Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 517.956.227

РЕЗОЛЬВЕНТНОЕ УРАВНЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО МАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА ВСЕЙ ОСИ

А. Р. Алиев, Э. Х. Эйвазов

Аннотация. При определенных условиях на магнитный и электрический потенциалы доказывается самосопряженность одномерного магнитного оператора Шредингера, рассматриваемого на всей оси, и устанавливается применимость теории Фредгольма к резольвентному уравнению этого оператора.

Ключевые слова: магнитный оператор Шредингера, квантовая механика, магнитный потенциал, электрический потенциал, резольвентное уравнение.

1. Введение

Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbf{R}_1)$ ($\mathbf{R}_1 = (-\infty, +\infty)$) часто встречающийся при применении квантовой механики к решению важных химических и физических проблем, в частности при изучении одномерного движения частицы (волны) во внешнем электрическом и магнитном поле, одномерный магнитный оператор Шредингера

$$\Delta_{a,V} = \left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx} + a(x)\right)^2 + V(x), \tag{1}$$

где $a(x)$ и $V(x)$ — магнитный и электрический потенциалы соответственно, причем эти потенциалы — вещественные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

(a) $a^2(x) + V(x) \in L_1(\mathbf{R}_1)$;

(b) $a(x) \in L_1(\mathbf{R}_1)$;

(c) $a'(x) \in L_1(\mathbf{R}_1)$.

Пусть $H_{0,0} = -\Delta$ и $H_{a,V}$ — самосопряженные операторы (про оператор $H_{a,V}$ более подробно см. ниже в п. 2) в $L_2(\mathbf{R}_1)$, а $R_0(z) = (H_{0,0} - z)^{-1}$ и $R(z) = (H_{a,V} - z)^{-1}$ — соответствующие резольвенты. При выполнении условий (a)–(c) для резольвент $R_0(z)$ и $R(z)$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$ справедливо резольвентное уравнение теории возмущения:

$$R(z) + R_0(z) W R(z) = R_0(z), \tag{2}$$

где $W = -2i\frac{d}{dx}a + \Phi(x)$, $\Phi(x) = a^2(x) + V(x) + ia'(x)$.

Обозначим через $\mathbf{C}_+$ верхнюю часть комплексной плоскости, т. е. $\mathbf{C}_+ = \{\lambda \in \mathbf{C} : \operatorname{Im}\lambda > 0\}$, а через $\overline{\mathbf{C}_+}$ — ее замыкание, т. е. $\overline{\mathbf{C}_+} = \{\lambda \in \mathbf{C} : \operatorname{Im}\lambda \geq 0\}$.

Пусть $h(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}_1)$ и $\lambda \in \overline{\mathbf{C}_+}\backslash\{0\}$. Положим

$$u_0(\lambda) := u_0(x,\lambda) = (R_0(\lambda^2)h)(x), \quad u(\lambda) := u(x,\lambda) = (R(\lambda^2)h)(x).$$

Из (2) для $u(\lambda)$ получим неоднородное уравнение

$$u(\lambda) + K(\lambda)u(\lambda) = u_0(\lambda), \tag{3}$$

где $K(\lambda)$ — интегральный оператор с ядром

$$K(x, y, \lambda) = \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{2i\lambda}[\Phi(y) + 2\lambda \operatorname{sgn}(x-y)a(y)]. \tag{4}$$

Наша цель — показать, что к уравнению (3) можно применить теорию Фредгольма в банаховом пространстве $C(\mathbf{R}_1)$ ограниченных непрерывных функций с нормой $\|f\|_C = \sup\limits_{-\infty<x<+\infty} |f(x)|$. А именно, доказать, что справедлива следующая

Теорема 1. *При выполнении условий* (a)–(c) *верны следующие утверждения:*

1) *семейство операторов* $K(\lambda)$ $(\lambda \in \overline{\mathbf{C}_+}\setminus\{0\})$ *непрерывно в равномерной операторной топологии;*

2) *оператор* $K(\lambda)$ *аналитичен по* λ *в* $\mathbf{C}_+$ *в равномерной операторной топологии;*

3) *семейство операторов* $K(\lambda)$ *компактно в* $C(\mathbf{R}_1)$ *для всех* λ *из* $\overline{\mathbf{C}_+}\setminus\{0\}$.

Отметим, что некоторые наши обозначения заимствованы из [1], где аналогичная теорема установлена в трехмерном пространстве. Известно (см., например, [2, 3]), что с уравнением (3) тесно связана задача теории рассеяния, т. е. теория возмущения на абсолютно непрерывном спектре, а с ней уравнение Липпмана — Швингера

$$\varphi(x, \lambda) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{K}(x, y, \lambda)\varphi(y, \lambda)\, dy = e^{i\lambda x},$$

где $\operatorname{Im}\lambda = 0$, а ядро $\mathscr{K}(x, y, \lambda)$ совпадает с функцией $K(x, y, \lambda)$, заданной равенством (4) при $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Решение уравнения Липпмана — Швингера является в то же время ограниченным решением магнитного уравнения Шредингера. Собственные функции оператора Липпмана — Швингера $\varphi(x, \lambda)$ особенно полезны тем, что через них выражается S-матрица (см., например, [4]), которая устанавливает связь между асимптотиками истории взаимодействия в прошлом и будущем, минуя рассмотрение процесса при конечных временах.

2. Самосопряженность оператора $H_{a,V}$

В этом пункте исследуется минимальный оператор $H_{a,V}$, порожденный сингулярным квазидифференциальным выражением (1) (теория квазидифференциальных операторов подробно изложена в [5, гл. V; 6, гл. IV, V; 7–9]).

Обозначим через $\widetilde{\mathscr{D}}_{a,V}$ совокупность всех финитных локально абсолютно непрерывных функций $y^{[0]} := y(x)$ из $L_2(\mathbf{R}_1)$, квазипроизводные первого порядка $y^{[1]} := y' + ia(x)y$ которых абсолютно непрерывны, а квазипроизводная $y^{[2]} := (y^{[1]})' - V(x)y^{[0]} + ia(x)y^{[1]}$ принадлежит пространству $L_2(\mathbf{R}_1)$. Определим оператор $\widetilde{H}_{a,V}$ в $L_2(\mathbf{R}_1)$ следующим образом: областью определения оператора $\widetilde{H}_{a,V}$ является $\widetilde{\mathscr{D}}_{a,V}$ и для $y \in \widetilde{\mathscr{D}}_{a,V}$

$$\widetilde{H}_{a,V}y = -y^{[2]} = \left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx} + a(x)\right)^2 y + V(x)y.$$

Замыкание оператора $\widetilde{H}_{a,V}$ обозначим через $H_{a,V}$.

Теорема 2. *В условиях* (a)–(c) *оператор* $H_{a,V}$ *самосопряжен в* $L_2(\mathbf{R}_1)$.

Доказательство. Пусть $H^-_{a,V}$ и $H^+_{a,V}$ — операторы $H_{a,V}$, порожденные тем же дифференциальным выражением (1) на интервалах $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$ соответственно. Очевидно, что $H^-_{a,V}$ и $H^+_{a,V}$ — операторы с одним сингулярным концом $x = -\infty$ и $x = +\infty$ соответственно. Из условий (b), (c) и локально абсолютной непрерывности квазипроизводных первого порядка $y^{[1]} := y' + ia(x)y$ следует, что $y'(x)$ — локально абсолютно непрерывная функция. Поэтому уравнение

$$\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx} + a(x)\right)^2 y + V(x)y = \lambda^2 y \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0)$$

можно представить в следующем виде:

$$-y'' - 2ia(x)y' + [a^2(x) + V(x) - ia'(x)]y = \lambda^2 y,$$

где производные y' и y'' понимаются в смысле обобщенных функций. Из условий (a)–(c) вытекает, что $a^2(x) + V(x) - ia'(x) \in L_1(\mathbf{R}_1)$. Используя [5, гл. VII, § 22, п. 2, замечание к теореме 7], получаем, что индексом дефекта обоих операторов $H^-_{a,V}$ и $H^+_{a,V}$ является $(1, 1)$. Из теории расщепления (см., например, [5] или [10]) следует, что в случае интервала $(-\infty, +\infty)$ индексом дефекта оператора $H_{a,V}$ является $(0, 0)$, т. е. оператор $H_{a,V}$ самосопряжен в $L_2(\mathbf{R}_1)$. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Перейдем к доказательству теоремы 1. Доказательство разобьем на несколько лемм.

Лемма 1. *Если выполнены условия* (a)–(c), *то оператор* $K(\lambda)$ *непрерывен для всех* λ *из* $\overline{\mathbf{C}_+}\backslash\{0\}$ *в равномерной операторной топологии.*

Доказательство. Пусть $h(x) \in C(\mathbf{R}_1)$, а $K(x, y, \lambda)$ — функция, которая определяется, как в формуле (4). Покажем, что для произвольного λ из $\overline{\mathbf{C}_+}\backslash\{0\}$ функция

$$u(x, \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x, y, \lambda) h(y)\, dy$$

тоже принадлежит пространству $C(\mathbf{R}_1)$. Представим функцию $u(x, \lambda)$ в виде суммы двух функций:

$$u(x, \lambda) = u_1(x, \lambda) + u_2(x, \lambda),$$

где

$$u_1(x, \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{2i\lambda} \Phi(y) h(y)\, dy$$

и

$$u_2(x, \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{2i\lambda} [2\lambda \operatorname{sgn}(x - y) a(y)] h(y)\, dy.$$

Пусть x_1 и x_2 — произвольные вещественные числа. Из неравенств

$$|e^{i\lambda|x_1-y|} - e^{i\lambda|x_2-y|}| \le |\lambda||x_1 - x_2|,$$

$$|u_1(x_1,\lambda) - u_1(x_2,\lambda)| \le \frac{|x_1 - x_2|}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(y)|\,dy \|h\|_C$$

и условий (a) и (c) вытекает, что функция $u_1(x,\lambda)$ непрерывна. Докажем, что функция $u_2(x,\lambda)$ тоже непрерывна. Имеем

$$\begin{aligned} u_2(x,\lambda) &= -i \int\limits_{-\infty}^{x} e^{i\lambda(x-y)} a(y)h(y)\,dy + i \int\limits_{x}^{+\infty} e^{i\lambda(y-x)} a(y)h(y)\,dy \\ &= -ie^{i\lambda x} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-i\lambda y} a(y)h(y)\,dy + ie^{-i\lambda x} \int\limits_{x}^{+\infty} e^{i\lambda y} a(y)h(y)\,dy \\ &= -ie^{i\lambda x} u_2^{(1)}(x,\lambda) + ie^{-i\lambda x} u_2^{(2)}(x,\lambda), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$u_2^{(1)}(x,\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-i\lambda y} a(y)h(y)\,dy, \quad u_2^{(2)}(x,\lambda) = \int\limits_{x}^{+\infty} e^{i\lambda y} a(y)h(y)\,dy.$$

Пусть $x_1 < x_2$. Тогда из оценок

$$\left|u_2^{(1)}(x_2,\lambda) - u_2^{(1)}(x_1,\lambda)\right| \le \int\limits_{x_1}^{x_2} |a(y)| e^{y \operatorname{Im}\lambda}\,dy \le e^{x_2 \operatorname{Im}\lambda} a_0 (x_2 - x_1),$$

$$\left|u_2^{(2)}(x_2,\lambda) - u_2^{(2)}(x_1,\lambda)\right| \le e^{-x_1 \operatorname{Im}\lambda} a_0 (x_2 - x_1),$$

где

$$a_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |a(x)|\,dx,$$

и из представления (5) следует, что функция $u_2(x,\lambda)$ непрерывна на всей оси. Тем самым непрерывность функции $u(x,\lambda)$ доказана. Ограниченность функции $u(x,\lambda)$ вытекает из условий (a)–(c) и следующего неравенства:

$$|u(x,\lambda)| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2|\lambda|} [|\Phi(y)| + 2|\lambda||a(y)|]\,dy \|h\|_C. \tag{6}$$

Таким образом, для всех $\lambda \in \overline{\mathbf{C}_+} \backslash \{0\}$ оператор

$$K(\lambda)h(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x,y,\lambda)h(y)\,dy$$

действует из $C(\mathbf{R}_1)$ в $C(\mathbf{R}_1)$, а его ограниченность, т. е. непрерывность, в равномерной операторной топологии следует из неравенства (6). Лемма доказана.

Замечание 1. Для любого $\delta \in (0,1)$ функция $u(x,\lambda)$ равномерно ограничена по параметру λ, если $\lambda \in \overline{\mathbf{C}_+} \cap \left\{\lambda : \delta \le |\lambda| \le \frac{1}{\delta}\right\}$.

Замечание 2. Функция $u(x,\lambda)$ равномерно удовлетворяет условию Липшица по x, если x меняется в ограниченном множестве оси $\mathbf{R}_1$, а λ — в ограниченном множестве $\overline{\mathbf{C}_+} \backslash \{0\}$.

Лемма 2. *Операторнозначная функция $K(\lambda)$ аналитична по λ в $\mathbf{C}_+$ в равномерной операторной топологии.*

Доказательство. Пусть $\delta > 0$, $\operatorname{Im}\lambda_0 > \delta$ и $m \geq 0$ — целое число. Введем обозначения:

$$K_m^{(1)}(x, y, \lambda_0) = \frac{1}{2i} e^{i\lambda_0|x-y|} \frac{i^m|x-y|^m}{m!} \Phi(y),$$
$$K_m^{(2)}(x, y, \lambda_0) = \frac{1}{i} e^{i\lambda_0|x-y|} \frac{i^m|x-y|^m}{m!} \operatorname{sgn}(x-y) a(y).$$

В этих обозначениях, используя разложение

$$e^{i\lambda|x-y|} = e^{i\lambda_0|x-y|} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{i^m|x-y|^m}{m!} (\lambda - \lambda_0)^m,$$

функцию $K(x, y, \lambda)$, заданную равенством (4), можно записать в виде

$$K(x, y, \lambda) = \frac{1}{\lambda} K_1(x, y, \lambda) + K_2(x, y, \lambda),$$

где

$$K_1(x, y, \lambda) = \sum_{m=0}^{+\infty} K_m^{(1)}(x, y, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^m,$$
$$K_2(x, y, \lambda) = \sum_{m=0}^{+\infty} K_m^{(2)}(x, y, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^m.$$

Пусть $m \geq 1$ — натуральное число. Для $r > 0$ положим $g_m(r) = e^{-\delta r} r^m$. Очевидно, что

$$g_m(r) \leq g_m\left(\frac{m}{\delta}\right) = e^{-m} \frac{m^m}{\delta^m}. \tag{7}$$

Поскольку $m! > \frac{m^m}{e^m}$, в силу (7) имеем

$$\left|K_m^{(2)}(x, y, \lambda_0)\right| \leq e^{-\delta|x-y|} \frac{|x-y|^m}{m!} |a(y)| \leq \frac{|a(y)|}{\delta^m} \tag{8}$$

(случай $m = 0$ тривиален). Оценка (8) показывает, что для любого $m \geq 0$ интегральный оператор

$$K_m^{(2)}(\lambda_0) h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_m^{(2)}(x, y, \lambda_0) h(y)\, dy$$

действует из $C(\mathbf{R}_1)$ в $C(\mathbf{R}_1)$ и для его нормы справедливо неравенство

$$\left\|K_m^{(2)}(\lambda_0)\right\| \leq \frac{a_0}{\delta^m}. \tag{9}$$

Оценка (9) показывает, что при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ верно неравенство

$$\left\|\sum_{m=0}^{+\infty} K_m^{(2)}(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^m\right\| \leq a_0 \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{|\lambda - \lambda_0|}{\delta}\right)^m < +\infty. \tag{10}$$

Оценка (10) означает, что интегральный оператор $K_2(\lambda)$ с ядром $K_2(x, y, \lambda)$ — аналитическая функция в $\mathbf{C}_+$. Аналогичным образом можно показать, что для нормы оператора

$$K_m^{(1)}(\lambda_0) h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_m^{(1)}(x, y, \lambda_0) h(y)\, dy$$

справедливо неравенство

$$\left\|K_m^{(1)}(\lambda_0)\right\| \le \frac{\Phi_0}{\delta^m}, \tag{11}$$

где $\Phi_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(y)|\,dy$. Оценка (11) показывает, что при $|\lambda-\lambda_0| < \delta$ верно неравенство

$$\left\|\sum_{m=0}^{+\infty} K_m^{(1)}(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^m\right\| \le \Phi_0 \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{|\lambda-\lambda_0|}{\delta}\right)^m < +\infty. \tag{12}$$

Из оценки (12) следует, что и оператор $K_1(\lambda)$ с ядром $K_1(x,y,\lambda)$ — аналитическая функция в $\mathbf{C}_+$.

Из представления

$$K(\lambda) = \frac{1}{\lambda}K_1(\lambda) + K_2(\lambda)$$

и аналитичности $K_1(\lambda)$ и $K_2(\lambda)$ вытекает утверждение леммы 2.

Следующая лемма завершает доказательство теоремы 1.

Лемма 3. *При каждом $\lambda \in \overline{\mathbf{C}_+}\backslash\{0\}$ оператор $K(\lambda)$ компактен в $C(\mathbf{R}_1)$.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть $\delta \in (0,1)$ и $\lambda \in \overline{\mathbf{C}_+} \cap \left\{\lambda : \delta \le |\lambda| \le \frac{1}{\delta}\right\}$. Из условий (a)–(c) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\lambda|} \int\limits_{|y|>n} \left[|\Phi(y)| + 2|\lambda||a(y)|\right] dy = 0.$$

Отсюда следует, что семейство функций $\{K(\lambda)f\}$ при $\lambda \in \overline{\mathbf{C}_+} \cap \left\{\lambda : \delta \le |\lambda| \le \frac{1}{\delta}\right\}$ и $f \in S_1(0) = \{f(x) : \|f\|_C \le 1\}$ имеет равномерные малые «хвосты», а это означает, что при $\lambda \in \overline{\mathbf{C}_+} \cap \left\{\lambda : \delta \le |\lambda| \le \frac{1}{\delta}\right\}$ семейство операторов компактно в $C(\mathbf{R}_1)$.

Шаг 2. Пусть $\lambda \in \mathbf{C}_+$. Здесь мы используем известную лемму из [11, § XIII.5, лемма 5]. Хотя эта лемма сформулирована в гильбертовом пространстве и опирается на теорему Хана — Банаха, ее идея приемлема и в нашем случае, ибо теорема Хана — Банаха справедлива в любом банаховом пространстве (в частности, в $C(\mathbf{R}_1)$). Для полноты изложения проводим доказательство леммы 3 и в этом шаге. Пусть вопреки утверждению леммы при некотором $\lambda_0 \in \mathbf{C}_+ \setminus \left\{\lambda : \delta \le |\lambda| \le \frac{1}{\delta}\right\}$ оператор $K(\lambda_0)$ не является вполне непрерывным, т. е. $K(\lambda_0) \notin \sigma_\infty(C(\mathbf{R}_1))$. Поскольку множество $\sigma_\infty(C(\mathbf{R}_1))$ замкнуто в пространстве $\mathscr{L}(C(\mathbf{R}_1))$ линейных ограниченных операторов, по теореме Хана — Банаха можно найти такой линейный функционал $\tau \in \mathscr{L}(C(\mathbf{R}_1))^*$, что $\tau(K(\lambda_0)) = 1$ и $\tau(K(\lambda)) = 0$, если $\lambda \in \mathbf{C}_+ \cap \left\{\lambda : \delta \le |\lambda| \le \frac{1}{\delta}\right\}$. По лемме 2 $\tau(K(\lambda))$ аналитичен в $\mathbf{C}_+$, тем самым из теоремы единственности аналитических функций приходим к противоречию. Стало быть, $K(\lambda)$ компактно в $\mathbf{C}_+$.

Шаг 3. Пусть $\lambda \in \overline{\mathbf{C}_+}\backslash\{0\}$. Из замечания 1 и замкнутости множества компактных операторов следует, что оператор $K(\lambda)$ является вполне непрерывным и при $\operatorname{Im}\lambda = 0$ $(\lambda \ne 0)$.

Замечание 3. Из формул

$$K_m^{(i)}(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\delta} \frac{K^{(i)}(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{m+1}}\,d\lambda, \quad i = 1,2,\ m = 0,1,2\ldots,$$

вытекает, что операторы $K_m^{(i)}(\lambda_0)$ вполне непрерывны в $C(\mathbf{R}_1)$.

4. Дополнение

Случай $\lambda = 0$. Пользуясь фундаментальным решением $\mathscr{E}_1(x) = \frac{|x|}{2}$ (см. [12]) уравнения $y''(x) = \delta(x)$, для функции $u(x,0)$ получим неоднородное уравнение

$$u(x,0) + K(0)u(x,0) = u_0(x,0),$$

где $K(0)$ — интегральный оператор с ядром

$$K(x,y,0) = \frac{|x-y|}{2}\Phi(y) - i\,\mathrm{sgn}(x-y)a(y) \equiv K_1(x,y) + K_2(x,y).$$

Хотя при $h(x) \in C(\mathbf{R}_1)$ функции

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(x,y)h(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x-y|}{2}\Phi(y)h(y)\,dy$$

и

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_2(x,y)h(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i}\,\mathrm{sgn}(x-y)a(y)h(y)\,dy$$

в условиях (a)–(c) непрерывны, следующие примеры показывают, что функция $f_1(x)$ даже при выполнении условия

(d) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)|\Phi(x)|\,dx < +\infty$

не является ограниченной (при условии (b) функция $f_2(x)$ ограничена).

Пример 1. Пусть $\Phi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$. Тогда вычисление показывает, что

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y||\Phi(y)|\,dy\right\} = \sup_{-\infty<x<+\infty}\{1 + x\,\mathrm{arctg}\,x\} = +\infty.$$

Пример 2. Пусть $\Phi(x) = e^{-|x|}$. Тогда

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y||\Phi(y)|\,dy\right\} = \sup_{-\infty<x<+\infty}\{2(e^{-|x|} + |x|)\} = +\infty.$$

Вообще говоря, из условия (d) и неравенств

$$\sup_{0<x<+\infty}\left\{x\int_{x}^{+\infty}|\Phi(y)|\,dy\right\} < +\infty \tag{13}$$

и

$$\sup_{-\infty<x<0}\left\{x\int_{-\infty}^{x}|\Phi(y)|\,dy\right\} < +\infty \tag{14}$$

(неравенства (13) и (14) вытекают из условия (d), см. [13, гл. 3, § 2]) следует, что имеет место асимптотическая формула $f_1(x) = O(|x|) \quad (|x| \to +\infty)$.

Эти рассуждения показывают, что оператор $K_1(0)$ с ядром $K_1(x,y)$ не является оператором в $C(\mathbf{R}_1)$. Поэтому, используя технику из [1], предлагаем вместо однородного уравнения

$$\varphi(x) + K(0)\varphi(x) = 0 \tag{15}$$

исследовать модифицированное уравнение

$$\psi(x) + \widetilde{K}(0)\psi(x) = 0, \tag{16}$$

где $\widetilde{K}(0)$ — интегральный оператор с ядром

$$\widetilde{K}(x, y, 0) = \frac{1 + |y|}{1 + |x|} \left(|x - y|\Phi(y) + \frac{1}{i} \operatorname{sgn}(x - y) a(y) \right).$$

Отметим, что если выполняются условия

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|^2)|\Phi(x)|\, dx < +\infty, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|)|a(x)|\, dx < +\infty,$$

то уравнение (16) можно исследовать в пространстве $C(\mathbf{R}_1)$. Если $\psi(x)$ является решением уравнения (16) из класса $C(\mathbf{R}_1)$, то функция $\varphi(x) = \psi(x)(1 + |x|)$ является решением уравнения (15).

В заключение авторы выражают благодарность рецензенту, замечания которого ощутимо улучшили текст статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Муртазин Х. Х., Галимов А. Н.* Спектр и рассеяние для оператора Шредингера в магнитном поле // Мат. заметки. 2008. Т. 83, № 3. С. 402–416.
2. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982.
3. *Повзнер А. Я.* О разложениях по функциям, являющихся решением задачи рассеяния // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104, № 3. С. 360–363.
4. *Фаддеев Л. Д.* Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1964. Т. 73. С. 314–335.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
6. *Everitt W. N., Marcus L.* Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. (Math. Surv. Monogr.; V. 61).
7. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма — Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912.
8. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма — Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. Моск. мат. о-ва. 2003. Т. 64. С. 159–212.
9. *Долгих И. Н., Мирзоев К. А.* Индексы дефекта и спектр самосопряженных расширений некоторых классов дифференциальных операторов // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 4. С. 53–74.
10. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Наука, 1963.
11. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
12. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
13. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.

Статья поступила 29 декабря 2011 г.

Алиев Араз Рафиг оглы,
Бакинский гос. университет,
ул. З. Халилова, 23, Баку AZ1148, Азербайджан;
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ул. Б. Вахабадзе, 9, Баку AZ1141, Азербайджан
alievaraz@yahoo.com

Эйвазов Эльшад Хатам оглы
Бакинский гос. университет,
ул. З. Халилова, 23, Баку AZ1148, Азербайджан
eyvazovelshad@mail.ru