u_2+bt)\,dt\Bigg).$$

Учитывая условия (q_1^0)–(q_4^0), получаем

$$\int\limits_0^1 af(u_1+at+\varepsilon_1,u_2+\varepsilon_2)\,dt-\int\limits_0^1 af(u_1+at,u_2)\,dt$$

$$=\int\limits_0^a f(u_1+\varepsilon_1+\tilde t,u_2+\varepsilon_2)\,d\tilde t-\int\limits_0^a f(u_1+\tilde t,u_2)\,d\tilde t$$

$$= \int\limits_0^a \big(f(u_1+\varepsilon_1+\tilde t, u_2+\varepsilon_2)-f(u_1+\tilde t, u_2+\varepsilon_2)\big)\,d\tilde t - \int\limits_0^a \big(f(u_1+\tilde t, u_2)-f(u_1+\tilde t, u_2+\varepsilon_2)\big)\,d\tilde t$$

$$= \int\limits_{\varepsilon_1}^{a+\varepsilon_1} f(u_1+t', u_2+\varepsilon_2)\,dt' - \int\limits_0^a f(u_1+\tilde t, u_2+\varepsilon_2)\,d\tilde t + o(1) = o(1)$$

при $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$. Аналогично оценивается разность

$$\int\limits_0^1 bg(u_1+\varepsilon_1+a, u_2+\varepsilon_2+bt)\,dt - \int\limits_0^1 bg(u_1+a, u_2+bt)\,dt;$$

значит, функции

$$A(u,a,b,c) = \int\limits_0^1 af(u_1+at, u_2)\,dt, \quad B(u,a,b,c) = \int\limits_0^1 bg(u_1+a, u_2+bt)\,dt$$

непрерывны по $u = (u_1, u_2, u_3)$, откуда с учетом (0.2), (1.1) следует свойство 1.2.

Доказательство утверждения 0.1. 1^0. Пусть $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$. Учитывая следствие 1.1, имеем

$$(v_1, v_2, v_3) = \exp(cT)\circ\exp(bY)\circ\exp(aX)(u)$$
$$= \left(u_1+a, u_2+b, u_3 + \int\limits_0^1 af(u_1+at, u_2)\,dt + \int\limits_0^1 bg(u_1+a, u_2+bt)\,dt + c\right),$$

$$(u_1, u_2, u_3) = \exp(-\tilde cT)\circ\exp(-bY)\circ\exp(-aX)(v)$$
$$= \left(v_1-a, v_2-b, v_3 - \int\limits_0^1 af(v_1-at, v_2)\,dt - \int\limits_0^1 bg(v_1-a, v_2-bt)\,dt - \tilde c\right),$$

откуда, используя замену переменной $1-t = t_{\text{н}}$, получаем

$$\tilde c = c + \int\limits_0^1 af(u_1+at, u_2)\,dt - \int\limits_0^1 af(v_1-at, v_2)\,dt$$
$$+ \int\limits_0^1 bg(u_1+a, u_2+bt)\,dt - \int\limits_0^1 bg(v_1-a, v_2-bt)\,dt$$
$$= c + a\int\limits_0^1 (f(u_1+at, u_2) - f(u_1+at, v_2))\,dt + b\int\limits_0^1 (g(u_1+a, u_2+bt) - g(u_1, u_2+bt))\,dt,$$

следовательно, $|\tilde c| \le |c| + 2L|a||b|$. Точно так же можно показать, что $|c| \le |\tilde c| + 2L|a||b|$. Поэтому $d(v,u) \le (1+2L)^{1/2} d(u,v)$, и п. 1^0 доказан.

2^0. Рассмотрим точки $w = (x_0, y_0, z_0)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$. Используя (1.1), для некоторых чисел s, t, τ, $(s,t,\tau) = (a\varepsilon, b\varepsilon, c\varepsilon^2)$, $|(a,b,c)|_\infty = 1$, $\varepsilon > 0$, имеем

$$u_1 = x_0 + a\varepsilon, \quad u_2 = y_0 + b\varepsilon,$$
$$u_3 = z_0 + c\varepsilon^2 + \int\limits_0^{a\varepsilon} f(x_0+s, y_0)\,ds + \int\limits_0^{b\varepsilon} g(x_0+a\varepsilon, y_0+t)\,dt. \tag{1.3}$$

Также используя (1.1), для некоторых чисел $\tilde a, \tilde b, \tilde c$, $|(\tilde a, \tilde b, \tilde c)|_\infty = 1$, и $\lambda > 0$ получаем

$$v_1 = u_1 + \tilde a\lambda = x_0 + a\varepsilon + \tilde a\lambda, \quad v_2 = u_2 + \tilde b\lambda = y_0 + b\varepsilon + \tilde b\lambda,$$

$$\begin{aligned} v_3 = z_0 + c\varepsilon^2 + \tilde c\lambda^2 + \int\limits_0^{a\varepsilon} f(x_0 + s, y_0)\,ds + \int\limits_0^{b\varepsilon} g(x_0 + a\varepsilon, y_0 + t)\,dt \\ + \int\limits_0^{\tilde a\lambda} f(x_0 + a\varepsilon + \tilde s, y_0 + b\varepsilon)\,d\tilde s + \int\limits_0^{\tilde b\lambda} g(x_0 + a\varepsilon + \tilde a\lambda, y_0 + b\varepsilon + \tilde t)\,d\tilde t. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Для некоторых чисел $\hat s, \hat t, \hat\tau$ имеем

$$\begin{gathered} v_1 = x_0 + \hat s, \quad v_2 = y_0 + \hat t, \\ v_3 = z_0 + \hat\tau + \int\limits_0^{\hat s} f(x_0 + \hat s, y_0)\,d\hat s + \int\limits_0^{\hat t} g(x_0 + \hat s, y_0 + \hat t)\,d\hat t. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Сравним (1.4) и (1.5). Очевидно, что $\hat s = a\varepsilon + \tilde a\lambda$, $\hat t = b\varepsilon + \tilde b\lambda$, откуда $|\hat s| \le \lambda + \varepsilon$, $|\hat t| \le \lambda + \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat\tau = c\varepsilon^2 + \tilde c\lambda^2 + \Bigg(\int\limits_0^{a\varepsilon} f(x_0 + s, y_0)\,ds + \int\limits_0^{\tilde a\lambda} f(x_0 + a\varepsilon + \tilde s, y_0 + b\varepsilon)\,d\tilde s \\ - \int\limits_0^{a\varepsilon + \tilde a\lambda} f(x_0 + \hat s, y_0)\,d\hat s\Bigg) + \Bigg(\int\limits_0^{b\varepsilon} g(x_0 + s, y_0 + t)\,dt + \int\limits_0^{\tilde b\lambda} g(x_0 + a\varepsilon + \tilde a\lambda, y_0 + b\varepsilon + \tilde t)\,d\tilde t \\ - \int\limits_0^{b\varepsilon + \tilde b\lambda} g(x_0 + a\varepsilon + \tilde a\lambda, y_0 + \hat t)\,d\hat t\Bigg) = c\varepsilon^2 + \tilde c\lambda^2 + I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Первая скобка из (1.6) равна

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{\tilde a\lambda} f(x_0 + a\varepsilon + \tilde s, y_0 + b\varepsilon)\,d\tilde s - \int\limits_{a\varepsilon}^{a\varepsilon + \tilde a\lambda} f(x_0 + \hat s, y_0)\,d\hat s \\ = \int\limits_0^{\tilde a\lambda} f(x_0 + a\varepsilon + h, y_0 + b\varepsilon)\,dh - \int\limits_0^{\tilde a\lambda} f(x_0 + a\varepsilon + h, y_0)\,dh, \end{aligned}$$

откуда $|I_1| \le L\lambda\varepsilon$. Вторая скобка из (1.6) равна

$$\int\limits_0^{b\varepsilon} g(x_0 + a\varepsilon, y_0 + t)\,dt - \int\limits_0^{b\varepsilon} g(x_0 + a\varepsilon + \tilde a\lambda, y_0 + \hat t)\,d\hat t,$$

тем самым $|I_2| \le L\lambda\varepsilon$. Таким образом, $|\hat\tau| \le \varepsilon^2 + \lambda^2 + 2L\lambda\varepsilon$. Тогда

$$|\hat\tau| \le (1 + 2L)(\lambda^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon\lambda) \le (1 + 2L)(\lambda + \varepsilon)^2.$$

С учетом того, что $d(w, u) = \varepsilon$, $d(u, v) = \lambda$, п. 2^0 доказан.

Следствие 1.2. *Метрическая функция $d(u, v)$ является квазиметрикой.*

§ 2. Аналог теорем Рашевского — Чоу и Ball-Box для квазипространства (O, d)

Свойство 2.1. *Параметризованная кривая*

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \int_0^s (\alpha X + \beta Y)(\gamma(t))\, dt, \quad \alpha = \mathrm{const},\ \beta = \mathrm{const},\ s \in [0, s_1],$$

горизонтальна, и $l(\gamma)|_{[0,s_1]} = s_1(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}$.

Доказательство очевидно.

Рассмотрим функцию $M(s_0, u)$ из введения. Из условий (q_1^0)–(q_4^0) и свойства 1.2 вытекает, что

(a^0) $M(s_0, u) \in C((0, s') \times O)$ для некоторой константы s' и $|M(s_0, u)| \leq 2L$ равномерно в $(0, s') \times O$.

Доказательство теоремы 0.1. Пусть для определенности $M(s_0, u) > 0$, $u = (u_1, u_2, u_3)$. Рассмотрим следующие горизонтальные кривые:

$$\gamma_{1,s_0}(s) = u + \int_0^s X(\gamma_{1,s_0}(s))\, ds = \begin{cases} x_1(s) = u_1 + s, \\ y_1(s) = u_2, \\ z_1(s) = u_3 + \int\limits_0^s f(u_1 + s, u_2)\, ds, \quad s \in [0, s_0]; \end{cases}$$

$$\gamma_{2,s_0}(s) = \gamma_{1,s_0}(s_0) + \int_0^s Y(\gamma_{2,s_0}(s))\, ds$$

$$= \begin{cases} x_2(s) = u_1 + s_0, \\ y_2(s) = u_2 + s, \\ z_2(s) = u_3 + \int\limits_0^{s_0} f(u_1 + s, u_2)\, ds + \int\limits_0^s g(u_1 + s_0, u_2 + s)\, ds, \quad s \in [0, s_0]; \end{cases}$$

$$\gamma_{3,s_0}(s) = \gamma_{2,s_0}(s_0) - \int_0^s X(\gamma_{3,s_0}(s))\, ds$$

$$= \begin{cases} x_3(s) = u_1 + s_0 - s, \\ y_3(s) = u_2 + s_0, \\ z_3(s) = u_3 + \int\limits_0^{s_0} f(u_1 + s, u_2)\, ds + \int\limits_0^{s_0} g(u_1 + s_0, u_2 + s)\, ds \\ \qquad - \int\limits_0^s f(u_1 + s_0 - s, u_2 + s_0)\, ds, \quad s \in [0, s_0]; \end{cases}$$

$$\gamma_{4,s_0}(s) = \gamma_{3,s_0}(s_0) - \int_0^s Y(\gamma_{4,s_0}(s))\, ds$$

$$= \begin{cases} x_4(s) = u_1, \\ y_4(s) = u_2 + s_0 - s, \\ z_4(s) = u_3 + \int\limits_0^{s_0} f(u_1 + s, u_2)\, ds + \int\limits_0^{s_0} g(u_1 + s_0, u_2 + s)\, ds \\ \qquad - \int\limits_0^{s_0} f(u_1 + s_0 - s, u_2 + s_0)\, ds - \int\limits_0^s g(u_1, u_2 + s_0 - s)\, ds, \quad s \in [0, s_0]. \end{cases}$$

Из свойства 2.1 вытекает, что параметризованные кривые $\gamma_{i,s_0}(s)$, $i = 1, \dots, 4$, горизонтальны. Используя элементарные линейные замены переменной s, получаем

$$z_4(s_0) - u_3 = \int\limits_0^{s_0} (f(u_1 + s_0 - s, u_2) - f(u_1 + s_0 - s, u_2 + s_0))\, ds$$

$$+ \int\limits_0^{s_0} (g(u_1 + s_0, u_2 + s) - g(u_1, u_2 + s))\, ds = \int\limits_0^{s_0} (g(u_1 + s_0, u_2 + s) - g(u_1, u_2 + s))\, ds$$

$$- \int\limits_0^{s_0} (f(u_1 + s, u_2 + s_0) - f(u_1 + s, u_2))\, ds = s_0^2 M(s_0, u). \quad (2.1)$$

Из (2.1) вытекает, что точки u и $\exp\bigl(s_0^2 M(s_0, u)T\bigr)(u)$ можно соединить горизонтальной «ломаной»

$$p_{u,s_0}(s) = \begin{cases} \gamma_{1,s_0}(s), & s \in [0, s_0], \\ \gamma_{2,s_0}(s - s_0), & s \in [s_0, 2s_0], \\ \gamma_{3,s_0}(s - 2s_0), & s \in [2s_0, 3s_0], \\ \gamma_{4,s_0}(s - 3s_0), & s \in [3s_0, 4s_0], \end{cases} \quad p_{u,s_0}(4s_0) = \exp\bigl(s_0^2 M(s_0, u)T\bigr)(u). \quad (2.2)$$

Из (a^0), (2.1) и (2.2) следует, что для любой точки $\eta \in \bigl(0, s_0^2 M(s_0, u)\bigr]$ найдется горизонтальная «ломаная» $p_{u,t_\eta}(s)$, $\eta = t_\eta^2 M(t_\eta, u)$, $s \in [0, 4t_\eta]$, соединяющая точки u и $\exp(\eta T)(u)$. Из (a^0) вытекает, что найдется окрестность O_u точки u такая, что

$$M(s_0, v) \geq h > 0, \quad h = \mathrm{const},$$

равномерно относительно точек $v \in O_u$ (предполагаем, что область O_u мала настолько, что $O_u \subset \vartheta_v(\mathscr{O})$). Выберем произвольно $u^1, u^2 \in O_u$. В силу следствия 1.1 найдутся константы a, b, c такие, что $\vartheta_{u^1}(a, b, c) = u^2$. Не уменьшая общности, полагаем, что $c > 0$. Тогда горизонтальная кривая γ_{u_1,u_2}, соединяющая точки u^1, u^2, строится следующим образом: сначала движемся (в сторону возрастания параметра) вдоль кривой $\gamma_{aX,u^1}(s)$, $s \in [0, 1]$, потом — вдоль кривой $\gamma_{bY,\gamma_{aX,u^1}(1)}(s)$, $s \in [0, 1]$, а точки $\gamma_{bY,\gamma_{aX,u^1}(1)}(1)$ и u^2 соединяем кривой вида $p_{u,s_0}(s)$ из (2.2). Теорема 0.1 доказана.

Доказательство теоремы 0.2. Для определенности полагаем, что $M(s, v) > 0$ для всех $s \in (0, s_0]$ и всех $v = (v_1, v_2, v_3) \in O_u$. В дальнейшем рассматриваем только такие v, r, что $\mathrm{Box}(v, r) \subset O_u$. Очевидно, что параметризованные кривые вида $\gamma_{aX,v}(s)$, $\gamma_{bY,v}(s)$, $s \in [0, \tau]$, где a, b достаточно малы по модулю, кратчайшие в метрике ρ. Рассмотрим точку

$$w = (w_1, w_2, w_3) = \vartheta_v\bigl(\varepsilon_1 a, \varepsilon_2 b, \varepsilon_3^2 c\bigr) \in \mathrm{Box}(v, r), \quad |(a, b, c)|_\infty = 1,$$

в качестве точки u^2, а точку v — в качестве точки u^1 (см. обозначения из доказательства теоремы 0.1). Соединим точки w и v горизонтальной кривой $\gamma_{v,w}$, построенной по аналогии с кривой γ_{u_1,u_2} из теоремы 0.1. Тогда

$$\rho(v, w) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{4\varepsilon_3}{\sqrt{\sigma}} \leq \frac{6d(v, w)}{\min\{1, \sqrt{\sigma}\}} \Rightarrow \mathrm{Box}(v, r) \subset B(v, C_1 r)$$

для некоторой константы $C_1 = C_1(\sigma, L)$, не зависящей от выбора v.

Докажем другое включение. Рассмотрим некоторую абсолютно непрерывную горизонтальную кривую $\gamma(s) = (x, y, z)(s)$, $s \in [0, \tilde{s}]$, параметризованную длиной дуги, $\gamma(0) = v = (v_1, v_2, v_3)$, $\gamma(\tilde{s}) = w = (w_1, w_2, w_3)$. Тогда (см. (0.4))

$$w_3 = v_3 + \int_0^{\tilde{s}} (\dot{x} f(x, y) + \dot{y} g(x, y))(s)\, ds. \tag{2.3}$$

Рассмотрим параметризованную кривую

$$\tilde{\gamma}(s) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})(s) = \begin{cases} \gamma_{X,v}(s), & s \in [0, s_1], \\ \gamma_{Y, \gamma_{X,v}(s_1)}(s - s_1), & s \in [s_1, s_1 + s_2], \end{cases} \tag{2.4}$$

определенную на $[0, s_1 + s_2]$, такую, что

$$v_1 + s_1 = x(\tilde{s}), \quad v_2 + s_2 = y(\tilde{s}), \quad \tilde{\gamma}(s_1 + s_2) = (w_1, w_2, \tilde{z}(s_1 + s_2)).$$

Тогда

$$\tilde{z}(s_1 + s_2) = v_3 + \int_0^{s_1} f(v_1 + s, v_2)\, ds + \int_0^{s_2} g(w_1, v_2 + s)\, ds. \tag{2.5}$$

Сравним (2.3) и (2.5). Обозначим

$$F_y(x) - F_y(a) = \int_a^x f(t, y)\, dt, \quad G_x(y) - G_x(a) = \int_a^y g(x, t)\, dt.$$

Используя свойства кривой (2.4), имеем

$$\begin{aligned} w_3 - \tilde{z}(s_1 + s_2) &= \int_0^{\tilde{s}} (\dot{x} f(x, y) + \dot{y} g(x, y))(s)\, ds - \int_0^{\tilde{s}} (\dot{x} f(x, v_2) + \dot{y} g(w_1, y))(s)\, ds \\ &+ \int_0^{\tilde{s}} (\dot{x} f(x, v_2) + \dot{y} g(w_1, y))(s)\, ds - \int_0^{s_1} f(v_1 + t, v_2)\, dt - \int_0^{s_2} g(w_1, v_2 + t)\, dt \\ &= \int_0^{\tilde{s}} (\dot{x} f(x, y) + \dot{y} g(x, y))(s)\, ds - \int_0^{\tilde{s}} (\dot{x} f(x, v_2) + \dot{y} g(w_1, y))(s)\, ds \\ &+ F_{v_2}(x(\tilde{s})) - F_{v_2}(v_1) + G_{w_1}(y(\tilde{s})) - G_{w_1}(v_2) - F_{v_2}(v_1 + s_1) + F_{v_2}(v_1) \\ &- G_{w_1}(w_2 + s_2) + G_{w_1}(v_2) = \int_0^{\tilde{s}} (\dot{x} \cdot (f(x, y) - f(x, v_2)) + \dot{y} \cdot (g(x, y) - g(w_1, y)))(s)\, ds, \end{aligned}$$

тем самым получаем

$$|w_3 - \tilde{z}(s_1 + s_2)| \le L \int_0^{\tilde{s}} (\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \sqrt{(y - v_2)^2 + (x - w_1)^2})(s)\, ds \le \sqrt{2} L \tilde{s}^2.$$

Несложно заметить, что $\max\{|s_1|, |s_2|\} \le \tilde{s}$. Поэтому $w \in \mathrm{Box}(v, \sqrt{2} L \tilde{s})$. Следовательно, $\gamma(s) \in \mathrm{Box}(v, \sqrt{2} L \tilde{s})$, $s \in [0, \tilde{s}]$, откуда и вытекает требуемое включение.

§ 3. Пример

Приведем пример векторных полей (0.1). Пусть $Q \subset \mathbb{R}$ — некоторое измеримое множество, $X = (1, 0, \chi_1(x)y)$, $Y = (0, 1, x\chi_2(y))$, $T = (0, 0, 1)$, где

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 5, & x \in Q, \\ 10, & x \in (\mathbb{R} \setminus Q), \end{cases} \qquad \chi_2(y) = \begin{cases} 1, & y \in Q, \\ 2, & y \in (\mathbb{R} \setminus Q). \end{cases}$$

При этом несложно заметить, что для всякой гладкой в $\mathbb{R}^3$ функции f выполняются $(XY - YX)f = [X, Y]f = \chi_3 Tf$, где

$$\chi_3(x, y, t) = \chi_1(x) - \chi_2(y) = \begin{cases} 4, & x, y \in Q, \\ 8, & x, y \in (\mathbb{R} \setminus Q), \\ 3, & x \in Q,\ y \in (\mathbb{R} \setminus Q), \\ 9, & y \in Q,\ x \in (\mathbb{R} \setminus Q), \end{cases}$$

и $(XT - TX)f = [X, T]f = 0$, $(YT - TY)f = [Y, T]f = 0$.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту за интерес к результатам работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Citti G., Montanari A.* Regularity properties of solutions of a class of elliptic-parabolic nonlinear Levi type equations // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. V. 354, N 7. P. 2819–2848.
2. *Montanari A., Morbidelli D.* Nonsmooth Hörmander vector fields and their controlled balls // arxiv.org. 2008. 0812.2369v1.
3. *Slodkowski Z., Tomassini G.* Weak solutions for the Levi equation and envelope of holomorphy // J. Funct. Anal. 1991. V. 101, N 4. P. 392–407.
4. *Slodkowski Z., Tomassini G.* Evolution of subsets in $\mathbb{C}^2$ and a parabolic problem for the Levi equation // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. 1997. V. 25, N 4. P. 757–784.
5. *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equations // Acta Math. 1967. V. 119. P. 147–171.
6. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
7. *Рашевский П. К.* О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та. им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат. 1938. Т. 3, № 2. С. 83–94.
8. *Chow W. L.* Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung // Math. Ann. 1939. V. 117. P. 98–105.
9. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. N 1–2. P. 103–147.
10. *Stein E. M.* Some geometrical concepts arising in harmonic analysis // Geom. Funct. Anal. 2000. Special Volume. P. 434–453.
11. *Stein E. M.* Harmonic analysis: real-variables methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
12. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
13. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
14. *Belläiche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 1–78.
15. *Citti G.* C^∞-regularity of solutions of a quasilinear equation related to the Levi operator // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. 1996. V. 23, N 4. P. 483–529.
16. *Franchi B., Lanconelli E.* Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. 1983. V. 10, N 4. P. 523–541.

17. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Субриманова геометрия при минимальной гладкости векторных полей // Докл. РАН. 2008. Т. 422, № 5. С. 583–588.
18. *Montanari A., Morbidelli D.* Step-s involutive families of vector fields, their orbits and the Poincaré inequality // arxiv.org. 2012. 1106.2410v2.
19. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F.* Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007.
20. *Koranyi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg groups // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.
21. *Грешнов А. В.* Об одном классе векторных полей в $\mathbb{R}^3$ // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 517–527.
22. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. II. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.

Статья поступила 3 июня 2010 г., окончательный вариант — 19 июля 2012 г.

Белых Александра Васильевна, Грешнов Александр Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
greshnov@math.nsc.ru