Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 512.554

ТЕРНАРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ АССОЦИАТИВНЫХ И ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

А. И. Шестаков

Аннотация. Описываются тернарные дифференцирования конечномерных сепарабельных ассоциативных и йордановых алгебр.

Ключевые слова: ассоциативная алгебра, альтернативная алгебра, йорданова алгебра, алгебра Ли, дифференцирование, тернарное дифференцирование.

Дифференцирование является одним из фундаментальных понятий в математике. Большую роль дифференцирования играют и в алгебре. Классической задачей теории колец является задача описания дифференцирований простых конечномерных алгебр. Так, например, в классе ассоциативных алгебр оператор коммутирования на фиксированный элемент алгебры является дифференцированием, которое называется *внутренним*, и оказывается, что таковым является любое дифференцирование простой конечномерной центральной ассоциативной алгебры. В классе алгебр Ли оператор умножения на элемент алгебры является дифференцированием, которое, в свою очередь, называется *внутренним*, и также известно, что таковым является любое дифференцирование простой конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль. В классе альтернативных и йордановых алгебр тоже имеются свои внутренние дифференцирования. При этом существуют альтернативные и йордановы алгебры, множество дифференцирований которых не совпадает с множеством внутренних дифференцирований. Однако над полем подходящей характеристики любое дифференцирование простой конечномерной центральной алгебры из этих классов является внутренним. Существенный вклад в описание дифференцирований альтернативных и йордановых алгебр внесли Шафер [1], Джекобсон [2], Харрис [3] и Маккриммон [4].

Херстейном [5] установлена связь между дифференцированиями первичных ассоциативных алгебр и присоединенных йордановых алгебр. В дальнейшем результаты Херстейна обобщены в [6–8].

В. Т. Филиппов [9] и Хопкинс [10] рассмотрели на алгебрах Ли понятие антидифференцирования. В частности, Хопкинс показала наличие антидифференцирования на алгебре sl_2, а В. Т. Филиппов заметил, что идеал алгебры Ли, порожденный значениями стандартного многочлена пятой степени, лежит в ядре любого антидифференцирования. Затем В. Т. Филиппов [11] ввел понятие

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00938–а).

δ-дифференцирования, которое является обобщением как обычного дифференцирования в случае $\delta = 1$, так и антидифференцирования в случае $\delta = -1$. В [11, 12] им описаны δ-дифференцирования первичных алгебр Ли с невырожденной симметрической билинейной формой, а также в [13] — первичных ассоциативных, альтернативных и мальцевских алгебр с $\frac{1}{6}$ в кольце операторов. Зусманович [14] изучил δ-дифференцирования при $\delta \neq -1$ первичных супералгебр Ли с невырожденной симметрической билинейной формой. И. Б. Кайгородовым в [15–17] исследованы δ-дифференцирования простых конечномерных йордановых алгебр и супералгебр, а также супералгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. В [18] В. Н. Желябин и И. Б. Кайгородов описали δ-дифференцирования простых супералгебр йордановых скобок. Наконец, работа [19] посвящена δ-дифференцированиям простых конечномерных модулярных и неунитальных йордановых супералгебр.

Естественным развитием обычных дифференцирований и δ-дифференцирований являются обобщенные дифференцирования. Для ассоциативных алгебр обобщенные дифференцирования введены Брешаром в [20, 21]. Также в [22] рассматривались ассоциативные алгебры, у которых множество значений обобщенного дифференцирования состоит из обратимых элементов и нуля. Для алгебр Ли обобщенные дифференцирования изучались в [23] и для супералгебр Ли — в [24].

В [25] введено понятие тернарного дифференцирования, которое является аналогом обобщенных дифференцирований из [23]. Там описаны тернарные дифференцирования обобщенных алгебр Кэли — Диксона над полем характеристики, не равной 2, 3. Понятие тернарного дифференцирования восходит к так называемому принципу тройственности [26], который утверждает, что каждый элемент ортогональной алгебры Ли кососимметрических операторов алгебры Кэли — Диксона относительно композиционной формы является главной компонентой тернарного дифференцирования. В [27, 28] тернарные дифференцирования использовались для изучения некоторых неассоциативных унитальных алгебр.

В данной работе описываются тернарные дифференцирования сепарабельных ассоциативных и йордановых алгебр. В ассоциативном случае показано, что любое тернарное дифференцирование является внутренним. Для йордановых алгебр установлено, что любое тернарное дифференцирование покомпонентно является суммой обычного дифференцирования и оператора умножения на элемент из центра.

Пусть A — произвольная алгебра над полем P. Обозначим через $\mathrm{End}(A)$ алгебру линейных отображений пространства A в себя. Через $C(A)$ обозначим центроид алгебры A, т. е. множество отображений

$$C(A) = \{\phi \in \mathrm{End}(A) \mid \phi(xy) = \phi(x)y = x\phi(y)\ \forall x, y \in A\}.$$

Линейное отображение $D \in \mathrm{End}(A)$ называется *дифференцированием*, если для любых $x, y \in A$ выполняется равенство

$$D(xy) = D(x)y + xD(y).$$

Множество всех дифференцирований алгебры A обозначается через $\mathrm{Der}(A)$.

Линейное отображение $\phi \in \mathrm{End}(A)$ называется *δ-дифференцированием*, если существует такой $\delta \in P$, что для любых $x, y \in A$ выполнено равенство

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)).$$

Отсюда сразу очевидны так называемые *тривиальные* δ-дифференцирования: это 1-дифференцирование, если $\phi \in \mathrm{Der}(A)$ — дифференцирование алгебры A, $1/2$-дифференцирование, если $\phi \in C(A)$ — элемент центроида алгебры A, и 0-дифференцирование, если $\phi(A^2) = 0$. Для формальности из тривиальных δ-дифференцирований отметим еще нулевое, т. е. отображение ϕ, $\phi(A) = 0$, которое является δ-дифференцированием при любом значении δ.

Следующее определение обобщает понятия обычного дифференцирования и δ-дифференцирования.

Тройка (D, F, G) линейных отображений $D, F, G \in \mathrm{End}(A)$ называется *тернарным дифференцированием* алгебры A, если для любых $x, y \in A$ выполняется равенство

$$D(xy) = F(x)y + xG(y). \tag{1}$$

Как видно из этого определения, тройка (D, D, D), где D — обычное дифференцирование алгебры A, является тернарным дифференцированием. Аналогично $(\phi, \delta\phi, \delta\phi)$ — тернарное дифференцирование при δ-дифференцировании ϕ.

Множество всех тернарных дифференцирований алгебры A будем обозначать через $T\,\mathrm{Der}(A)$. Нетрудно убедиться, что оно образует алгебру Ли относительно покомпонентных операций векторного пространства и коммутаторного умножения

$$[(D, F, G), (D', F', G')] = ([D, D'], [F, F'], [G, G']),$$

где $[X, Y] = XY - YX$.

Первую компоненту D в тройке тернарного дифференцирования (D, F, G) будем называть *главной*, а также дадим ей определение: *обобщенное дифференцирование*. Множество всех обобщенных дифференцирований алгебры A будем обозначать через $G\,\mathrm{Der}(A)$. Таким образом,

$$G\,\mathrm{Der}(A) = \{D \in \mathrm{End}(A) \mid \exists\, F, G \in \mathrm{End}(A) : (D, F, G) \in T\,\mathrm{Der}(A)\},$$

т. е. это проекция множества тернарных дифференцирований $T\,\mathrm{Der}(A)$.

Очевидно, что $G\,\mathrm{Der}(A)$ таким же образом, как и $T\,\mathrm{Der}(A)$, является алгеброй Ли и образует тем самым подалгебру в $\mathrm{End}(A)^{(-)}$. В свою очередь, ясно, что все обычные дифференцирования являются обобщенными и их множество $\mathrm{Der}(A)$ образует подалгебру в $G\,\mathrm{Der}(A)$ относительно тех же операций обычного векторного пространства и коммутаторного умножения операторов.

Замечание. Необходимо отметить, что в предшествующих работах, как в [23], так и в [21], под обобщенным дифференцированием понимается другая компонента тернарного дифференцирования, а именно если тернарное дифференцирование (D, F, G) определено равенством (1), то согласно их определению обобщенным дифференцированием будет компонента F. Однако мы считаем свое определение обобщенного дифференцирования как главной компоненты D более логичным, поскольку в определяющем равенстве (1) именно она действует на произведение аргументов и симметрично содержит обе переменные, тем самым занимая особое положение по отношению к компонентам F и G. Особенно это станет наглядным в случае алгебр с единицей.

§ 1. Тернарные дифференцирования ассоциативных алгебр

Пусть A — ассоциативная алгебра. Обозначим через L_a и R_a операторы левого и правого внутреннего умножения на элемент $a \in A$:

$$L_a(x) = ax, \qquad R_a(x) = xa.$$

Заметим, что следующие тройки являются тернарными дифференцированиями в A:

$$\Delta_a^l = (L_a, L_a, 0), \quad \Delta_a^r = (R_a, 0, R_a), \quad \Delta_a^m = (0, R_a, -L_a).$$

Назовем такие тернарные дифференцирования, а также все их линейные комбинации *внутренними*.

Общая формула внутреннего тернарного дифференцирования тогда, очевидно, будет иметь вид

$$\Delta_{a,b,c} = (L_a + R_b,\ L_a + R_c,\ -L_c + R_b), \tag{2}$$

где a, b, c — произвольные элементы алгебры A.

Соответственно можно определить внутренние обобщенные дифференцирования как главные компоненты внутренних тернарных дифференцирований: ими будут все преобразования вида

$$D_{a,b} = L_a + R_b, \tag{3}$$

где a, b — произвольные элементы алгебры A.

На самом деле оказывается, что для ассоциативной сепарабельной алгебры, в частности для алгебры матриц размера $n \times n$, все тернарные (и соответственно обобщенные) дифференцирования являются внутренними, что докажем далее.

Следует отметить, что этот результат можно вывести из работы [21], где в контексте расширенной теории и с применением более сложных методов он получен в несколько ином, неявном, виде. Здесь же будет приведено более простое и краткое доказательство, сразу дающее конечный и явный вид тернарных дифференцирований для обозначенного нами класса алгебр.

Лемма 1. *Пусть D — обобщенное дифференцирование произвольной ассоциативной алгебры A с единицей 1. Тогда D удовлетворяет в ней равенству*

$$D(xy) = D(x)y + xD(y) - xD(1)y \tag{4}$$

для любых $x, y \in A$.

Доказательство. Пусть $(D, F, G) \in T\operatorname{Der}(A)$ — связанное с D тернарное дифференцирование, т. е. выполняется определяющее равенство (1):

$$D(xy) = F(x)y + xG(y).$$

Положим в этом равенстве $y = 1$. Тогда $D(x) = F(x) + xG(1)$. Обозначив $G(1) = g$, имеем $F(x) = D(x) - xg$ или $F = D - R_g$.

Аналогично, положив $x = 1$, получаем $D(y) = F(1)y + G(y)$, откуда, обозначив $F(1) = f$, имеем $G(y) = D(y) - fy$ или $G = D - L_f$.

Подставляя полученные выражения F, G в основное равенство (1), имеем

$$D(xy) = D(x)y + xD(y) - x(f + g)y.$$

Учитывая, что $f = F(1)$, $g = G(1)$ и $D(1) = F(1) + G(1)$ при $x = y = 1$, получаем искомое равенство. Лемма доказана.

Замечание. Из равенства (4) видно, что обобщенное дифференцирование D в алгебре A является обычным дифференцированием в том и только том случае, когда $D(1) = 0$, т. е.

$$\operatorname{Der}(A) = \{D \in G\operatorname{Der}(A) \mid D(1) = 0\}.$$

Кроме того, в лемме показано, что всякое тернарное дифференцирование имеет вид $\Delta = (D, D - R_g, D - L_f)$, где $D \in G\,\mathrm{Der}(A)$, а $f + g = D(1)$. Нетрудно проверить, что верно и обратное. Если D — обобщенное дифференцирование и, значит, удовлетворяет равенству (4), то, взяв любые $f, g \in A$ такие, что $f + g = D(1)$, и положив $F = D - R_g$, $G = D - L_f$, получим тернарное дифференцирование (D, F, G), т. е. можно записать

$$T\,\mathrm{Der}(A) = \{(D, D - R_g, D - L_f) \mid D \in G\,\mathrm{Der}(A);\ f, g \in A,\ f + g = D(1)\}.$$

Таким образом, задача сводится к описанию $D \in G\,\mathrm{Der}(A)$.

Теорема 1. *Всякое обобщенное дифференцирование алгебры $(n \times n)$-матриц $M_n(P)$ над произвольным полем P является внутренним, т. е. имеет вид* (3).

Доказательство. Рассмотрим e_{ij} — матричные единицы с умножением $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$. В частности, $e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$. Применяя обобщенное дифференцирование D к этому равенству, в силу леммы 1 получим

$$D(e_{ik}) = D(e_{ij})e_{jk} + e_{ij}D(e_{jk}) - e_{ij}D(1)e_{jk},$$

откуда для любых $r \neq i$, $s \neq k$ имеем $e_{rr}D(e_{ik})e_{ss} = 0$. Иначе говоря, в матрице $D(e_{ik})$ на (r, s)-м месте стоит 0, или носитель матрицы $D(e_{ik})$ состоит только из i-й строки и k-го столбца. В частности, $e_{jj}D(e_{ii})e_{jj} = 0$ при $i \neq j$.

Рассмотрим матрицу $D(e_{11})$: ее носитель состоит только из 1-й строки и 1-го столбца, значит, можно записать

$$D(e_{11}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}e_{1i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i1}e_{i1} = a + b.$$

Заметим, что e_{1i} можно представить в виде $e_{1i} = e_{11}e_{1i} = R_{e_{1i}}(e_{11})$ и точно так же $e_{i1} = L_{e_{i1}}(e_{11})$. Тогда в силу линейности

$$a = \sum_{i=1}^{n} R_{\alpha_{1i}e_{1i}}(e_{11}) = R_a(e_{11}),$$

аналогично $b = L_b(e_{11})$.

Перейдем к отображению $D' = D - (R_a + L_b) = D - D_{b,a}$. Это тоже обобщенное дифференцирование, причем $D'(e_{11}) = 0$. Значит, можно заменить D на D' и, таким образом, без ограничения общности считать, что $D(e_{11}) = 0$.

Рассмотрим

$$D(e_{1k}) = D(e_{11}e_{1k}) = e_{11}D(e_{1k}) - e_{11}D(1)e_{1k}.$$

Имеем

$$e_{11}D(1)e_{1k} = e_{11}D\left(\sum_{i=1}^{n} e_{ii}\right)e_{11}e_{1k} = 0,$$

так как по доказанному выше $e_{11}D(e_{ii})e_{11} = 0$ при $i \neq 1$, а $D(e_{11}) = 0$. Таким образом, получаем $D(e_{1k}) = e_{11}D(e_{1k})$, значит, носитель матрицы $D(e_{1k})$ состоит только из 1-й строки, т. е.

$$D(e_{1k}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}e_{1i}.$$

Пусть $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{1i} e_{ki}$. Тогда

$$R_a(e_{1k}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} e_{1k} e_{ki} = D(e_{1k}).$$

Теперь можем перейти к отображению $D' = D - R_a = D - D_{0,a}$. Это снова обобщенное дифференцирование, и уже $D'(e_{1k}) = 0$ для произвольного, но пока лишь отдельно взятого k.

Проделаем это последовательно для всех $D(e_{1k})$, $k = 2, \dots, n$, чтобы получить $D(e_{11}) = D(e_{12}) = \dots = D(e_{1n}) = 0$. Однако при этом необходимо проверить, что для каждого нового D', получающегося на очередном k-м шаге, сохраняется полученное на предыдущих шагах, т. е. что не только $D'(e_{1k}) = 0$, но и $D'(e_{1j}) = 0$ для всех $j < k$. Покажем это индукцией по k.

Пусть на всех первых $k-1$ шагах это выполняется, т. е. $D(e_{1j}) = 0$ для $j = 1, \dots, k-1$. Полагаем $D' = D - R_a$, где $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{1i} e_{ki}$, и имеем $D'(e_{1k}) = 0$.

Пусть $j < k$, тогда

$$D'(e_{1j}) = D(e_{1j}) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} e_{1j} e_{ki} = 0,$$

поскольку $D(e_{1j}) = 0$ по предположению индукции, а $e_{1j} e_{ki} = 0$ для всех i, так как $j < k$ и, значит, $j \neq k$. Таким образом, переходя на каждом шаге к новому D' и заменяя им D, по достижении $k = n$ можем считать, что

$$D(e_{11}) = D(e_{12}) = \dots = D(e_{1n}) = 0.$$

То же самое проделываем для «столбцовых» единиц $D(e_{k1}) = D(e_{k1}) e_{11} = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_{i1} e_{i1}$ и получаем $D(e_{11}) = D(e_{21}) = \dots = D(e_{n1}) = 0$. Однако поскольку мы приступили к столбцам после строк, для полной корректности проверим, что «строковые» единицы e_{1j} не задеты, т. е. для D' на каждом k-м шаге $D'(e_{1j}) = 0$ при всех $j = 1, \dots, n$.

Пусть на k-м шаге $D(e_{1j}) = 0$, $j = 1, \dots, n$, далее соответственно $D' = D - L_b$, $b = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_{i1} e_{ik}$, и $D'(e_{k1}) = 0$. Тогда

$$D'(e_{1j}) = D(e_{1j}) - \sum_{i=1}^{n} \beta_{i1} e_{ik} e_{1j} = 0,$$

поскольку $D(e_{1j}) = 0$ по предположению индукции, а $e_{ik} e_{1j} = 0$, так как здесь номер шага $k > 1$.

Теперь можем считать, что

$$D(e_{11}) = D(e_{12}) = \dots = D(e_{1n}) = D(e_{21}) = \dots = D(e_{n1}) = 0$$

или, иначе говоря, $D(e_{ij}) = 0$ в случае, когда хотя бы $i = 1$ или $j = 1$.

Рассмотрим e_{ij} при $i, j \geq 2$. С учетом вышедоказанного

$$D(e_{ij}) = D(e_{i1} e_{1j}) = -e_{i1} D(1) e_{1j} = -e_{i1} e_{11} D(1) e_{11} e_{1j} = 0,$$

поскольку $e_{11} D(1) e_{11} = \sum\limits_{k=1}^{n} e_{11} D(e_{kk}) e_{11} = \sum\limits_{k=2}^{n} e_{11} D(e_{kk}) e_{11} = 0$.

Итак, последовательно прибавляя к D на каждом шаге внутренние обобщенные дифференцирования, в итоге получили нулевое преобразование, а значит, исходное преобразование D является внутренним обобщенным дифференцированием. Теорема доказана.

Следствие 1. *Всякое тернарное дифференцирование алгебры $A = M_n(P)$ $(n \times n)$-матриц над произвольным полем P является внутренним, т. е. имеет вид* (2).

Доказательство. Пусть (D, F, G) — произвольное тернарное дифференцирование. Согласно доказанному выше главная компонента D является внутренним обобщенным дифференцированием, т. е. $D = L_a + R_b$ при некоторых $a, b \in A$. Далее, как показано в лемме 1, $F = D - R_g$, $G = D - L_f$, где $f, g \in A$, $f + g = D(1)$, или, расписывая далее, имеем $F = L_a + R_{b-g}$, $G = L_{a-f} + R_b$. Заметим, что поскольку $f + g = D(1) = a + b$, то $a - f = -b + g$, и тогда, обозначив $b - g = c$, получаем требуемый вид (2) для (D, F, G).

Полученный результат допускает естественное обобщение.

Теорема 2. *Всякое тернарное* (*соответственно обобщенное*) *дифференцирование конечномерной простой центральной ассоциативной алгебры A над произвольным полем P является внутренним, т. е. имеет вид* (2) (*соответственно вид* (3)).

Доказательство. Пусть A — алгебра над полем P, возьмем произвольно $\Delta = (D, F, G) \in T\operatorname{Der}(A)$. Если поле P алгебраически замкнуто, то в этом случае A изоморфна алгебре матриц над P, и тогда применяем следствие 1. Иначе существует конечное расширение K исходного поля P такое, что соответствующая над полем K расширенная алгебра $A_K = K \otimes_P A$ изоморфна алгебре матриц над K (поле расщепления A над P).

Рассмотрим тройку $\widetilde{\Delta} = (I \otimes D, I \otimes F, I \otimes G) = (\widetilde{D}, \widetilde{F}, \widetilde{G})$ расширенных на алгебру A_K отображений (очевидно, что тогда $\widetilde{\Delta} \in T\operatorname{Der}(A_K)$), здесь уже можем применить доказанный результат. Таким образом, тернарное дифференцирование $\widetilde{\Delta}$ внутреннее в A_K, т. е. $(\widetilde{D}, \widetilde{F}, \widetilde{G}) = (L_a + R_b, L_a + R_c, -L_c + R_b)$, где $a, b, c \in A_K$.

Пусть $q_1 = 1, q_2, \dots, q_r$ — базис K над P и в $A_K = K \otimes_P A$ имеет место разложение
$$a = \sum_{i=1}^{r} q_i \otimes a_i = 1 \otimes a_1 + \sum_{i \geq 2} q_i \otimes a_i, \quad a_i \in A;$$
аналогично $b = 1 \otimes b_1 + \sum\limits_{i \geq 2} q_i \otimes b_i$, $c = 1 \otimes c_1 + \sum\limits_{i \geq 2} q_i \otimes c_i$, где $b_i, c_i \in A$.

Рассмотрим сужение $\widetilde{D} = I \otimes D$ на $A = 1 \otimes A$. Для всякого $x \in A$ имеем $\widetilde{D}(x) = D(x) \in A$, т. е.
$$\begin{aligned} ax + xb &= \left(\sum_{i=1}^{r} q_i \otimes a_i\right)(1 \otimes x) + (1 \otimes x)\left(\sum_{i=1}^{r} q_i \otimes b_i\right) \\ &= 1 \otimes a_1 x + \sum_{i \geq 2} q_i \otimes a_i x + 1 \otimes x b_1 + \sum_{i \geq 2} q_i \otimes x b_i \\ &= 1 \otimes (a_1 x + x b_1) + \sum_{i \geq 2} q_i \otimes (a_i x + x b_i) \in A, \end{aligned}$$
откуда в силу линейной независимости $q_1 = 1, q_2, \dots, q_r$ над A в $K \otimes_P A$ получаем $q_i \otimes (a_i x + x b_i) = 0$, $i = 2, \dots, r$, и $D(x) = a_1 x + x b_1$ для всех $x \in A$, где $a_1, b_1 \in A$, т. е. D внутреннее в A. Аналогично $F(x) = a_1 x + x c_1$, $G(x) = -c_1 x + x b_1$, и, таким образом, вся тройка (D, F, G) имеет вид (2) уже в алгебре A, т. е. является внутренним тернарным дифференцированием в A. Теорема доказана.

Напомним определение сепарабельной алгебры над полем.

Конечномерная ассоциативная (йорданова) алгебра A над полем P называется *сепарабельной* (над P), если при любом расширении K поля P алгебра $K \otimes_P A$ является полупростой.

Теорема 3. *Всякое тернарное (и соответственно обобщенное) дифференцирование сепарабельной ассоциативной алгебры A над произвольным полем P является внутренним.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая

Лемма 2. *Пусть B — произвольная алгебра с единицей 1 такая, что ее центр $Z(B)$ является конечным сепарабельным расширением исходного поля P. Предположим, что D — линейное преобразование алгебры B над P, удовлетворяющее условию*

$$D(xy) = D(x)y + xD(y) - \frac{1}{2}(xD(1))y - \frac{1}{2}x(D(1)y).$$

Тогда D является линейным преобразованием алгебры B над полем $Z(B)$, т. е.

$$D(z_1x + z_2y) = z_1D(x) + z_2D(y) \quad \forall z_1, z_2 \in Z(B),\ x, y \in B.$$

Доказательство. В силу того, что $Z(B)$ — конечное сепарабельное расширение поля P, каждый элемент $z \in Z(B)$ сепарабелен над P. Пусть z — произвольный элемент из $Z(B)$ и $f(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0$ — многочлен минимальной степени с коэффициентами из P такой, что $f(z) = 0$. Тогда f не имеет кратных корней. Нетрудно показать по индукции, что

$$D(z^k) = kz^{k-1}D(z) - (k-1)z^kD(1).$$

Тогда в силу линейности D, сгруппировав, получаем

$$\begin{aligned} D(f(z)) &= (nz^{n-1} + \alpha_{n-1}(n-1)z^{n-2} + \dots + \alpha_1)D(z) \\ &\quad - ((n-1)z^n + \alpha_{n-1}(n-2)z^{n-1} + \dots + \alpha_2z^2 - \alpha_0)D(1) \\ &= f'(z)D(z) - ((n-1)z^n + \alpha_{n-1}(n-2)z^{n-1} + \dots + \alpha_2z^2 - \alpha_0)D(1). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} f'(z)z = f'(z)z - f(z) &= nz^n + \alpha_{n-1}(n-1)z^{n-1} + \dots + \alpha_1z - z^n - \alpha_{n-1}z^{n-1} \\ &\quad - \dots - \alpha_1z - \alpha_0 = (n-1)z^n + \alpha_{n-1}(n-2)z^{n-1} + \dots + \alpha_2z^2 - \alpha_0. \end{aligned}$$

Тогда

$$0 = D(f(z)) = f'(z)D(z) - (f'(z)z)D(1) = f'(z)(D(z) - zD(1)).$$

Как уже отмечали, f не имеет кратных корней, и, значит, $f'(z) \neq 0$. Тогда равным нулю остается второй множитель, т. е. $D(z) = zD(1)$.

Отсюда для произвольных $z \in Z(B)$, $x \in B$ получаем

$$\begin{aligned} D(zx) &= D(z)x + zD(x) - \frac{1}{2}(zD(1))x - \frac{1}{2}z(D(1)x) \\ &= zD(1)x + zD(x) - zD(1)x = zD(x), \end{aligned}$$

т. е. показали правило для умножения на элемент из центра. Для суммы правило проверяется тривиально. Лемма доказана.

Вернемся теперь к основной теореме.

Доказательство. Алгебра A сепарабельна и, значит, сама является полупростой, т. е. $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, где A_i — простые сепарабельные алгебры над P.

Пусть $\Delta = (D, F, G) \in T\operatorname{Der}(A)$ — тернарное дифференцирование, соответственно D — обобщенное дифференцирование ассоциативной алгебры A. Покажем, что $\Delta = (D, F, G)$ действует инвариантно на A_i.

Действительно, возьмем произвольно $x \in A_i$. Тогда $x = xe_i$, где e_i — единица подалгебры A_i, и

$$D(x) = D(xe_i) = D(x)e_i + xD(e_i) - xD(1)e_i.$$

В силу того, что A_i — идеал в A и $e_i, x \in A_i$, все слагаемые и соответственно вся сумма лежат в A_i, т. е. $D(x) \in A_i$.

Из леммы 1 $F = D - R_g$, $G = D - L_f$, где $f = F(1) \in A$, $g = G(1) \in A$, и, значит, $F(x) = D(x) - xg \in A_i$, $G(x) = D(x) - fx \in A_i$, поскольку $x, D(x) \in A_i$, а $A_i \trianglelefteq A$. Итак, $\Delta = (D, F, G)$ действует инвариантно на A_i.

Определим $\Delta_i = (D_i, F_i, G_i)$ по правилу

$$D_i(x) = D(x), \quad F_i(x) = F(x), \quad G_i(x) = G(x) \quad \forall x \in A_i.$$

Тогда $\Delta_i \in T\operatorname{Der}(A_i)$ и соответственно $D_i \in G\operatorname{Der}(A_i)$ — обобщенное дифференцирование подалгебры A_i.

Алгебра A_i сепарабельна над P, значит, центр $Z(A_i)$ — сепарабельное расширение поля P. Для D_i выполнены все условия леммы 2, значит, D_i является обобщенным дифференцированием алгебры A_i уже над полем $Z(A_i)$. Тогда к A_i можем применить теорему 2 и заключить, что обобщенное дифференцирование D_i внутреннее. Повторив в точности рассуждения следствия 1, получим, что и тернарное дифференцирование $\Delta_i = (D_i, F_i, G_i)$ внутреннее. Тогда $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_i$ является внутренним тернарным дифференцированием в A (соответственно $D = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$ внутреннее обобщенное в A). Теорема доказана полностью.

Отсюда получается классический результат для описания обычных дифференцирований в тех же условиях.

Следствие 2. *Всякое обычное дифференцирование D^0 ассоциативной сепарабельной алгебры A над полем P представляется в виде $D^0_a(x) = ax - xa$ для некоторого $a \in A$.*

Доказательство. Действительно, обычное дифференцирование соответствует тернарному дифференцированию вида (D, D, D), т. е. при $F = G = D$. Из (2) следует, что это имеет место в единственном случае при $b = c = -a$, и тогда соответственно $D = L_a - R_a = D^0_a$.

Так же можно получить обобщение результата из [13] для описания δ-дифференцирований в тех же условиях.

Следствие 3. *В ассоциативной сепарабельной алгебре A над полем P существуют только тривиальные δ-дифференцирования.*

Доказательство. Действительно, δ-дифференцирование соответствует тернарному дифференцированию вида $(D, \delta D, \delta D)$, т. е. при $F = G = \delta D$. Если $\delta = 1$, то $D = F = G$ — обычное дифференцирование. Пусть $\delta \neq 1$. Тогда из (2) имеем $(D,F,G)=(L_a+R_b, L_a+R_c, -L_c+R_b)$, $a,b,c\in A$, и в то же время должно быть $(D,F,G)=(L_a+R_b, L_{\delta a}+R_{\delta b}, L_{\delta a}+R_{\delta b})$.

Рассмотрим в общем случае равенство

$$L_{a_1}+R_{b_1}=L_{a_2}+R_{b_2}.$$

Запишем его в виде $L_{a_1}-L_{a_2}=-R_{b_1}+R_{b_2}$, откуда $a_1-a_2=b_2-b_1=s$. Тогда $L_s=R_s$, т. е. $sx=xs$ для всех $x\in A$, и, таким образом, $s\in Z(A)$ лежит в центре алгебры A.

В нашем случае $L_a+R_c=L_{\delta a}+R_{\delta b}=F$, откуда $(\delta-1)a=\lambda\in Z(A)$, при этом $\delta\neq 1$ и, значит, $a=\lambda/(\delta-1)\in Z(A)$. Аналогично $b\in Z(A)$. Тогда $D=aI+bI=\nu I$, $\nu\in Z(A)$, и $F=G=\delta D=\delta\nu I$, откуда, учитывая (1), получаем $\nu=2\delta\nu$. Если $\nu\neq 0$, то $\delta=1/2$ — в этом случае имеем тривиальное 1/2-дифференцирование $(\nu I, \nu I/2, \nu I/2)$. Если же $\nu=0$, то $F=G=\delta D=\delta\nu I=0$ — нулевое тривиальное δ-дифференцирование.

Замечание. Отметим, что результат теоремы 3 можно быстро получить, если использовать классический результат следствия 2. В самом деле, пусть D — обобщенное дифференцирование, $d=D(1)$. Рассмотрим оператор $D^0=D-R_d$. Тогда, с одной стороны, в силу свойства $D\in G\,\mathrm{Der}(A)$

$$D^0(xy)=D(xy)-xyd=D(x)y+xD(y)-xdy-xyd.$$

С другой стороны, непосредственно получаем

$$D^0(x)y+xD^0(y)=(D(x)-xd)y+x(D(y)-yd)=D(x)y+xD(y)-xdy-xyd.$$

Таким образом,

$$D^0(xy)=D^0(x)y+xD^0(y),$$

т. е. $D^0\in \mathrm{Der}(A)$ — обычное дифференцирование и, значит, согласно следствию 2 имеет вид $D^0_a=L_a-R_a$. Тогда соответственно исходный оператор имеет вид $D=D^0+R_d=L_a+R_{d-a}=L_a+R_b$.

§ 2. Тернарные дифференцирования йордановых алгебр

Пусть Φ — кольцо с 1 и 1/2. Алгебра J над кольцом Φ называется *йордановой*, если в ней выполняются тождества

$$xy=yx, \quad (x^2y)x=x^2(yx).$$

Пусть J — йорданова алгебра. В алгебре $\mathrm{End}(J)$ определим оператор коммутирования по элементам $a,b\in J$:

$$D^0_{a,b}=[R_a,R_b]=R_aR_b-R_bR_a,$$

где R_a — оператор правого умножения на элемент a. Действие $D^0_{a,b}$ можно представить в виде ассоциатора элементов a,x,b:

$$D^0_{a,b}(x)=(a,x,b)=(ax)b-a(xb).$$

Данный оператор в йордановой алгебре является обычным дифференцированием (см. [29]), т. е.

$$D^0_{a,b}(xy)=xD^0_{a,b}(y)+D^0_{a,b}(x)y.$$

Будем называть дифференцирование йордановой алгебры J *внутренним*, если оно представимо в виде суммы коммутаторов $\sum\limits_i D^0_{a_i,b_i}$.

Известен результат Харриса [3] о том, что любое обычное дифференцирование конечномерной сепарабельной йордановой алгебры над полем, характеристика которого не делит степени простых специальных компонент алгебры, является внутренним. Вид тернарных и соответственно обобщенных дифференцирований в йордановых алгебрах пока не изучен.

Заметим, что тройки следующего вида, очевидно, являются тернарными дифференцированиями в любой алгебре, в том числе и в алгебре J:

$$\Delta_{\phi,\psi,\chi;D^0} = (\phi + D^0, \psi + D^0, \chi + D^0),$$

где $\phi, \psi, \chi \in C(J)$ — произвольные элементы центроида алгебры J, удовлетворяющие условию $\phi = \psi + \chi$, а $D^0 \in \mathrm{Der}(J)$ — любое обычное дифференцирование алгебры J. Назовем все такие тернарные дифференцирования *тривиальными*.

Соответственно можно определить тривиальные обобщенные дифференцирования как главные компоненты тривиальных тернарных дифференцирований: это будут все преобразования вида

$$D_{\phi;D^0} = \phi + D^0,$$

где $\phi \in C(J)$ — произвольный элемент центроида, а $D^0 \in \mathrm{Der}(J)$ — любое обычное дифференцирование алгебры J.

Далее нам достаточно ограничиться тривиальными тернарными дифференцированиями вида

$$\Delta_{\alpha,\beta,\gamma;D^0} = (\alpha I + D^0, \beta I + D^0, \gamma I + D^0), \tag{5}$$

где α, β, γ — произвольные скаляры из Φ, удовлетворяющие условию $\alpha = \beta + \gamma$, а D^0 — любое обычное дифференцирование алгебры J, и соответственно тривиальными обобщенными дифференцированиями вида

$$D_{\alpha;D^0} = \alpha I + D^0, \tag{6}$$

где α — произвольный скаляр из Φ, а D^0 — любое обычное дифференцирование алгебры J.

На самом деле оказывается, что для йордановой сепарабельной алгебры над произвольным полем P характеристики, не равной 2, все тернарные (соответственно обобщенные) дифференцирования являются тривиальными, а точнее, тернарными (соответственно обобщенными) дифференцированиями вида (5) (соответственно (6)) исходной алгебры, рассмотренной над своим центром, что мы докажем далее.

Лемма 3. *Пусть D — обобщенное дифференцирование произвольной коммутативной алгебры B с единицей 1. Тогда D в ней удовлетворяет равенству*

$$D(xy) = D(x)y + xD(y) - (xc)y - x(cy) \quad \forall x, y \in B, \tag{7}$$

где $c = D(1)/2$.

Доказательство. Пусть $(D, F, G) \in T\,\mathrm{Der}(B)$ — связанное с D тернарное дифференцирование. Точно так же, как и в доказательстве для ассоциативной алгебры, подставляя $x = 1$ и $y = 1$ в основное равенство (1), имеем

$$F = D - R_g, \quad G = D - L_f,$$

где $f = F(1)$, $g = G(1)$. Подставляя выражения F, G снова в (1), получаем

$$D(xy) = D(x)y + xD(y) - (xg)y - x(fy), \tag{8}$$

с другой стороны,

$$D(yx) = D(y)x + yD(x) - (yg)x - y(fx),$$

значит, в силу коммутативности умножения

$$(xg)y + x(fy) = (yg)x + y(fx),$$

$$x(fy - yg) = y(fx - xg), \quad x(y(f - g)) = y(x(f - g)),$$

т. е. $D_{x,y}(f - g) = 0$, или, обозначив $f - g = \lambda$, запишем в форме ассоциатора:

$$(x, \lambda, y) = 0 \tag{9}$$

(это равенство выполняется для любых $x, y \in B$).

Имеем

$$\begin{cases} f + g = D(1), \\ f - g = \lambda, \end{cases}$$

откуда $f = c + \lambda/2$, $g = c - \lambda/2$, где $c = D(1)/2$.

Возвращаясь к (8), запишем

$$D(xy) = D(x)y + xD(y) - (x(c - \lambda/2))y - x((c + \lambda/2)y)$$
$$= D(x)y + xD(y) - (xc)y - x(cy) + \frac{1}{2}((x\lambda)y - x(\lambda y)),$$

откуда в силу (9) получаем равенство (7). Лемма доказана.

Замечание. Обобщенное дифференцирование D в алгебре B является обычным дифференцированием в том и только том случае, когда $D(1) = 2c = 0$, т. е., как и в ассоциативных алгебрах,

$$\mathrm{Der}(B) = \{D \in G\,\mathrm{Der}(B) \mid D(1) = 0\}.$$

Теорема 4. *Всякое обобщенное дифференцирование конечномерной простой йордановой алгебры J над алгебраически замкнутым полем P тривиально, т. е. имеет вид* (6).

Прежде чем приступить непосредственно к доказательству теоремы, приведем некоторые понятия и свойства.

Пусть J — йорданова алгебра с единицей $1 = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$, разлагающейся в сумму попарно ортогональных идемпотентов, $e_i^2 = e_i \in J$. Тогда (см. [29]) имеет место разложение в прямую сумму подпространств $J = \bigoplus\limits_{(1 \leq i \leq j \leq n)} J_{ij}$, где

$$J_{ii} = \{x \in J \mid xe_i = x\}, \quad J_{ij} = \{x \in J \mid xe_i = xe_j = (1/2)x\},$$

причем подпространства J_{ij} связаны соотношениями

$$J_{ii} \subseteq J_{ii}, \quad J_{ij}J_{ii} \subseteq J_{ij}, \quad J_{ij}^2 \subseteq J_{ii} + J_{jj},$$

$$J_{ii}J_{jj} = J_{ii}J_{jk} = J_{ij}J_{kl} = (0), \quad J_{ij}J_{jk} \subseteq J_{ik},$$

где все индексы i, j, k, l различны. Приведенное разложение называется *пирсовским разложением* J относительно системы идемпотентов $e_1, \dots, e_n$.

Отметим также, что если поле P алгебраически замкнуто, а алгебра J полупроста, то в J найдется система ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i = 1$, причем таких, что все одноименные подпространства одномерны, т. е. $J_{ii} = P \cdot e_i$ для всех i.

Доказательство. Сразу зафиксируем, что в условиях нашей теоремы имеет силу все вышеперечисленное.

Рассмотрим идемпотенты пирсовского разложения $e_k = e_k e_k$. Применяя обобщенное дифференцирование D, по лемме 3 получим

$$D(e_k) = 2D(e_k)e_k - 2(e_k c)e_k. \tag{10}$$

Пусть

$$D(e_k) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s e_s + \sum_{s \neq t} d_{st}, \quad \alpha_s \in P,\ d_{st} \in J_{st},$$

— разложение $D(e_k)$ в прямую сумму пирсовских компонент, тогда

$$2D(e_k)e_k = 2\alpha_k e_k + 2\sum_{s \neq k} d_{sk} e_k = 2\alpha_k e_k + \sum_{s \neq k} d_{sk}.$$

Аналогично пусть имеем пирсовское разложение для $c = \frac{1}{2}D(1)$:

$$c = \sum_{s=1}^{n}\ c_s e_s + \sum_{s \neq t} c_{st},$$

тогда

$$2(e_k c)e_k = \left(2c_k e_k + \sum_{s \neq k} c_{sk}\right) e_k = 2c_k e_k + \frac{1}{2}\sum_{s \neq k} c_{sk}. \tag{11}$$

Значит, возвращаясь к (10) и подставляя полученные выражения, получаем

$$D(e_k) = 2(\alpha_k - c_k)e_k + \sum_{s \neq k}\left(d_{sk} - \frac{1}{2}c_{sk}\right).$$

Так как сумма прямая, сравнивая это с первоначальным разложением $D(e_k)$, заключаем, что $\alpha_s = 0$, $d_{st} = 0$ при $s, t \neq k$. Тогда

$$2D(e_k)e_k - D(e_k) = 2\alpha_k e_k + \sum_{s \neq k} d_{sk} - \left(\alpha_k e_k + \sum_{s \neq k} d_{sk}\right) = \alpha_k e_k,$$

т. е. из (10) имеем $2(e_k c)e_k = \alpha_k e_k$, или, подставляя полученное в (11),

$$2c_k e_k + \frac{1}{2}\sum_{s \neq k} c_{sk} = \alpha_k e_k,$$

откуда $c_{sk} = 0$ для всякого $s \neq k$, а $2c_k = \alpha_k$. Поскольку k произвольное, имеем $c_{st} = 0$ для всех $s \neq t$ и, таким образом,

$$c = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

Учитывая, что $c = D(1)/2$, соответственно получаем $D(1) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$.

Итак,

$$D(e_k) = \alpha_k e_k + \sum_{s \neq k} d_{sk} = \alpha_k e_k + u_k, \qquad d_{sk} \in J_{sk}.$$

Заметим, что

$$(d_{sk}, e_k, e_k) = (d_{sk} e_k) e_k - d_{sk}(e_k e_k) = \frac{1}{2} d_{sk} e_k - d_{sk} e_k = -\frac{1}{4} d_{sk},$$

значит, $d_{sk} = -4(d_{sk}, e_k, e_k) = 4D^0_{d_{sk}, e_k}(e_k)$. Тогда соответственно

$$u_k = \sum_{s \neq k} d_{sk} = 4 \sum_{s \neq k} D^0_{d_{sk}, e_k}(e_k) = 4D^0_{u_k, e_k}(e_k).$$

Перейдем к преобразованию $D' = D - 4D^0_{u_k, e_k}$, тоже обобщенному дифференцированию, при этом получим $D'(e_k) = \alpha_k e_k$. Значит, можем без ограничения общности считать, что $D(e_k) = \alpha_k e_k$ для произвольного отдельно взятого k.

Будем делать это последовательно для $k = 1, \dots, n$, получая на каждом шаге $D'(e_k) = \alpha_k e_k$. Покажем, что при этом остается в силе все полученное на предыдущих шагах, т. е. что не только $D'(e_k) = \alpha_k e_k$, но и $D'(e_j) = \alpha_j e_j$ для любого $j < k$. Снова действуем индукцией по k.

Пусть на всех первых $k - 1$ шагах это выполняется, т. е. $D(e_j) = \alpha_j e_j$ для всех $j = 1, \dots, k - 1$. Далее соответственно $D' = D - 4D^0_{u_k, e_k}$ и $D'(e_k) = \alpha_k e_k$. Тогда

$$\begin{aligned} D'(e_j) = D(e_j) - 4D^0_{u_k, e_k}(e_j) &= \alpha_j e_j - 4(u_k, e_j, e_k) \\ &= \alpha_j e_j - 4 \sum_{s \neq k} (d_{sk} e_j) e_k = \alpha_j e_j - d_{jk}. \end{aligned}$$

Покажем, что $d_{jk} = 0$ для любого $j < k$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} 0 = D(e_j e_k) &= D(e_j) e_k + D(e_k) e_j - (e_j c) e_k - e_j (c e_k) \\ &= \alpha_j e_j e_k + D(e_k) e_j - \frac{1}{2} \left(e_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right) e_k - \frac{1}{2} e_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i e_k \right) \\ &= D(e_k) e_j - \frac{1}{2} \alpha_j e_j e_k - \frac{1}{2} e_j \alpha_k e_k = \left(\alpha_k e_k + \sum_{i \neq k} d_{ik} \right) e_j = \frac{1}{2} d_{jk}. \end{aligned}$$

Итак, можем считать без ограничения общности, что $D(e_k) = \alpha_k e_k$ для всех $k = 1, \dots, n$ уже в совокупности. Покажем, что все $\alpha_i = \alpha_j = \alpha$.

Рассмотрим произвольный элемент $h \in J_{ij}$. Тогда

$$e_i h = \frac{1}{2} h = e_j h; \quad e_k h = 0, \ k \neq i, j.$$

Применив преобразование D, получаем

$$\frac{1}{2} D(h) = D(e_i h) = D(e_i) h + e_i D(h) - (e_i c) h - e_i (c h),$$

$$\begin{aligned}D(h) = 2D(e_ih) &= 2D(e_i)h + 2e_iD(h) - (e_iD(1))h - e_i(D(1)h)\\
&= 2\alpha_ie_ih + 2e_iD(h) - \left(e_i\sum_{k=1}^n \alpha_ke_k\right)h - e_i\left(\sum_{k=1}^n \alpha_ke_kh\right)\\
&= \alpha_ih + 2e_iD(h) - \alpha_ie_ih - e_i(\alpha_ie_ih + \alpha_je_jh)\\
&= \alpha_ih + 2e_iD(h) - \frac{1}{2}\alpha_ih - \frac{1}{2}e_i(\alpha_ih + \alpha_jh)\\
&= 2e_iD(h) + \frac{1}{2}\alpha_ih - \frac{1}{4}(\alpha_i + \alpha_j)h = 2e_iD(h) + \frac{1}{4}(\alpha_i - \alpha_j)h.\end{aligned}$$

С другой стороны, аналогично

$$D(h) = D(e_jh) = 2e_jD(h) + \frac{1}{4}(\alpha_j - \alpha_i)h$$

и, значит,

$$2e_iD(h) + \frac{1}{4}(\alpha_i - \alpha_j)h = 2e_jD(h) + \frac{1}{4}(\alpha_j - \alpha_i)h. \tag{12}$$

Разложим в прямую сумму пирсовских компонент:

$$D(h) = \sum_{k=1}^n h_s + \sum_{s\neq t} h_{st}, \quad h_s \in J_{ss},\ h_{st} \in J_{st},$$

тогда

$$e_iD(h) = h_i + \frac{1}{2}\sum_{s\neq i} h_{si}, \quad e_jD(h) = h_j + \frac{1}{2}\sum_{s\neq j} h_{sj}.$$

Подставляя в (12), имеем

$$2h_i + \sum_{s\neq i} h_{si} + \frac{1}{4}(\alpha_i - \alpha_j)h = 2h_j + \sum_{s\neq j} h_{sj} + \frac{1}{4}(\alpha_j - \alpha_i)h.$$

Так как это прямая сумма, т. е. h_i, h_{si} линейно независимы, равенство возможно только при полном покомпонентном совпадении из соответствующих подпространств. Тогда для составляющих из подпространства J_{ij} имеем равенство $h_{ij}+\frac{1}{4}(\alpha_i-\alpha_j)h = h_{ij}+\frac{1}{4}(\alpha_j-\alpha_i)h$, откуда $\alpha_i-\alpha_j = 0$. Так как i, j произвольные, то все $\alpha_i = \alpha_j = \alpha$.

Значит, $D(e_k) = \alpha e_k$ для всех $k = 1, \dots, n$. Перейдем к преобразованию $D' = D - \alpha I$, которое снова будет обобщенным дифференцированием. При этом $D'(1) = \sum\limits_{k=1}^n D'(e_k) = \sum\limits_{k=1}^n (D(e_k) - \alpha e_k) = 0$, т. е. $D' = D^0 \in \mathrm{Der}(J)$ — обычное дифференцирование алгебры J.

Итак, последовательно прибавляя к D на каждом шаге дифференцирования вида $D^0_{a,b}$ и скалярно-тождественное αI, получим в итоге обычное дифференцирование, а это и значит, что исходное преобразование D тривиально, $D = \alpha I + D^0$, $D^0 \in \mathrm{Der}(J)$. Теорема доказана.

Следствие 4. *Всякое тернарное дифференцирование конечномерной простой йордановой алгебры J над алгебраически замкнутым полем P тривиально, т. е. имеет вид* (5).

Доказательство. Пусть (D, F, G) — произвольное тернарное дифференцирование алгебры J. В силу леммы 3, а затем теоремы 4 главная компонента D тривиальна, $D = \alpha I + D^0$, где $\alpha \in P$ — скаляр, а $D^0 \in \mathrm{Der}(J)$ — обычное дифференцирование, и соответственно $D^0(1) = 0$. Кроме того, в лемме 3 показано, что $F = D - R_g$, $G = D - L_f$, где $f = F(1)$, $g = G(1)$, и в итоге $f = c + \lambda/2$, $g = c - \lambda/2$, где $c = D(1)/2 = \alpha/2$, а λ удовлетворяет равенству $(x, \lambda, y) = 0$ для любых $x, y \in J$, иначе говоря, $(J, \lambda, J) = 0$, откуда в силу [30] получаем $\lambda \in Z(J) = P$, т. е. λ — скаляр из поля P.

Значит, $f = (\alpha + \lambda)/2 \in P$, $g = (\alpha - \lambda)/2 \in P$ — скаляры из поля, и тогда

$$F = D - R_g = D - gI = \alpha I + D^0 - \frac{1}{2}(\alpha - \lambda)I = \frac{1}{2}(\alpha + \lambda)I + D^0,$$

$$G = D - L_f = D - fI = \alpha I + D^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \lambda)I = \frac{1}{2}(\alpha - \lambda)I + D^0.$$

Обозначив $(\alpha + \lambda)/2 = \beta$, $(\alpha - \lambda)/2 = \gamma$, получаем (5) для (D, F, G), при этом $\alpha = \beta + \gamma$. Таким образом,

$$T\operatorname{Der}(J) = \{(\alpha I + D^0, \beta I + D^0, \gamma I + D^0) \mid D^0 \in \operatorname{Der}(J),\ \alpha, \beta, \gamma \in P,\ \alpha = \beta + \gamma\}.$$

Распространим полученный результат на случай произвольного поля P.

Теорема 5. *Всякое тернарное* (*и соответственно обобщенное*) *дифференцирование конечномерной простой центральной йордановой алгебры J над произвольным полем P тривиально, т. е. имеет вид* (5) (*и соответственно вид* (6)).

Доказательство. Пусть J — йорданова алгебра над полем P, возьмем произвольно $\Delta = (D, F, G) \in T\operatorname{Der}(J)$. Существует конечное расширение K поля P такое, что в соответствующей над K расширенной алгебре $J_K = K \otimes J$ найдутся ортогональные идемпотенты $e_1, \dots, e_n$ такие, что $1 = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$ (тогда имеет место пирсовское разложение), при этом одноименные подпространства одномерны, т. е. $J_{ii} = P \cdot e_i$.

Рассмотрим тройку $\widetilde{\Delta} = (I \otimes D, I \otimes F, I \otimes G) = (\widetilde{D}, \widetilde{F}, \widetilde{G})$ расширенных на J_K отображений (очевидно, что тогда $\widetilde{\Delta} \in T\operatorname{Der}(J_K)$), здесь применим доказанный результат. Таким образом, тернарное дифференцирование $\widetilde{\Delta}$ тривиальное в J_K, т. е. $(\widetilde{D}, \widetilde{F}, \widetilde{G}) = (\alpha I + \widetilde{D}^0, \beta I + \widetilde{D}^0, \gamma I + \widetilde{D}^0)$, где $\widetilde{D}^0 \in \operatorname{Der}(J_K)$, а $\alpha = \beta + \gamma$ — скаляры из K.

Пусть $q_1 = 1,\ q_2, \dots, q_r$ — базис K над P, тогда имеет место разложение

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i q_i = \alpha_1 + \sum_{i \geq 2} \alpha_i q_i, \quad \alpha_i \in P;$$

$$\widetilde{D}^0 = \sum_{i=1}^{r} q_i \otimes D_i = 1 \otimes D_1 + \sum_{i \geq 2} q_i \otimes D_i, \quad \text{где } D_i \in \operatorname{End}(J).$$

Рассмотрим сужение $\widetilde{D} = I \otimes D$ на $J = 1 \otimes J$. Для любого $x \in J$ имеем $\widetilde{D}(x) = D(x) \in J$, т. е.

$$\begin{aligned} \alpha x + \widetilde{D}^0(x) &= \alpha_1 x + \sum_{i \geq 2} \alpha_i q_i \otimes x + D_1(x) + \sum_{i \geq 2} q_i \otimes D_i(x) \\ &= 1 \otimes (\alpha_1 x + D_1(x)) + \sum_{i \geq 2} q_i \otimes (\alpha_i x + D_i(x)) \in J, \end{aligned}$$

откуда в силу линейной независимости $q_1 = 1, q_2, \dots, q_r$ над J в $K \otimes_P J$ получаем, что $q_i \otimes (\alpha_i x + D_i(x)) = 0,\ i = 2, \dots, r$, и $D(x) = \alpha_1 x + D_1(x)$ для любого $x \in J$, где $\alpha_1 \in P$, $D_1 \in \operatorname{End}(J)$. Точно так же получим и

$$F(x) = \beta_1 x + D_1(x), \quad G(x) = \gamma_1 x + D_1(x) \quad \forall x \in J,$$

где $\beta_1, \gamma_1 \in P$. Остается показать, что $D_1 \in \mathrm{Der}(J)$ — дифференцирование в J.

Сначала отметим, что главная компонента D является обобщенным дифференцированием, а значит, и $D_1 = D - \alpha_1 I$ на J тоже является таковым. Для того чтобы D_1 было обычным дифференцированием, достаточно показать, что $D_1(1) = 0$. Действительно, в силу того, что $\widetilde{D}^0 \in \mathrm{Der}(J_K)$ — обычное дифференцирование,

$$0 = \widetilde{D}^0(1) = 1 \otimes D_1(1) + \sum_{i \geq 2} q_i \otimes D_i(1),$$

откуда снова в силу линейной независимости $q_1 = 1, q_2, \dots, q_r$ над J в $K \otimes_P J$ получаем, что $D_1(1) = D_i(1) = 0$. Таким образом, $D_1 \in \mathrm{Der}(J)$, и $D = \alpha_1 I + D_1$ тривиальное в J. Тогда и вся тройка $(D, F, G) = (\alpha_1 I + D_1, \beta_1 I + D_1, \gamma_1 I + D_1)$ имеет тривиальный вид, $\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Всякое тернарное* (*и соответственно обобщенное*) *дифференцирование сепарабельной йордановой алгебры J над произвольным полем P тривиально, т. е. имеет вид* (5) (*и соответственно вид* (6)), *где $\Phi = Z(J)$ — центр алгебры J.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 для ассоциативных алгебр.

Следствие 5. *Пусть J — йорданова сепарабельная алгебра над полем P. Предположим, что степени специальных простых компонент алгебры J не делятся на характеристику поля P. Тогда всякое тернарное дифференцирование алгебры J имеет вид*

$$\Big(\alpha I + \sum_i D^0_{a_i,b_i}, \beta I + \sum_i D^0_{a_i,b_i}, \gamma I + \sum_i D^0_{a_i,b_i}\Big), \quad \alpha = \beta + \gamma, \text{ где } \alpha, \beta, \gamma \in Z(J).$$

Доказательство. Как выяснили, любое тернарное дифференцирование в йордановой алгебре тривиальное вида (5), где D^0 — произвольное обычное дифференцирование, а $\alpha, \beta, \gamma \in Z(J)$. В силу сделанного предположения все обычные дифференцирования являются внутренними, и тогда $D^0 = \sum_i D^0_{a_i,b_i}$.

Также можно получить в качестве следствия теоремы 6 аналог результата из [17] для описания δ-дифференцирований йордановых алгебр.

Следствие 6. *В йордановой сепарабельной алгебре J над полем P существуют только тривиальные δ-дифференцирования.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 3 для ассоциативных алгебр.

В заключение автор выражает благодарность В. Н. Желябину за неоценимую помощь в работе, а также рецензенту за конструктивные замечания, позволившие улучшить изложение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schafer R. D.* Inner derivations of non-associative algebras // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V. 55, N 8. P. 769–776.
2. *Jacobson N.* Derivation algebras and multiplication algebras of semi-simple Jordan algebras // Ann. Math. 1949. V. 50, N 2. P. 866–874.
3. *Harris B.* Derivations of Jordan algebras // Pacific J. Math. 1959. V. 9. P. 495–512.
4. *McCrimmon K.* Malcev's theorem for alternative algebras // J. Algebra. 1974. V. 28. P. 484–495.

5. *Herstein I. N.* Jordan derivations of prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 1104–1110.
6. *Bresar M., Vukman J.* Jordan (θ, φ)-derivations // Glasnik Mat. 1991. V. 26. P. 13–17.
7. *Cusack J. M.* Jordan derivations on rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 53. P. 321–324.
8. *Lanski Ch.* Generalized derivations and nth power maps in rings // Comm. Algebra. 2007. V. 35, N 11. P. 3660–3672.
9. *Филиппов В. Т.* Об алгебрах Ли, удовлетворяющих тождеству 5-й степени // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 6. С. 681–705.
10. *Hopkins N. C.* Generalized derivations of nonassociative algebras // Nova J. Math. 1996. V. 5, N 3. P. 215–224.
11. *Филиппов В. Т.* О δ-дифференцированиях алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1409–1422.
12. *Филиппов В. Т.* О δ-дифференцированиях первичных алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 201–213.
13. *Филиппов В. Т.* О δ-дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 618–625.
14. *Zusmanovich P.* On δ-derivations of Lie algebras and superalgebras // J. Algebra. 2010. V. 324, N 12. P. 3470–3486.
15. *Кайгородов И. Б.* О δ-дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 585–605.
16. *Кайгородов И. Б.* О δ-дифференцированиях классических супералгебр Ли // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 3. С. 547–565.
17. *Кайгородов И. Б.* О δ-супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 2. С. 195–215.
18. *Желябин В. Н., Кайгородов И. Б.* О δ-супердифференцированиях простых супералгебр йордановой скобки // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23, № 4. С. 40–58.
19. *Кайгородов И. Б.* О δ-супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр // Мат. заметки. (Принято к печати) http://arxiv.org/abs/1106.2680.
20. *Bresar M.* On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations // Glasgow Math. J. 1991. V. 33, N 1. P. 89–93.
21. *Komatsu H., Nakajima A.* Generalized derivations of associative algebras // Quaest. Math. 2003. V. 26, N 2. P. 213–235.
22. *Komatsu H., Nakajima A.* Generalized derivations with invertible values // Comm. Algebra. 2004. V. 32, N 5. P. 1937–1944.
23. *Leger G., Luks E.* Generalized derivations of Lie algebras // J. Algebra. 2000. V. 228. P. 165–203.
24. *Zhang R., Zhang Y.* Generalized derivations of Lie superalgebras // Comm. Algebra. 2010. V. 38, N 10. P. 3737–3751.
25. *Jimenez-Gestal C., Perez-Izquierdo J. M.* Ternary derivations of generalized Cayley–Dickson algebras // Comm. Algebra. 2003. V. 31, N 10. P. 5071–5094.
26. *Schafer R. D.* An introduction to nonassociative algebras. New York: Acad. Press, 1966.
27. *Jimenez-Gestal C., Perez-Izquierdo J. M.* Ternary derivations of finite-dimensional real division algebras // Linear Algebra Appl. 2008. V. 428, N 8–9. P. 2192–2219.
28. *Perez-Izquierdo J. M.* Unital algebras, ternary derivations, and local triality // Algebras, representations and applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2009. P. 205–220. (Contemp. Math.; V. 483).
29. *Jacobson N.* Structure and representations of Jordan algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968. (Amer. Math. Soc. Coll. Publ.; V. XXXIX).
30. *McCrimmon K., Ng Seong Nam.* Middle nucleus=center in semiprime Jordan algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 86, N 1. P. 21–24.

Статья поступила 14 октября 2011 г.

Шестаков Алексей Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`shestalexy@mail.ru`