Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 517.968+517.544

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В СВЕРТКАХ 1–ГО И 2–ГО РОДА НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ И ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ–ФУНКЦИЙ

А. Ф. Воронин

Аннотация. Системы из n уравнений в свертках 1-го и 2-го рода на конечном интервале сводятся к краевой задаче Римана для вектор-функции длины $2n$. Доказана теорема о соответствующей эквивалентности полученной задачи Римана и исходной системы. Получены достаточные условия корректной разрешимости системы 2-го рода. Рассмотрен случай периодичного ядра интегрального оператора системы 1-го и 2-го рода.

Ключевые слова: система уравнений в свертках, конечный интервал, факторизация, задача Римана, частные индексы.

Введение

Рассмотрим следующие две системы интегральных уравнений в свертках на интервале $(0, b)$ 2-го и 1-го рода:

$$\lambda u(t) - \int_0^b k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0, b), \tag{0.1}$$

где

$$k \in L_{n\times n}(-b, b), \quad f \in L_{n\times 1}(0, b), \quad b > 0, \quad \lambda = 1, 0, \tag{0.2}$$

$L_{n\times m}$ — пространство $n \times m$-матриц-функций с элементами из $L_1(R)$. Решение u задачи (0.1), (0.2) ищем в $L_{n\times 1}(0, b)$.

Известно [1; 2, гл. 2, § 8], что при $b = \infty$ система (0.1) эквивалентна задаче Римана для вектор-функции длины n. Установленная эквивалентность позволяет свести исследование систем (0.1) при $b = \infty$ к изучению соответствующих задач Римана. Необходимо отметить, что в случае $n = 1 = \lambda$ для полученной задачи Римана можно провести достаточно полное исследование [2].

В [3] при $n = 1$ уравнения в (0.1) сведены (эквивалентным образом) к краевой задаче Римана с дополнительным условием для вектор-функции размера два. Это позволило получить следующие новые результаты в теории уравнений в свертках на конечном интервале. В [4; 5, лемма 3] была усилена альтернатива Фредгольма для уравнения 2-го рода. В [5, 6; 7, лемма 1] найдены эффективные необходимые и достаточные условия корректной разрешимости уравнения 2-го рода с четным ядром. Для случая периодического ядра в [8, 9] получено

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00384).

достаточно полное исследование уравнений 1-го и 2-го рода. В качестве примера приведем эффективные достаточные условия корректной разрешимости уравнения 2-го рода в (0.1) в случае, когда ядро $k(t)$ является четной либо периодической функцией на $(-b, b)$ [5, 6, 9].

Предложение. *Пусть при* $n = 1$ *выполняется одно из следующих равенств:* $k(t) = k(-t)$ *либо* $k(t) = k(t + b)$, $t \in (-b, 0)$. *Тогда если*

$$\|k\|_1 \equiv \int_{-b}^{b} |k(s)|\, ds < 2,$$

то уравнение второго рода в (0.1) *при условии* (0.2) *корректно разрешимо в* $L_1(0, b)$.

Таким образом, есть основания считать, что сведение систем в (0.1) к задаче Римана позволит пополнить существующую (к сожалению, весьма бедную) теорию таких систем. Тем более что в теории краевой задачи Римана появились новые результаты [7, 10]. Предложенный в этих статьях метод определения частных индексов можно непосредственно применить для исследования корректности систем в (0.1), например, в случае, когда ядро k четно.

В настоящей работе системы (0.1) сводятся к краевой задаче Римана для вектор-функции длины $2n$, матричный коэффициент которой допускает стандартную факторизацию в случае системы 2-го рода. Доказана теорема о соответствующей эквивалентности полученной задачи Римана и системы (0.1). Получены достаточные условия корректной разрешимости системы 2-го рода. Рассмотрен случай периодичного ядра интегрального оператора системы 1-го и 2-го рода.

Данная работа, в основной ее части, обобщает лемму 1.1, которая занимает центральное место в работе автора [3], на случай $n > 1$. Довольно близко к настоящей работе примыкает работа [11], где изучается система второго рода в (0.1) в случае, когда система имеет единственное решение. В [11] получен следующий результат. Построена матрица-функция $A(x)$ с нулевым суммарным индексом и показано, что система второго рода в (0.1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица $A(x)$ допускает каноническую факторизацию. В отличие от настоящей работы в [11] не приведены какие-либо условия существования решения системы (0.1) (либо условия существования канонической факторизации матрицы $A(x)$). Не рассмотрен случай, когда система 2-го рода в (0.1) не имеет решения либо имеет неединственное решение.

1. Обозначения и соответствующие построения

Обозначим через $\mathscr{F}M$ Фурье-образ матрицы-функции $M \in L_{n\times m}$:

$$\mathscr{F}M(p) = \int_{-\infty}^{\infty} M(t)e^{ipt}\, dt, \quad p \in R;$$

$W^{n\times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $c + \mathscr{F}M$, где c — постоянная матрица порядка n и $M \in L_{n\times n}$ (если $c = 0$, то соответствующую алгебру будем обозначать через $W_0^{n\times n}$); $W_+^{n\times n}$ $(W_-^{n\times n})$ — подалгебра в $W^{n\times n}$, состоящая из матриц-функций вида $c + \mathscr{F}M$ таких, что $M(t) = 0$ при $t < 0$ (при

$t > 0$); $W_{0+}^{n\times n}$ ($W_{0-}^{n\times n}$) — подалгебра в $W_0^{n\times n}$, состоящая из матриц-функций вида $\mathscr{F}M$ таких, что $M(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$).

Если A — некоторая алгебра, то через $\mathscr{G}A$ обозначим группу из обратимых элементов в A.

На алгебре $W_0^{n\times n}$ определим дополнительные друг другу проекторы P_0^+ и P_0^- по следующим формулам:

$$P_0^\pm : W_0^{n\times n} \ \to \ W_{0\pm}^{n\times n},$$

$$P_0^\pm \mathscr{F}M(p) \equiv P_0^\pm\{\mathscr{F}M(t)\}(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipt}M(t)\theta(\pm t)\,dt, \quad p \in R,$$

где θ — функция Хевисайда. Отметим следующие свойства линейных операторов $P_0^\pm$:

$$P_0^+ + P_0^- = I,$$

где I — единичный оператор,

$$\mathscr{F}^{-1}\big\{P_0^\pm \mathscr{F}M(p)\big\}(t) = M(t)\theta(\pm t), \quad t \in R,$$

здесь $\mathscr{F}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье.

Группы непрерывных функций $W^{n\times m}, W_0^{n\times m}, W_\pm^{n\times m}, W_{0\pm}^{n\times m}$ определим по аналогии с алгебрами $W^{n\times n}, W_0^{n\times n}, W_\pm^{n\times n}, W_{0\pm}^{n\times n}$ соответственно.

Будем говорить, что матрица $G \in \mathscr{G}W^{n\times n}$ *допускает стандартную факторизацию*, если она представляется в виде следующего произведения матриц:

$$G(x) = G_+(x)D(x)G_-(x), \quad x \in R, \tag{1.1}$$

где $G_\pm \in \mathscr{G}W_\pm^{n\times n}$ ($G_\pm$ — факторы), $D(x)$ — диагональная матрица-функция,

$$D(x) = \operatorname{diag}\left(\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa_1}, \dots, \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa_n}\right),$$

$\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$ — частные индексы (целые числа) матрицы G, $\kappa := \operatorname{Ind}\det G(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\Delta_R \arg\det G(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \kappa_j$ — суммарный индекс матрицы G.

Если $\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_n = 0$ ($D = I$ — единичная матрица), то $G = G_+G_-$ — каноническая факторизация матрицы-функции G.

Под задачей факторизации будем понимать проблему построения факторов $G_\pm$ и вычисления частных индексов κ_j, $j = 1, \dots, n$, в разложении (1.1) для матрицы $G \in \mathscr{G}W^{n\times n}$.

Применив к правой части равенства (1.1) операцию транспонирования, получим правую стандартную факторизацию матрицы G^T.

Неоднородную краевую задачу Римана сформулируем следующим образом. *Требуется найти вектор-функции $\Phi^\pm \in W_{0\pm}^{n\times 1}$ по краевому условию*

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g(x), \quad x \in R, \tag{1.2}$$

где $G(x)$ — матрица-функция порядка n, $g \in W^{n\times 1}$.

Отметим важную связь частных индексов матричного коэффициента $G(x)$ (при условии, что $G \in \mathscr{G}W^{n\times n}$) с корректностью задачи Римана (1.2) [12, теоремы 5.6, 5.7; 1]. Размерность пространства решений задачи Римана (1.2) равна сумме всех положительных частных индексов матрицы $G(x)$, а сумма всех отрицательных частных индексов — числу условий разрешимости задачи (1.2). В частности, если матрица $G(x)$ допускает каноническую факторизацию, то задача (1.2) корректно разрешима, решение существует, единственно и устойчиво относительно коэффициентов задачи $G(x)$ и $g(x)$.

2. Результаты работы

В этом разделе будут сформулированы основные результаты работы, доказательства большей части результатов перенесены в соответствующие разделы ниже.

Положим

$$k(t) := 0,\ t \notin (-b, b), \quad f(t) := 0,\ t \notin (0, b),$$

$$k_\pm(t) := \theta(\pm t)k(t), \quad t \in R; \tag{2.1}$$

$$\Lambda^+(p) := \lambda I - \mathscr{F}k_+(p), \quad \Lambda^-(p) := I - \mathscr{F}k_-(p); \tag{2.2}$$

$$\widetilde{\mathscr{F}}k_+(p) := e^{ipb}\mathscr{F}k_-(p), \quad \widetilde{\mathscr{F}}k_-(p) := e^{-ipb}\mathscr{F}k_+(p) + e^{-ipb}(1-\lambda)I. \tag{2.3}$$

Имеют место следующие два утверждения.

Утверждение 1. *Пусть* $k \in L_{n\times n}(-b, b)$ *и* C_0 — *произвольная вещественная постоянная. Тогда число нулей аналитической функции* $\det \Lambda^-(p)$ *конечно в полуплоскости* $\operatorname{Im} p \le C_0$, *а число нулей аналитической функции* $\det \Lambda^+(p)$ *в полуплоскости* $\operatorname{Im} p \ge C_0$ *не более чем счетно при* $\lambda = 0$ *и конечно при* $\lambda = 1$.

Утверждение 2. *Пусть выполнено условие* (0.2). *Тогда система уравнение* (0.1) *эквивалентна системе уравнений*

$$\mathscr{F}u(p) - P_0^+\{\mathscr{F}k_-(p)\mathscr{F}u(p)\} - e^{ipb}P_0^-\{\widetilde{\mathscr{F}}k_-(p)\mathscr{F}u(p)\} = \mathscr{F}f(p), \quad p \in R, \tag{2.4}$$

где $u \in L_{n\times 1}(R)$, $u(t) = 0$, $t \notin (0, b)$.

Положим

$$G(p) := -\begin{pmatrix} ((\Lambda^-(p))^{-1} & -\widetilde{\mathscr{F}}k_+(p)((\Lambda^-(p))^{-1} \\ \widetilde{\mathscr{F}}k_-(p)((\Lambda^-(p))^{-1} & (\lambda I - \mathscr{F}k(p))((\Lambda^-(p))^{-1} \end{pmatrix}$$
$$\equiv -\begin{pmatrix} I & -\widetilde{\mathscr{F}}k_+(p) \\ \widetilde{\mathscr{F}}k_-(p) & \lambda I - \mathscr{F}k(p) \end{pmatrix}((\Lambda^-(p))^{-1}. \tag{2.5}$$

Матрица G является блочной матрицей порядка $2n$ с квадратными блоками порядка n. Вычислим определитель блочной матрицы G. Из (2.5) и (2.1)–(2.3) по теореме 1 из [13, гл. 1, § 3.1] имеем

$$\det G = \det(\lambda I - \mathscr{F}k + \mathscr{F}k_+\mathscr{F}k_-)\frac{1}{(\det \Lambda^-)^2} \equiv \frac{\det \Lambda^+}{\det \Lambda^-}. \tag{2.6}$$

Рассмотрим краевую задачу Римана (1.2) для вектор функций $\Phi^\pm \in W_{0\pm}^{2n\times 1}$ с матричным коэффициентом G, заданным в (2.5), и правой частью $g(p) = \big(g_1^{(1)}(p), \dots, g_n^{(1)}(p), g_1^{(2)}(p), \dots, g_n^{(2)}(p)\big)^T$, где T — знак транспонирования. Положим

$$\begin{aligned} g^{(1)}(p) &:= \big(g_1^{(1)}(p), \dots, g_n^{(1)}(p)\big)^T := (\Lambda^-(p))^{-1}\mathscr{F}k_-(p)\mathscr{F}f(p), \\ g^{(2)}(p) &:= \big(g_1^{(2)}(p), \dots, g_n^{(2)}(p)\big)^T := \widetilde{\mathscr{F}}k_-(p)(\Lambda^-(p))^{-1}\mathscr{F}f(p). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (0.2). *Тогда система уравнений* (0.1) *эквивалентна краевой задаче Римана* (1.2), (2.5), (2.7) *с дополнительным условием*

$$e^{\pm ipb}\Phi^\mp \in W_{0\pm}^{2n\times 1}. \tag{2.8}$$

При этом решения системы уравнений (0.1) *и краевой задачи* (1.2), (2.5), (2.7), (2.8) *связаны равенствами*

$$\Phi^{(1)}(p) = \mathscr{F}k_-(p)\mathscr{F}u(p), \quad \Phi^{(2)}(p) = \widetilde{\mathscr{F}}k_-(p)\mathscr{F}u(p), \tag{2.9}$$

где

$$\begin{gathered} \Phi = (\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)})^T, \quad \Phi^{(l)} = \Phi^{(l)+} + \Phi^{(l)-}, \\ \Phi^{(l)\pm}(p) = P_0^{\pm}\Phi^{(l)}(p),\ l = 1, 2, \quad \Phi^{\pm}(p) = P_0^{\pm}\Phi(p). \end{gathered} \tag{2.10}$$

Правая (нестандартная) факторизация матрицы-функции $G(p)$ *имеет следующий явный вид:*

$$G(p) = -A_-(p)\,A_+(p), \quad p \in R, \tag{2.11}$$

где

$$A_-(p) = \begin{pmatrix} (\Lambda^-(p))^{-1} & 0 \\ \widetilde{\mathscr{F}}k_-(p)(\Lambda^-(p))^{-1} & I \end{pmatrix}, \quad A_+(p) = \begin{pmatrix} I & -\widetilde{\mathscr{F}}k_+(p) \\ 0 & \Lambda^+(p) \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

A_+, A_- *— блочные матрицы-функции порядка* $2n$.

Кроме того, если $\lambda = 1$ *и выполнено неравенство*

$$\det \Lambda^{\pm}(p) \neq 0, \quad p \in R, \tag{2.13}$$

то матрица-функция $G(p)$ *допускает стандартную факторизацию* (1.1) *с суммарным индексом*

$$\kappa = \operatorname{Ind}\det\Lambda^+(p) - \operatorname{Ind}\det\Lambda^-(p) \geq 0, \quad p \in R. \tag{2.14}$$

Можно считать, не уменьшая общности, что условие (2.13) при $\lambda = 1$ выполнено (см. [3, замечание 1.1]).

Рассмотрим условия корректной разрешимости системы второго рода в (0.1), которые вытекают из условий корректной разрешимости задачи Римана (1.2), (2.5), (2.7).

Из [1, теорема 8.1] получим

Следствие 1. *Пусть* $U \in \mathscr{G}W^{n\times n}$, $n > 1$. *Положим*

$$M(x) := U^{-1}(\infty)U(x), \quad M_R(x) := \frac{1}{2}(M(x) + M^*(x)),$$

где

$$M^*(x) = \overline{M^T(x)}.$$

Тогда если $\det M_R \neq 0$, $x \in R$, *то все частные индексы матрицы* $U(x)$ *равны нулю.*

При $\lambda = 1$ положим $U(x) := G(x)\Lambda^-(x)$ (матрица G определена в (2.5)). Пусть выполнено (2.13). Тогда по теореме 1 $U \in \mathscr{G}W^{n\times n}$. Имеем $U(\infty) = I$, $U(x) = M(x)$,

$$U_R(x) = M_R(x) = -\begin{pmatrix} I & -0.5(\widetilde{\mathscr{F}}k_+(x) - (\widetilde{\mathscr{F}}k_-(x))^*) \\ 0.5(\widetilde{\mathscr{F}}k_-(x) - (\widetilde{\mathscr{F}}k_+(x))^*) & I - 0.5(\mathscr{F}k(x) + (\mathscr{F}k(x))^*) \end{pmatrix}.$$

По теореме 1 из [13, гл. 1, § 3.1] вычислим определитель блочной матрицы U_R:

$$\begin{aligned} \det U_R(x) = \det(I - 0.5((\mathscr{F}k(x) + (\mathscr{F}k(x))^*) - 0.25(\mathscr{F}k_+(x) \\ - (\mathscr{F}k_-(x))^*)((\mathscr{F}k_+(x))^* - \mathscr{F}k_-(x)). \end{aligned}$$

Тогда из следствия 1 получим, что если

$$\det U_R(x) \neq 0, \quad x \in R, \tag{2.15}$$

то матрица $U(x)$ допускает каноническую факторизацию. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $\lambda = 1$ *и выполнены условия* (0.2) *и* (2.15). *Если*

$$\det \Lambda^{\pm}(x) \neq 0, \ x \in R, \quad \operatorname{Ind} \det \Lambda^{-}(x) = 0, \tag{2.16}$$

то система (0.1) *корректно разрешима в* $L_{n\times 1}(0, b)$ (*решение существует, единственно и устойчиво относительно ядра* k *и правой части* f *в соответствующих нормах*).

В самом деле, из условий теоремы 2 следует, что матрица-функция $G(x)$ имеет все нулевые частные индексы ввиду того, что матрица $U(x)$ допускает каноническую факторизацию, а $\Lambda^{-} \in \mathscr{G}W_{-}^{n\times n}$. Тогда краевая задача Римана (1.2), (2.5), (2.7) корректно разрешима. Следовательно, по теореме 1 однородная система (0.1) имеет только тривиальное решение. Значит, по альтернативе Фредгольма (интегральный оператор рассматриваемой системы уравнений компактен) неоднородная система (0.1) однозначно разрешима. Устойчивость решения системы следует из соответствующей устойчивости краевой задачи Римана (1.2), (2.5), (2.7).

Замечание к теореме 2. Не уменьшая общности, можно считать, что условие (2.16) в теореме 2 выполнено (см. [3, замечание 1.1]). Тогда для корректной разрешимости системы (0.1) достаточно выполнения неравенства (2.15).

Легко видеть, что если $(\mathscr{F}k(x))^{*} = \mathscr{F}k(x)$, $x \in R$, то достаточное условие корректной разрешимости системы (0.1) (неравенство (2.15)) примет вид

$$\det(I - \mathscr{F}k(x)) \neq 0, \quad x \in R.$$

2.1. Случай периодического ядра. Теорема 1 позволяет получить достаточно полное исследование системы (0.1), (0.2) при дополнительном условии

$$k(t + b) = k(t), \quad t \in (-b, 0), \tag{2.1.1}$$

обобщающее работы [8, 9] на случай $n > 1$. В данной работе ввиду ограниченности объема будут получены достаточные условия корректности (а также явная формула для решения) системы уравнений (0.1), (0.2), (2.1.1) второго рода, а для системы уравнений (0.1), (0.2), (2.1.1) первого рода — лишь достаточные условия единственности.

Начнем с уравнений 2-го рода. Справедлива следующая теорема корректности задачи (0.1), (0.2), (2.1.1).

Теорема 2.1. *Пусть* $\lambda = 1$ *и*

$$\det \Lambda^{\pm}(p) \neq 0, \ p \in R, \quad \operatorname{Ind} \det \Lambda^{\pm}(p) = 0. \tag{2.1.2}$$

Тогда задача (0.1), (0.2), (2.1.1) *корректно разрешима в* $L_{1\times n}(0, b)$. *При этом образ Фурье ее решения имеет следующую замкнутую форму:*

$$\mathscr{F}u(p) = \mathscr{F}f(p) + \Lambda^{+}(p)h^{+}(p) + e^{ipb}\Lambda^{-}(p)h^{-}(p), \tag{2.1.3}$$

где

$$h(p) = ((\Lambda^{+}(p))^{-1}g^{(1)}(p), \quad h^{\pm} = P_0^{\pm}h.$$

Перейдем к системе первого рода. Будем считать, что ядро k удовлетворяет условию

$$\lim_{|p|\to\infty} \frac{1}{p^s \det \mathscr{F}k_{+}(p)} = 0, \quad \operatorname{Im} p \geq -\delta, \tag{2.1.4}$$

где

$$\delta > 0, \quad \mathscr{F}k_+(p) = \int_0^b e^{ipt}k(t)\,dt, \quad 0 < s \text{ целое.}$$

Легко видеть, что общее число нулей функции $p^s \det \mathscr{F}k_+(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} p \geq 0$ (с учетом кратности) конечно (см. также [8]). Рассмотрим здесь случай, когда функция $p^s \det \mathscr{F}k_+(p)$ не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Im} p \geq 0$, т. е.

$$|p^s \det \mathscr{F}k_+(p)| > 0, \quad \operatorname{Im} p \geq 0. \tag{2.1.5}$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\lambda = 0$ *и справедливы ограничения* (0.2), (2.1.1), (2.1.4), (2.1.5). *Тогда однородная* ($f = 0$) *система уравнений первого рода* (0.1) *имеет единственное* (*тривиальное*) *решение в* $L_{1\times n}(0, b)$.

3. Доказательство утверждений 1, 2

Данное доказательство обобщает доказательство аналогичных утверждений в [3] на случай $n > 1$. Согласно свойству целых функций число нулей целых функций $\det \Lambda^{\pm}(p)$ не более чем счетно во всей комплексной плоскости $p = x + iy$. При $\lambda = 1$ из теоремы единственности для аналитических функций и следующих соотношений:

$$\det \Lambda^{\pm}(p) = 1, \quad |p| \to \infty, \quad \pm \operatorname{Im} p \geq C_0,$$

вытекает утверждение 1.

Для доказательства утверждения 2 предположим сначала, что решение u системы уравнений (0.1) существует в $L_{n\times 1}(0, b)$. Для $t \in R$ положим

$$v(t) := -\int_0^b k(t-s)u(s)\,ds,\ t \notin (0, b), \quad v(t) := 0,\ t \in (0, b),$$

$$v_{\pm}(t) := \theta(\pm t)v(t). \tag{3.1}$$

Из (3.1) и (2.1) следует, что

$$v \in L_1(-b, 2b), \quad v_-(t) = 0,\ t \notin (-b, 0), \quad v_+(t) = 0,\ t \notin (b, 2b). \tag{3.2}$$

Тогда система уравнений (0.1) распространяется на всю вещественную прямую R следующим образом:

$$\lambda u(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)u(s)\,ds = f(t) + v_-(t) + v_+(t), \quad t \in R, \tag{3.3}$$

где $u(t) = f(t) = 0$, $t \notin (0, b)$. Левая и правая части уравнений системы (3.3) принадлежат классу $L_{n\times 1}(R)$ по построению и свойству свертки функций из L_1. Тогда, применив к уравнениям (3.3) преобразование Фурье, с учетом (2.1), (3.2), финитности всех функций в уравнении и формулы для образа Фурье свертки интегрируемых функций имеем

$$(\lambda - \mathscr{F}k_-(p) - \mathscr{F}k_+(p))\mathscr{F}u(p) = \mathscr{F}f(p) + \mathscr{F}v_-(p) + \mathscr{F}v_+(p), \tag{3.4}$$

где

$$\mathscr{F}u(p) = \int_0^b e^{ipt}u(t)\,dt, \quad \mathscr{F}f(p) = \int_0^b e^{ipt}f(t)\,dt,$$

$$\mathscr{F}v_-(p)=\int\limits_{-b}^{0}e^{ipt}v(t)\,dt,\quad \mathscr{F}v_+(p)=\int\limits_{b}^{2b}e^{ipt}v(t)\,dt.$$

Из предыдущих равенств следует, что

$$\mathscr{F}u,\mathscr{F}f,\,\mathscr{F}v_+,e^{-ipb}\mathscr{F}v_+\in W_{0+}^{n\times 1},\quad e^{-ipb}\mathscr{F}u,e^{-ipb}\mathscr{F}f,\mathscr{F}v_-\in W_{0-}^{n\times 1}. \tag{3.5}$$

Применив к уравнению (3.4) оператор проектирования P_0^+, с учетом (3.5) для $p\in R$ получим

$$\mathscr{F}u(p)-(\mathscr{F}k_+(p)+1-\lambda)\mathscr{F}u(p)-P_0^+\{\mathscr{F}k_-(p)\mathscr{F}u(p)\}=\mathscr{F}f(p)+\mathscr{F}v_+(p). \tag{3.6}$$

Умножим уравнения системы (3.6) на e^{-ipb} и к вновь полученной системе применим оператор проектирования P_0^-. Тогда из (3.5), (2.3) и соотношения

$$e^{-ipb}P_0^+\{\mathscr{F}k_-(p)\mathscr{F}u(p)\}\in W_{0-}^{n\times 1}$$

следует искомая система уравнений (2.4).

Для доказательства утверждения 2 в обратную сторону применим к уравнению (2.4) обратное преобразование Фурье с учетом следующих очевидных соотношений:

$$\mathscr{F}k_-(p)\mathscr{F}u(p)=\int\limits_{-b}^{b}e^{ipt}\int\limits_{0}^{b}k_-(t-s)u(s)\,dsdt,$$

$$P_0^{\pm}\{\mathscr{F}k_-(p)\mathscr{F}u(p)\}=\int\limits_{-b}^{b}e^{ipt}\theta(\pm t)\int\limits_{0}^{b}k_-(t-s)u(s)\,dsdt,$$

$$e^{ipb}P_0^-\{\widetilde{\mathscr{F}}k_-(p)\mathscr{F}u(p)\}=\int\limits_{0}^{b}e^{ipt}\int\limits_{0}^{b}k_+(t-s)u(s)\,dsdt+(1-\lambda)\int\limits_{0}^{b}e^{ips}u(s)\,ds,$$

получим уравнение (0.1). Утверждение 2 доказано.

4. Доказательство теоремы 1

Данное доказательство обобщает доказательство леммы 1.1 в [3] на случай $n>1$.

Прежде всего покажем справедливость равенства (2.11). Непосредственно умножая блочные матрицы A_- и A_+ друг на друга, получим

$$G(p):=-\begin{pmatrix}(\Lambda^-(p))^{-1} & g_{12}(p)\\ \widetilde{\mathscr{F}}k_-(p)(\Lambda^-(p))^{-1} & g_{22}(p)\end{pmatrix},$$

где

$$g_{12}(p)=-(\Lambda^-(p))^{-1}\widetilde{\mathscr{F}}k_+(p),\quad g_{22}(p)=-\widetilde{\mathscr{F}}k_-(p)(\Lambda^-(p))^{-1}\widetilde{\mathscr{F}}k_+(p)+\Lambda^+(p)$$

— матрицы порядка n. Преобразуем матрицы g_{12},g_{22}. С учетом обозначений в (2.3) имеем

$$\begin{gathered}g_{12}(p)=-e^{ipb}(\Lambda^-(p))^{-1}\mathscr{F}k_-(p),\\ g_{22}(p)=(\Lambda^+(p)-I)(\Lambda^-(p))^{-1}\mathscr{F}k_-(p)+\Lambda^+(p).\end{gathered} \tag{4.1}$$

Легко видеть, что справедлива формула

$$(\Lambda^-(p))^{-1}\mathscr{F}k_-(p)=(\Lambda^-(p))^{-1}-I. \tag{4.2}$$

В самом деле, умножив слева равенство (4.2) на матрицу $\Lambda^-(p)$, получим тождество. Подставив выражение для левой части равенства (4.2) в правые части выражений для g_{12}, g_{22} в (4.1), получим следующие очевидные цепочки равенств соответственно:

$$g_{12}(p) = -e^{ipb}((\Lambda^-(p))^{-1} - I) = -e^{ipb}\mathscr{F}k_-(p)(\Lambda^-(p))^{-1},$$

$$\begin{aligned} g_{22}(p) &= (\Lambda^+(p) - I)((\Lambda^-(p))^{-1} - I) + \Lambda^+(p) \\ &= (\Lambda^+(p) - I + \Lambda^-(p))(\Lambda^-(p))^{-1} = (\lambda I - \mathscr{F}k(p))(\Lambda^-(p))^{-1}, \end{aligned}$$

что доказывает равенство (2.11).

Из утверждения 2 вытекает, что для доказательства теоремы 1 (центральной ее части) достаточно показать эквивалентность краевой задачи Римана (1.2), (2.5), (2.7), (2.8) и уравнения (2.4).

Предположим, что справедливо равенство (2.4). С учетом обозначений (2.9), (2.10) запишем векторное равенство (2.4) в следующем виде:

$$\mathscr{F}u(p) - \Phi^{(1)+}(p) - e^{ipb}\Phi^{(2)-}(p) = \mathscr{F}f(p). \tag{4.3}$$

Умножив его слева на матрицу $\mathscr{F}k_-(p)$, с учетом операторного равенства $I = P_0^+ + P_0^-$ и первого соотношения в (2.3) получим

$$\Phi^{(1)+}(p) + \Phi^{(1)-}(p) - \mathscr{F}k_-(p)\Phi^{(1)+}(p) - \widetilde{\mathscr{F}}k_+(p)\Phi^{(2)-}(p) = \mathscr{F}k_-(p)\mathscr{F}f(p). \tag{4.4}$$

Аналогичным образом после умножения векторного равенства (4.3) слева на матрицу $\widetilde{\mathscr{F}}k_-(p)$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)+}(p) &+ \Phi^{(2)-}(p) - \widetilde{\mathscr{F}}k_-(p)\Phi^{(1)+}(p) \\ &- (\mathscr{F}k_+(p) + (1-\lambda)I)\Phi^{(2)-}(p) = \widetilde{\mathscr{F}}k_-(p)\mathscr{F}f(p). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Систему (4.4), (4.5) для $p \in R$ запишем в матричном виде:

$$A_-^{-1}(p)\Phi^+(p) + A_+(p)\Phi^-(p) = (\mathscr{F}k_-(p)\mathscr{F}f(p), \widetilde{\mathscr{F}}k_-(p)\mathscr{F}f(p))^T, \tag{4.6}$$

где $\Phi^\pm$ — векторы-столбцы длины $2n$,

$$A_-^{-1}(p) = \begin{pmatrix} \Lambda^-(p) & 0 \\ -\widetilde{\mathscr{F}}k_-(p) & 1 \end{pmatrix}.$$

Из формулы обращения блочных матриц [13, гл. 1 § 3.2, теорема 1] следует, что A_-^{-1}— матрица, обратная к A_-. Умножив систему (4.6) слева на матрицу A_-, с учетом равенства (2.11), определения вектора g в (2.7) и равенства

$$\widetilde{\mathscr{F}}k_-(\Lambda^-)^{-1}\mathscr{F}k_-\mathscr{F}f + \widetilde{\mathscr{F}}k_-\mathscr{F}f = \widetilde{\mathscr{F}}k_-(\Lambda^-)^{-1}\mathscr{F}f,$$

которое вытекает из (4.2), получим требуемое краевое условие (1.2).

Справедливость включения (2.8) вытекает из (2.9). В самом деле, из (2.9), (2.1) и финитности u вытекает очевидная цепочка равенств

$$0 = P_0^\mp\{e^{\pm ipb}\Phi^{(l)}(p)\} = P_0^\mp\{e^{\pm ipb}(\Phi^{(l)+}(p) + \Phi^{(l)-}(p))\} = P_0^\mp\{e^{\pm ipb}\Phi^{(l)\mp}(p)\},$$

что доказывает (2.8). Из (2.6) и (2.13) по определению суммарного индекса имеем неравенство для индекса (2.14). Из [1, теорема 7.3] и условия $G \in \mathscr{G}W^{n\times n}$

следует, что матрица G допускает стандартную факторизацию (левую и правую).

Докажем теорему 1 в обратную сторону. Предположим, что краевая задача (1.2), (2.5), (2.7), (2.8) разрешима. Тем самым разрешима система уравнений (4.4), (4.5). Покажем, что решение этой системы имеет вид (2.9), (2.10). Для этого положим

$$\Phi^{(l)}(p) := P_0^+\Phi^{(l)}(p) + P_0^-\Phi^{(l)}(p) \equiv \Phi^{(l)+}(p) + \Phi^{(l)-}(p), \quad l = 1, 2.$$

Тогда из (4.4), (4.5) соответственно получим

$$\Phi^{(1)}(p) - \mathscr{F}k_-(p)(e^{ipb}\Phi^{(2)-}(p) + \Phi^{(1)+}(p)) = \mathscr{F}k_-(p)\mathscr{F}f(p), \tag{4.7}$$

$$\Phi^{(2)}(p) - \mathscr{F}k_+(p)(e^{-ipb}\Phi^{(1)+}(p) + \Phi^{(2)-}(p)) = e^{-ipb}\mathscr{F}k_+(p)\mathscr{F}f(p). \tag{4.8}$$

Положим

$$\mathscr{F}u(p) := e^{ipb}\Phi^{(2)-}(p) + \Phi^{(1)+}(p) + \mathscr{F}f(p). \tag{4.9}$$

Тогда из (4.7), (4.8) вытекает, что

$$\Phi^{(l)}(p) = \mathscr{F}k_-(p)\mathscr{F}u(p), \quad \Phi^{(2)}(p) = \widetilde{\mathscr{F}}k_-(p)\mathscr{F}u(p).$$

Осталось показать, что $u = 0$ вне $(0, b)$. Из (4.9) и (2.8) имеем

$$e^{ipb}\Phi^{(2)-}, \mathscr{F}u(p) \in W_{0+}^{n\times 1}, \quad e^{-ipb}\mathscr{F}u(p) \in W_{0-}^{n\times 1} \tag{4.10}$$

ввиду того, что $e^{-ipb}\Phi^{(1)+}, e^{-ipb}\mathscr{F}f(p) \in W_{0-}^{n\times 1}$ по условию. Из (4.10) следует, что $u \in L_{n\times 1}(0, b)$, $u(t) = 0$, $t \notin (0, b)$. Таким образом, условия (2.9), (2.10) выполнены. Из (4.7) (или (4.8)) и (2.9) вытекает система уравнений (2.4). Тогда согласно утверждению 2 система уравнений (0.1) разрешима в $L_{n\times 1}(0, b)$. Теорема 1 полностью доказана.

5. Доказательство теоремы 2.1

Из условия (2.1.1) и определения (2.3) получим цепочку очевидных равенств:

$$\widetilde{\mathscr{F}}k_-(p) = e^{-ipb}\mathscr{F}k_+(p) = \int_{-b}^{0} e^{ipt}k_+(t+b)\,dt = \int_{-b}^{0} e^{ipt}k_-(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\mathscr{F}k_-(p) = \widetilde{\mathscr{F}}k_-(p), \quad \mathscr{F}k_+(p) = \widetilde{\mathscr{F}}k_+(p). \tag{5.1}$$

Предположим, сначала, что задача (0.1), (0.2), (2.1.1) имеет решение. Тогда из (2.9) и (2.7) по теореме 1 получим

$$\Phi^{(1)}(p) = \Phi^{(2)}(p), \quad \Phi^{(1)\pm}(p) = \Phi^{(2)\pm}(p). \tag{5.2}$$

Из краевого условия (1.2), выражения для G в (2.5) и (5.2) следует, что

$$\Phi^{(1)+}(p) = -(I - \mathscr{F}k_+(p))(\Lambda^-(p))^{-1}\Phi^{(1)-}(p) + g^{(1)}(p).$$

Умножив слева полученную систему уравнений на матрицу $((\Lambda^+(p))^{-1}$, для $p \in R$ имеем

$$((\Lambda^+(p))^{-1}\Phi^{(1)+}(p) - h^+(p) = -((\Lambda^-(p))^{-1}\Phi^{(1)-}(p) + h^-(p). \tag{5.3}$$

Из (2.9), (2.10) и (2.1.2) следует, что левая (правая) часть системы уравнений (5.3) аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im} p > 0$ ($\operatorname{Im} p < 0$) и непрерывна там вплоть до границы, кроме того, обращается в нуль на бесконечности в этой полуплоскости. Тогда по теореме об аналитическом продолжении и теореме Лиувилля [2, с. 29, 30] левая и правая части системы уравнений (5.3) равны тождественно нулю, т. е.

$$\Phi^{(1)\pm}(p) = \Lambda^{\pm}(p)h^{\pm}(p). \tag{5.4}$$

Из (5.3) и (5.4) по утверждению 2 получим искомую формулу (2.1.3).

Таким образом, если решение задачи (0.1), (0.2), (2.1.1) существует в L_1, то оно задается формулой (2.1.3). Значит, это решение единственно. Из вида решения в (2.1.3) следует его устойчивость относительно k и f.

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось показать разрешимость задачи (0.1), (0.2), (2.1.1). Поскольку однородная задача (0.1), (0.2), (2.1.1) имеет только тривиальное решение (по вышедоказанному), по альтернативе Фредгольма неоднородная задача (0.1), (0.2), (2.1.1) однозначно разрешима для любого $f \in L_{1\times n}(0, b)$. Теорема 2 полностью доказана.

Отметим, что для доказательства разрешимости задачи (0.1), (0.2), (2.1.1) можно не привлекать теорию Фредгольма, а непосредственно показать, пройдя для этого доказательство теоремы 2 снизу вверх, что функции

$$\Phi^{(1)\pm}(p) = \Phi^{(2)\pm}(p) = \Lambda^{\pm}(p)h^{\pm}(p)$$

являются решением краевой задачи Римана (1.2), (2.5), (2.7), (2.8).

6. Доказательство теоремы 2.2

Продолжим матрицу-функцию $k(t)$ периодически при $t < -b$ и нулем при $t > b$, а вектор-функцию $f(t)$ нулем вне интервала $(-b, b)$, т. е.

$$\begin{gathered} k(t) := 0,\ t > b, \quad k_+(t) := k(t),\ t \geq 0, \\ k(t) = k(t+b),\ t < 0, \quad f(t) := 0,\ t \notin (0, b). \end{gathered} \tag{6.1}$$

Ясно, что условие (6.1) не влияет на решение задачи (0.1), (0.2), (2.1.1). Ниже будем считать, что (6.1) выполнено.

Обозначим через $L_1(e^{at}, R)$, где $a \geq 0$, класс функций с нормой

$$\|g\|_a = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}|g(t)|\,dt.$$

Положим

$$W := \left\{ C + \mathscr{F}g_0(p) : \mathscr{F}g_0(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipt} g_0(t)\,dt, \right.$$
$$\left. \operatorname{Im} p = -a,\ g_0 \in L_1(e^{at}, R),\ C = \mathrm{const} \right\},$$

где $\mathscr{F}$ — преобразование Фурье — Лапласа, и

$$W_0^{\pm} := \bigl\{\mathscr{G}_0^{\pm}(p) \in W :\ \mathscr{G}_0^{\pm}(p) = \mathscr{F}\{\theta(\pm t) g_0(t)\}(p),\ \operatorname{Im} p = -a,\ g_0 \in L_1(e^{at}, R)\bigr\}.$$

Положим $W_0 := W_0^+ \oplus W_0^-$, где $\oplus$ — прямая сумма. Имеем

$$P_0^{\pm} : W_0 \to W_0^{\pm}, \quad P_0^{\pm}\mathscr{G}_0(p) \equiv P_0^{\pm}\{\mathscr{G}_0(t)\}(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipt} g_0(t)\theta(\pm t)\,dt, \quad \operatorname{Im} p = -a.$$

Справедлива формула

$$P_0^+\mathscr{G}_0(p) + P_0^-\mathscr{G}_0(p) = \mathscr{G}_0(p) \equiv \mathscr{F} g_0(p), \quad \operatorname{Im} p = -a.$$

Из условия (2.1.4) по аналогии с утверждением 1 получим, что целая функция

$$p^s \det \mathscr{F} k_+(p), \quad p = x + iy,$$

имеет в полуплоскости $\operatorname{Im} p \geq -\delta$ конечное число нулей. Следовательно, существует параметр a такой, что $\delta \geq a > 0$ и

$$p^s \det \mathscr{F} k_+(p) \neq 0 \quad \text{при } -a \leq \operatorname{Im} p < 0.$$

Тогда из (2.1.5) получим, что

$$p^s \det \mathscr{F} k_+(p) \neq 0 \quad \text{при } \operatorname{Im} p \geq -a. \tag{6.2}$$

Из (2.1.1) и (6.1) имеем

$$\mathscr{F} k(p) = \frac{1}{1 - e^{-ipb}} \mathscr{F} k_+(p), \quad \operatorname{Im} p = -a. \tag{6.3}$$

Рассмотрим систему уравнений (3.4) при $f = 0$, $\lambda = 0$ и $\operatorname{Im} p = -a$. В нашем случае ввиду условия (6.1) в системе (3.4) $v_- \in L_1(e^{ct}, R)$, $c > 0$, $v_-(t) = 0$, $t > 0$ (в отличие от разд. 3). Умножив систему (3.4) на функцию $1 - e^{-ipb}$, с учетом (6.3) для $\operatorname{Im} p = -a$ имеем

$$\mathscr{F} k_+(p)\mathscr{F} u(p) - (1 - e^{-ipb})\mathscr{F} v_+(p) = (1 - e^{-ipb})\mathscr{F} v_-(p). \tag{6.4}$$

Легко видеть, что левая (правая) часть системы уравнений (6.4) аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im} p > -a$ ($\operatorname{Im} p < -a$) и непрерывна там вплоть до границы, кроме того, обращается в нуль на бесконечности в этой полуплоскости. Тогда по теореме об аналитическом продолжении и теореме Лиувилля [2, с. 29, 30] левая и правая части системы уравнений (6.4) равны тождественно нулю, т. е. $v_- = 0$ и

$$\mathscr{F} k_+(p)\mathscr{F} u(p) - (1 - e^{-ipb})\mathscr{F} v_+(p) = 0, \quad \operatorname{Im} p = -a. \tag{6.5}$$

Для решения системы уравнений (6.5), умножив ее слева на множитель

$$e^{-ipb} \frac{1}{(1 - e^{-ipb})} (\mathscr{F} k_+(p))^{-1},$$

имеем

$$\frac{e^{-ipb}}{1 - e^{-ipb}} \mathscr{F} u(p) = e^{-ipb} (\mathscr{F} k_+(p))^{-1} \mathscr{F} v_+(p), \quad \operatorname{Im} p = -a. \tag{6.6}$$

Матрица $(\mathscr{F} k_+(p))^{-1}$ представима в виде

$$(\mathscr{F} k_+(p))^{-1} = \frac{p^s}{p^s \det \mathscr{F} k_+(p)} K^+(p), \tag{6.7}$$

где K^+ — матрица, присоединенная к матрице $\mathscr{F} k_+$. Тогда по определению $K^+ \in W_{0+}^{n\times n}$ при $\operatorname{Im} p = -a$ ввиду того, что $\mathscr{F} k_+ \in W_{0+}^{n\times n}$ при $\operatorname{Im} p = -a$. Подставляя выражение для $(\mathscr{F} k_+(p))^{-1}$ из (6.7) в (6.6), получим

$$\frac{e^{-ipb}}{1 - e^{-ipb}} \mathscr{F} u(p) = \frac{p^s}{p^s \det \mathscr{F} k_+(p)} K^+(p) e^{-ipb} \mathscr{F} v_+(p), \quad \operatorname{Im} p = -a. \tag{6.8}$$

Анализ системы уравнений (6.8) подобен анализу системы (6.4). Левая часть системы (6.8) равна ее правой части и равна нулевому вектору. Следовательно, $u = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 2. С. 3–72.

2. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978.

3. *Воронин А. Ф.* Полное обобщение метода Винера — Хопфа для интегральных уравнений в свертках на конечном интервале с интегрируемыми ядрами // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 9. С. 1153–1160.

4. *Воронин А. Ф.* Усиление альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений в свертках // Докл. РАН. 2002. Т. 387, № 6. С. 737–738.

5. *Воронин А. Ф.* Необходимые и достаточные условия корректности для уравнения второго рода в свертках на конечном интервале с четным ядром // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 756–767.

6. *Воронин А. Ф.* Условия корректности уравнения 2-го рода в свертках на конечном интервале с четным ядром // Докл. РАН. 2007. Т. 413, № 5. С. 594–595.

7. *Воронин А. Ф.* Метод определения частных индексов симметричных матриц-функций // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 1. С. 54–69.

8. *Воронин А. Ф.* Интегральное уравнение первого рода в свертках на конечном интервале с периодическим ядром // Сиб. журн. индустр. математики. 2008. Т. 11, № 1. С. 46–56.

9. *Воронин А. Ф.* Исследование интегрального уравнения 2-го рода в свертках на конечном интервале с периодическим ядром // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 1. С. 31–39.

10. *Воронин А. Ф.* О методе определения частных индексов симметричных матриц-функций // Докл. РАН. 2011. Т. 437, № 4. С. 448–451.

11. *Feldman I., Gohberg I., Krupnik N.* Convolution equations on finite intervals and factorization of matrix functions // Integral Equations Oper. Theory. 2000. V. 36. P. 201–211.

12. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1986.

13. *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука. Физматлит, 1996.

Статья поступила 26 октября 2011 г.

Воронин Анатолий Федорович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`voronin@math.nsc.ru`