Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 512.540+510.5

О ПОЗИТИВНЫХ И КОНСТРУКТИВНЫХ ГРУППАХ

Н. Г. Хисамиев

Аннотация. Для группы с однозначной операцией извлечения корня (т. е. R-группы) дано достаточное условие существования позитивной (конструктивной) нумерации, относительно которой изолятор коммутанта вычислим. На основе его доказано, что R-группа, допускающая позитивную нумерацию, размерность коммутанта которой конечна, конструктивизируема. Получено необходимое и достаточное условие конструктивизируемости нильпотентной группы без кручения, размерность коммутанта которой конечна.

Ключевые слова: R-группа, позитивная (конструктивная) группа, позитивизируемая (конструктивизируемая) группа, коммутант, центр группы, размерность группы, вычислимо перечислимая (вычислимая) подгруппа.

Изучение конструктивных групп начато в [1], где А. И. Мальцев поставил общую задачу: «определить, какие конструктивные нумерации допускают те или иные абстрактно заданные группы». Конструктивные абелевы группы изучались в работах А. И. Мальцева, Ю. Л. Ершова, С. С. Гончарова, В. П. Добрицы, А. Т. Нуртазина, Н. Г. Хисамиева, Р. Доуни, Дж. Найт и других авторов. Конструктивные нильпотентные группы исследованы мало. Ю. Л. Ершов [2] доказал, что конструктивизация локально нильпотентной группы без кручения продолжается естественным образом до ее пополнения. В работе С. С. Гончарова, А. В. Молокова, Н. С. Романовского [3] построена нильпотентная группа, алгоритмическая размерность которой конечна. В работе В. А. Романькова, Н. Г. Хисамиева [4] доказано, что матричные группы $GL_n(K)$, $SL_n(K)$, $UT_n(V)$, $n \geq 3$, над коммутативным ассоциативным кольцом K с единицей конструктивизируемы тогда и только тогда, когда кольцо K конструктивизируемо. В [5] построен пример конструктивизируемой группы $GL_2(K)$ с неконструктивизируемым кольцом K. И. В. Латкин [6] построил пример позитивно нумерованной нильпотентной группы без кручения, которая неконструктивизируема. В [7–10] получены критерии существования позитивной (конструктивной) нумерации нильпотентной группы ступени 2.

В данной работе для группы с однозначной операцией извлечения корня (т. е. R-группы) дано достаточное условие существования у нее позитивной (конструктивной) нумерации, относительно которой изолятор коммутанта вычислим. На основе его доказано, что R-группа, допускающая позитивную нумерацию, размерность коммутанта которой конечна, конструктивизируема. Получено необходимое и достаточное условие конструтивизируемости нильпотентной группы без кручения, размерность коммутанта которой конечна.

Работа выполнена при финансовой поддержке научно-технических программ и проектов Комитетов науки МОН РК (грант N 0726/ГФ, 2012–2014.)

Все используемые, но не определенные понятия по теории конструктивных моделей можно найти в [11], а по теории групп — в [12]. Напомним лишь некоторые из них, часто употребляемые в данной работе.

Как обычно, ω обозначает множество всех натуральных чисел. Группа G называется *R-группой*, если для любых $x, y \in G$ и $n \in \omega$, $n > 0$, из $x^n = y^n$ следует $x = y$. Максимальная система линейно независимых элементов абелевой группы без кручения A называется ее *базисом*. Мощность базиса называется *размерностью* группы A и обозначается через $\dim A$. Будем говорить, что *размерность группы G конечна*, если существует субнормальный ряд с абелевыми секциями, все секции которого имеют конечную размерность. Центр группы G обозначается через $\mathbb{Z}(G)$, а коммутант — через G', $[x_1, \dots, x_n]$ — простые коммутаторы от $x_1, \dots, x_n$, т. е. $[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$. Множество всех элементов $x \in G$, некоторые степени которых принадлежат G', называется *изолятором коммутанта* и обозначается через $I(G')$.

Нумерацией группы G называется отображение $\nu : \omega \to G$ из ω на G. Пара (G, ν) называется *позитивной* (*конструктивной*), если множество $\{\langle n, m, s\rangle \mid \nu n \cdot \nu m = \nu s\}$ вычислимо перечислимо (вычислимо). Если группа G имеет позитивную (конструктивную) нумерацию, то будем говорить, что G *позитивизируема* (*конструктивизируема*). Если ν_1 и ν_2 — нумерации группы G и существует вычислимая функция $f(n)$ такая, что $\nu_1 n = \nu_2 f(n)$ для любого $n \in \omega$, то говорят, что ν_1 *m-сводится* к ν_2, и пишут $\nu_1 \le_m \nu_2$.

§ 1. Условие вычислимости подгруппы

Здесь дано достаточное условие вычислимости подгруппы, содержащей изолятор коммутанта позитивной (конструктивной) группы.

Теорема 1. *Пусть (G, ν) — позитивная (конструктивная) R-группа, B — ее вычислимо перечислимая подгруппа, G/B — абелева группа без кручения и размерность фактор-группы $\overline{G} = \mathbb{Z}(G)/\mathbb{Z}(G) \cap B$ центра группы $\mathbb{Z}(G)$ по $\mathbb{Z}(G) \cap B$ бесконечна. Тогда существует такая позитивная (конструктивная) нумерация ν^* группы G, что*

1) *подгруппа B вычислима в (G, ν^*);*

2) *существует такая вычислимо перечислимая система элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ в (G, ν^*), что смежные классы $\{g_i B\}$ образуют базис группы G/B.*

Доказательство проведем для случая позитивной группы (G, ν). Доказательство для случая конструктивной группы проще и аналогично. Пусть для группы (G, ν) и подгруппы B справедливы условия теоремы и $D^+_\nu(G) = \{\langle n, m\rangle, \langle n, m, s\rangle \mid \nu n = \nu m,\ \nu n \cdot \nu m = \nu s\}$. Множество $D^+_\nu(G)$ вычислимо перечислимо. Пусть $\{D^t \mid t \in \omega\}$ — сильно вычислимая возрастающая последовательность конечных множеств такая, что $\cup D^t = D^+_\nu(G)$ и $D^t_0 = \{n \mid \langle n, n\rangle \in D^t\}$. Будем говорить, что g_1 *t-равен* g_2 ($g_1 =_t g_2$), если $\langle n, m\rangle \in D^t$ и $\nu n = g_1$, $\nu m = g_2$ для некоторых n, m, или является следствием таких равенств из D^t; $g_1 \ne g_2$ означает, что для любого t неверно $g_1 =_t g_2$. В дальнейшем элемент $g \in G$ будем отождествлять с его номером.

Пусть $\{B^t \mid t \in \omega\}$ — сильно вычислимая последовательность конечных множеств такая, что

1) $\bigcup B^t = B$;

2) $\{x^\alpha \cdot y^\beta \mid x, y \in B^t,\ |\alpha|, |\beta| \le t\} \subseteq B^{t+1}$.

Пусть $\bar g = \{g_i \mid i < n\}$ — система элементов группы G и $n < t$. Тогда *t-оболочкой* системы $\bar g$ назовем множество $[\bar g]_t = \{x \mid x^\alpha =_t \prod g_i^{\alpha_i} b,\ b \in$

$B^t,\ |\alpha|, |\alpha_i| \le t,\ \alpha \ne 0\} \cup \{1\}$, где 1 — единица группы G. Нам нужна следующая

Лемма 1. *Пусть G — группа, $g_i, b_0, b_1 \in G$, $i < n \le t$, $t \in \omega \setminus \{0\}$ и $\xi = g_0^{\alpha_0} \dots g_{n-1}^{\alpha_{n-1}} b_0$, $\eta = g_0^{\beta_0} \dots g_{n-1}^{\beta_{n-1}} b_1$, $|\alpha_i|, |\beta_i| \le t$. Тогда существует вычислимая функция $f(t)$ такая, что*

(a) $f(t) < f(t+1)$, $f(t) \ge t^5 + 8$;

(b) $\xi \cdot \eta = g_0^{\alpha_0+\beta_0} \dots g_{n-1}^{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} c_0 \dots c_{f(t)-1} b_0 b_1$, *где* $c_p = [x_0, \dots, x_{k-1}]$ — *простые коммутаторы,* $x_s = g_i^{\varepsilon_i}$ *или* b_0, $s < k \le f(t)$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $p \le f(t)$;

(c) $f^m(t) + f(t) \le f^{m+1}(t)$, $m \ge 1$, *где* $f^0(t) \rightleftharpoons t$, $f^{m+1} \rightleftharpoons f(f^m(t))$.

Доказательство. Пусть F — свободная группа с порождающими $g_0, \dots, g_{n-1}, b_0, b_1$. Легко проверить, что существует вычислимая функция $\alpha(t)$, для которой справедливы (a) и (b). Положим $f(t) = 2^{\alpha(t)}$. Тогда для функции f также справедливы (a) и (b). Так как $f^{m+1}(t) = 2^{\alpha(f^m(t))} \ge 2^{f^m(t)}$, то $f^m(t) + f(t) \le 2f^m(t) \le 2^{f^m(t)} \le 2^{\alpha(f^m(t))} = f^{m+1}(t)$. $\square$

Определим следующую вычислимо перечислимую последовательность конечных множеств $\langle C_{\bar g}^{t,s} \mid s \in \omega \rangle$, положив

$$C_{\bar g}^{t,0} = B^t \cup \{[x,y]^\varepsilon \mid x, y \in [\bar g]_t,\ \varepsilon = \pm 1\},$$

$$\begin{aligned} C_{\bar g}^{t,s+1} = \big\{ y_0 \dots y_{f^{s+1}(t)-1} \mid y_p \in C_{\bar g}^{t,0} \cup \big\{ [x_0, \dots, x_{k-1}]^\varepsilon \mid x_j \in C_{\bar g}^{t,s},& \\ j < k \le f^{s+1}(t),\ \varepsilon = \pm 1 \big\},\ p < f^{s+1}(t) \big\}.& \end{aligned}$$

Систему $\bar g$ назовем *$\langle t, s\rangle$-независимой*, если из $\prod g_i^{\alpha_i} c =_t 1$ следует $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, где $c \in C_{\bar g}^{t,s}$, $|\alpha_i| \le t$.

Пусть G_0, G_1 — конечные подмодели группы G, $1 \in G_0, G_1$. Отображение $\varphi : G_0 \to G_1$ назовем *t-изоморфизмом*, если для любых g_0, g_1, g_2 справедливы соотношения

(a) $\varphi 1 = 1$;

(b) $g_0 g_1 =_t g_2 \Leftrightarrow \varphi g_0 \cdot \varphi g_1 =_t \varphi g_2$.

Назовем t-изоморфизм φ *сильным*, если для любого числа s, $0 < s \le t$, и элемента $g \in G_0$ выполнено условие

$$\exists x \in G_0 (x^s =_t g) \Leftrightarrow \exists x \in G_1 (x^s =_t \varphi g).$$

Лемма 2. $C_{\bar g}^{t,s+1} \supseteq C_{\bar g}^{t,s}$.

Доказательство непосредственно следует из определения множества $C_{\bar g}^{t,s}$ и неравенства $f^s(t) < f^{s+1}(t)$. $\square$

Лемма 3. *Существует вычислимая функция $g(t)$ такая, что для любых элементов $x, y \in G$ и числа $t \ge 1$ справедливо равенство $x^t y^t = (xy)^t c_0 \dots c_{g(t)-1}$, где $c_i = [z_0, \dots, z_{k-1}]$ — простые коммутаторы, $1 \le k \le g(t)$, $z_s = x, y$, $s < k$.*

Для полноты приведем доказательство. При $t = 1$ лемма очевидна. Перейдем от t к $t+1$. Тогда

$$\begin{aligned} x^{t+1} y^{t+1} = x \cdot x^t y \cdot y^t = xyx^t[x^t, y] y^t = xyx^t y [x^t, y][[x^t, y], y] y^{t-1}& \\ = \dots = xyx^t y^t c_{g(t)} \dots c_{g(t)+p-1},& \end{aligned}$$

где число p определяется эффективно по t и c_i — простые коммутаторы от x, y. Отсюда по индукционному предположению получаем требуемое. $\square$

Лемма 4. *Пусть даны элемент* $\xi = \prod (g_i a_i)^{\alpha_i} b$ *и число* β, $1 \leq \beta \leq t^4$, $b \in B^t$, $[g_i, a_j] = [x, a_j] = 1$, $x \in B^t$, $|\alpha_i| \leq t$, $i, j < n$. *Тогда*

$$\xi^\beta = \prod (g_i a_i)^{\alpha_i \beta} b_\beta, \quad b_\beta \in C_{\overline{ga}}^{t, 2(\beta-1)}, \quad \overline{ga} = \{g_i a_i\}. \tag{1}$$

Доказательство проведем индукцией по β. При $\beta = 1$ лемма очевидна. Пусть для β справедливо (1). Тогда

$$\xi^{\beta+1} = \xi^\beta \cdot \xi = \prod (g_i a_i)^{\alpha_i \beta} b_\beta \prod (g_i a_i) b. \tag{2}$$

Так как $|\alpha_i \beta| \leq t^5$, из (2) и леммы 1 следует, что

$$\xi^{\beta+1} = \prod (g_i a_i)^{\alpha_i (\beta+1)} c_0 \dots c_{f(t^5)-1} b_\beta b, \tag{3}$$

где $c_p = [x_0, \dots, x_{k-1}]$, $x_s = g_i^{\delta_i}$, b_β, $s < k \leq f(t^5)$, $p < f(t^5)$, $\delta_i = \pm 1$.

По п. (a) леммы 1 имеем $f(t^5) \leq f(f(t)) = f^2(t)$. Отсюда и из леммы 2 в силу $2(\beta - 1) \geq 2$ и индукционного предположения следует, что $x_s \in C_{\overline{ga}}^{t, 2(\beta-1)}$. Так как по п. (c) леммы 1 $f(t^5) + 2 \leq f^2(t) + f(t) \leq f^3(t)$ и $2\beta \geq 3$, то $b_{\beta+1} = c_0 \dots c_{f(t^5-1)} b_\beta b \in C_{\overline{ga}}^{t, 2\beta}$. Отсюда и из (3) получили требуемое. □

Лемма 5. *Пусть* $g_i, a_i \in G$, $[a_j, x] =_t 1$, $x \in B^t$, $i, j < n < t$, *и* $q \rightleftharpoons q(t)$ *— наименьшее число такое, что* $f^q(t) \geq \max\{2(t^2+1), g(t^3)+1\}$, *где функция* $g(t)$ *определена в лемме 3. Если для любой системы чисел* $\{k_i\}$, $0 < k_i \leq [t!]^2$, *системы элементов* $\bar{g} = \{g_i\}$ *и* $\left\{g_i a_i^{k_i}\right\}$ *являются* $\langle 3t^3, q\rangle$*-независимыми, то существует сильный* t*-изоморфизм* $\varphi : [\bar{g}]_t \to [\bar{g}']_t$ *такой, что* $\varphi g_i = g_i'$, $\varphi \restriction B^t = \mathrm{id}$, $\bar{g}' = \{g_i'\}$, $g_i' = g_i a_i^{[t!]^2}$.

Доказательство. Пусть $x \in [\bar{g}]_t$. Тогда существуют числа α, α_i и элемент $b \in B^t$ такие, что $|\alpha|, |\alpha_i| \leq t$, $\alpha \neq 0$ и

$$x^\alpha =_t \prod g_i^{\alpha_i} b. \tag{4}$$

Положим

$$\varphi x \rightleftharpoons x' = x \cdot \prod a_i^{\frac{\alpha_i l}{\alpha}}, \tag{5}$$

где $l = [t!]^2$. Из (4), (5) следует, что $x' \in [\bar{g}']_t$. Покажем, что φ определено корректно. Пусть

$$x^{\alpha'} =_t \prod g_i^{\alpha_i'} b', \tag{6}$$

где $|\alpha'|, |\alpha_i'| \leq t$, $\alpha' \neq 0$, $b' \in B^t$. Тогда

$$\varphi x \rightleftharpoons \tilde{x}' = x \cdot \prod a_i^{\frac{\alpha_i' l}{\alpha'}}. \tag{7}$$

Покажем, что $\tilde{x}' =_t x'$. Для этого возведем (4) в степень α', а (6) — в α и найдем выражение $x^{\alpha\alpha' - \alpha\alpha'} = 1$. По лемме 4

$$x^{\alpha\alpha'} = \left(\prod g_i^{\alpha_i} b\right)^{\alpha'} =_t \prod g_i^{\alpha\alpha'} b_{\alpha'}, \quad b_{\alpha'} \in C_{\bar{g}}^{t, 2(\alpha'-1)}. \tag{8}$$

Аналогично

$$x^{-\alpha\alpha'} =_t \prod g_i^{-\alpha'\alpha} b_\alpha', \quad b_\alpha' \in C_{\bar{g}}^{t, 2(\alpha-1)}. \tag{9}$$

По лемме 1 из (8), (9) следует, что

$$1 = x^{\alpha\alpha' - \alpha\alpha'} =_t \prod g_i^{\alpha_i \alpha' - \alpha_i' \alpha} b'', \tag{10}$$

где
$$b'' = c_0 \dots c_{f(t^2)-1} b_{\alpha'} b'_{\alpha}, \tag{11}$$
$c_p = [x_0, \dots, x_{k-1}]$, $x_s = g_i^{\varepsilon_i}, b_{\alpha'}$, $s < k \le f(t^2)$. Отсюда и из (8) вытекает, что $x_s \in C_{\bar g}^{t,2(t-1)}$. Так как $k < f(t^2) \le f^2(t)$, $2(t-1) < 2t$, $2t \ge 2$, то $c_p \in C_{\bar g}^{t,2t}$. Отсюда и из (11) в силу $f(t^2) + 2 \le f^3(t)$, $2t+1 \ge 3$ имеем $b'' \in C_{\bar g}^{t,2t+1}$. Из (10) и $\langle 3t^3, q\rangle$-независимости $\bar g$ в силу $q > 2t+1$ получим $\alpha_i\alpha' - \alpha'_i\alpha = 0$, т. е. $\frac{\alpha'_i}{\alpha} = \frac{\alpha_i}{\alpha'}$. Тогда из (5) и (7) вытекает $x' =_t \tilde x'$, т. е. φ определено корректно.

Покажем, что если $x' =_t 1$, то и $x =_t 1$. Действительно, пусть $x' = x \cdot \prod a_i^{\frac{\alpha_i l}{\alpha}} =_t 1$. Отсюда и из (4) имеем
$$(x')^\alpha = \prod g_i^{\alpha_i} b \cdot \prod a_i^{\alpha_i l} = \prod \bigl(g_i a_i^l\bigr)^{\alpha_i} b =_t 1.$$
Так как система $\{g_i a_i^l\}$ является $\langle 3t^3, q\rangle$-независимой, то $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, т. е. $b = 1$. Отсюда и из (4) имеем $x^\alpha =_t 1$. Поскольку G — R-группа, то $x =_t 1$.

Покажем, что φ является сильным t-изоморфизмом. Пусть
$$y^\beta =_t \prod g_i^{\beta_i} b', \tag{12}$$
$$(xy)^\gamma =_t \prod g_i^{\gamma_i} b'', \tag{13}$$
где $b', b'' \in B^t$, $|\beta|, |\gamma|, |\beta_i|, |\gamma_i| \le t$, $|\beta|, |\gamma| \ne 0$. Тогда
$$\varphi y \rightleftharpoons y' = y \cdot \prod a_i^{\frac{\beta_i l}{\beta}}, \tag{14}$$
$$(xy)' = xy \cdot \prod a_i^{\frac{\gamma_i l}{\gamma}}. \tag{15}$$
Из (5), (14) получим
$$x'y' = xy \cdot \prod a_i^{(\frac{\alpha_i}{\alpha} + \frac{\beta_i}{\beta})l}. \tag{16}$$
Нам нужно показать, что $x'y' =_t (xy)'$. Для этого возведем (4) в степень $\gamma\beta$, (12) — в $\gamma\alpha$, а равенство (13) — в $(-\alpha\beta)$ и найдем элемент
$$z = (xy)^{-\alpha\gamma\beta} \cdot x^{\alpha\gamma\beta} \cdot y^{\alpha\gamma\beta}. \tag{17}$$
По (4) и лемме 4
$$x^{\alpha\gamma\beta} =_t \Bigl(\prod g_i^{\alpha_i} b\Bigr)^{\gamma\beta} =_t \prod g_i^{\alpha_i\gamma\beta} b_{\gamma\beta}, \quad b_{\gamma\beta} \in C_{\bar g}^{t,2(t^2-1)}. \tag{18}$$
Аналогично
$$y^{\alpha\gamma\beta} =_t \prod g_i^{\beta_i\alpha\gamma} b_{\alpha\gamma}, \quad b_{\alpha\gamma} \in C_{\bar g}^{t,2(t^2-1)}, \tag{19}$$
$$(xy)^{-\alpha\beta\gamma} =_t \prod g_i^{-\gamma_i\alpha\beta} b_{\alpha\beta}, \quad b_{\alpha\beta} \in C_{\bar g}^{t,2(t^2-1)}. \tag{20}$$
Из (18), (19) по лемме 1 следует
$$x^{\alpha\gamma\beta} y^{\alpha\gamma\beta} =_t \prod g_i^{\alpha_i\gamma\beta + \beta_i\alpha\gamma} b_{xy}, \tag{21}$$
где $b_{xy} = c_0 \dots c_{f(t^3+1)-1} b_{\gamma\beta} b_{\alpha\gamma}$, $c_p = [x_0, \dots, x_{k-1}]^{\varepsilon_p}$, $x_s = g_i^{\delta_i}, b_{\gamma\beta}$, $s < k \le f(t^3+1)$. Отсюда $x_s \in C_{\bar g}^{t,2t^2} \subseteq C_{\bar g}^{t,2t^2+1}$. Так как $f(t^3+1)+2 \le f(f(t))+2 \le f^3(t)$ и $2(t^2+1) \ge 3$, то
$$b_{xy} \in C_{\bar g}^{t,2(t^2+1)}. \tag{22}$$

Из (17)–(22) по лемме 1 имеем

$$z =_t \prod g_i^{-\gamma_i\alpha\gamma} b_{\alpha\beta} \cdot \prod g_i^{\alpha_i\beta\gamma+\beta_i\alpha\gamma} b_{xy} = \prod g_i^{-\gamma_i\alpha\gamma+\alpha_i\beta\gamma+\beta_i\alpha\gamma} b_z, \tag{23}$$

где $b_z =_t c_0 \dots c_{f(2t^3+1)-1} b_{\alpha\beta} b_{xy}$, $c_p = [x_0, \dots, x_{k-1}]^{\varepsilon_p}$, $x_s = g_i^{\delta_i}, b_{\alpha\beta}$, $s < k \le f(2t^3+1) \le f^2(t)$, $x_s \in C_{\bar g}^{t,2(t^2-1)}$.

Так как $f(2t^3+1) + 2 \le f^3(t)$, $3 \le 2(t^2+1)$, то $b_z \in C_{\bar g}^{t,2(t^2+1)}$. По лемме 3 из (17) следует $z = (xy)^{-\alpha\gamma\beta} x^{\alpha\gamma\beta} y^{\alpha\gamma\beta} = d_0 \dots d_{g(t^3)-1}$, где $d_i = [z_0, \dots, z_{k-1}]$, $z_s = x, y$, $i, s < k \le g(t^3)$. Отсюда и из (23) имеем

$$1 = zz^{-1} =_t \prod g_i^{-\gamma_i\alpha\beta+\alpha_i\beta\gamma+\beta_i\alpha\gamma} \cdot d, \tag{24}$$

где $d = b_z \cdot d_{g(t^3)-1}^{-1} \dots d_0^{-1}$. Так как $f^q(t) \ge \max\{2(t^2+1), g(t^3)+1\}$, то $b_z, d \in C_{\bar g}^{t,q-1}$, следовательно, $d \in C_{\bar g}^{t,q}$. Тогда из (24) в силу $\langle 3t^3, q\rangle$-независимости системы $\bar g$ имеем $-\gamma_i\alpha\beta + \alpha_i\beta\gamma + \beta_i\alpha\gamma = 0$, т. е. $\frac{\alpha_i}{\alpha} + \frac{\beta_i}{\beta} = \frac{\gamma_i}{\gamma}$. Отсюда и из (15), (16) следует $(xy)' = x'y'$, т. е. φ является t-изоморфизмом.

Из определения φ непосредственно вытекает, что $\varphi b = b$ для $b \in B^t$. Пусть $x, y, y^\gamma \in [\bar g]_t$ и $y^\gamma =_t x$, $\gamma \le t$. Тогда $\varphi(y^\gamma) =_t (\varphi y)^\gamma =_t \varphi x$. Верно и обратное. Следовательно, φ — сильный t-изоморфизм. $\square$

В дальнейшем будем говорить, что система $\{g_i\}$ *t-независима*, если она $\langle 3t^3, q\rangle$-независима.

Лемма 6. *Для любых чисел n, t, $n < t$, и системы элементов $\{g_j \mid j < t\}$ можно эффективно найти τ и систему элементов $\{a_i\}$ такие, что $[a_i, g_j] =_\tau [a_i, a_k] =_\tau [a_i, x] =_\tau 1$, $x \in B^t$, $i, k < n$, и для любой системы чисел $\{k_i\}$, $k_i \le [t!]^2$, система элементов $\{g'_i\}$ t-независима, где $g'_i = g_i a_i^{k_i}$.*

Доказательство проведем индукцией по n. Пусть для $n < r$ лемма доказана. Рассмотрим систему элементов $\{g_i \mid i \le r\}$. По индукционному предположению можно найти требуемую систему $\{a_k \mid k < r\}$. Пусть $g'_k = g_k a_k$. Если для любой системы чисел $\{k_i\}$ система $\{g'_k\}, g_r$ t-независима, то положим $a_r = 1$.

В противном случае так как размерность фактор-группы $\mathbb{Z}(G)/\mathbb{Z}(G) \cap B$ бесконечна, существуют число τ и элемент $a \in D_0^\tau$ такие, что $[a, g_j] =_\tau [a, g'_k] =_\tau [a, x] =_\tau 1$, $x \in B^t$, и система $\{g'_k\}, a$ будет t-независимой. Выберем такие наименьшее τ и элемент a в D_0^τ с наименьшим ν-номером и положим $a_r = a$. Тогда система $\{g'_i\}, g'_r = g_r a$ искомая. $\square$

Приведем некоторые свойства системы элементов, необходимые в дальнейшем. Они непосредственно следуют из доказательства леммы 6.

Замечание 1. Если для любого $t > 0$ система элементов $\{g_i^t \mid i < n\}$ t-независима, то $a_i^t = 1$.

Замечание 2. Пусть k — наименьшее такое, что $a_k^t \ne_t 1$. Тогда система $\{g_i^t \mid i \le k\}$ t-зависима. В этом случае a_k^{t+1} определяется следующим образом. Находим наименьшее τ такое, что $[b, g_j^t] =_\tau [b, x] =_\tau 1$, $x \in B^t$, $j < t$, и система $\{g_s^t\}, b$ $(t+1)$-независима для некоторого элемента $b \in D_0^\tau$, $s < k$. Среди таких элементов b выбираем элемент a с наименьшим ν-номером и полагаем $a_k^{t+1} = a$.

Замечание 3. Если для некоторых чисел k, t система $\{g_j^t \mid j \le k\}$ t-зависима, то существует такой j, что $a_j^{t+1} \ne_{t+1} 1$.

Приступим к построению требуемой нумерации. Не умаляя общности, можно считать, что $\dim(G/B) = \omega$. Пусть R, S — вычислимые множества натуральных чисел такие, что $S \subseteq \overline{R}$, $|R| = |S|$, $\overline{R} \setminus S$ бесконечно. Далее пусть $S = \{s_i \mid i \in \omega\}$, $s_i < s_j$ при $i < j$. Нумерацию ν^* группы G построим по шагам t. Пусть сделаны t шагов, определена система элементов $\bar{g}^t = \left\{g_i^t \mid i < t\right\}$ и построена нумерация ${\nu^*}^t$ конечного множества G^t. При этом выполнено условие $B^t \cup \{x \mid \nu^{-1}x \leq t,\ x \in [\bar{g}^t]_t\} \subseteq G^t \subseteq [\bar{g}^t]_t$.

Шаг $t+1$. По лемме 6 для системы $\left\{g_i^t\right\}$, $i < t$, и для чисел $t, t+1$ находим систему элементов $\left\{a_i^{t+1}\right\}$ и положим $g_i' = g_i^t a_i^{[t!]^2}$. Затем эффективно находим наименьшее τ и элемент a из D_0^τ с наименьшим ν-номером такие, что система $\{g_i'\}, a$ $(t+1)$-независима, и полагаем $g_i^{t+1} = g_i'$, $g_t^{t+1} = a$, $\bar{g}^{t+1} = \left\{g_i', g_t^{t+1}\right\}$.

По лемме 5 существует сильный t-изоморфизм $\varphi : [\bar{g}^t]_t \to [\{g_i'\}]_t$. Теперь полагаем $G^{t+1} = B^{t+1} \cup \varphi G^t \cup \{x \mid \nu^{-1}x \leq t+1,\ x \in [\bar{g}^{t+1}]_{t+1}\}$.

Определим нумерацию ${\nu^*}^{t+1}$ множества G^{t+1} следующим образом.

1. Если $x \in \varphi_t G^t$, $\varphi_t y = x$, ${\nu^*}^t n = y$, то полагаем ${\nu^*}^{t+1} n = x$ и элемент y освобождаем от номера.

2. ${\nu^*}^{t+1} s_t = g_t^{t+1}$.

Пусть элемент $x \in G^{t+1}$ имеет наименьший ν-номер среди таких элементов G^{t+1}, которые еще не имеют ${\nu^*}^{t+1}$-номеров и $x^\alpha =_{t+1} \prod\left(g_i^{t+1}\right)^{\alpha_i} b$, $b \in B^{t+1}$, $i \leq t$, $|\alpha|, |\alpha_i| \leq t+1$. Тогда элементу x присваиваем ${\nu^*}^{t+1}$-номер следующим образом. Рассмотрим возможные случаи.

3a. Если $\sum|\alpha_i| = 0$, то полагаем ${\nu^*}^{t+1} r = x$, где r — наименьшее неиспользованное число из множества R, т. е. еще не является ${\nu^*}^{t+1}$-номером никакого элемента.

3b. Если $\sum|\alpha_i| \neq 0$, то полагаем ${\nu^*}^{t+1} n = x$, где n — наименьшее неиспользованное число из множества $\overline{R} \setminus S$.

Шаг $t+1$ закончен. Переходим к следующему шагу.

Покажем, что построенная нумерация требуемая. Для этого докажем следующие леммы.

Лемма 7. *Для любого i существует шаг t_i такой, что $g_i^t = g_i^{t_i}$ для любого $t \geq t_i$.*

Доказательство проведем индукцией по i. Пусть для $i < r$ лемма доказана и $i = r$, $t' = \max\{t_j \mid j < r\}$. Из замечания 3 следует, что для любого t система $\{g_j\}$ t-независима. Допустим, что элементы g_r^t, $t \geq t'$, бесконечно часто меняются. Так как по условию теоремы $\dim \mathbb{Z}(G)/\mathbb{Z}(G) \cap B = \omega$, существуют наименьшее τ и элемент $a \in D_0^\tau \cap \mathbb{Z}(G)$ такие, что система $\{g_j\}, a$ t-независима для любого t. Выберем такой элемент a с наименьшим ν-номером. Тогда для любого элемента $c \in \bigcup\left\{D_0^s \cap \mathbb{Z}(G) \mid s < \tau\right\} \cup \left\{x \in D_0^\tau \cap \mathbb{Z}(G) \mid \nu^{-1}x < \nu^{-1}a\right\}$ найдется шаг t_c такой, что система $\{g_j\}, c$ будет t_c-зависимой. Пусть $t_0 = \max\{t_c\}$. Тогда на некотором шаге $l \geq t_0$ верно $g_r^l = g_r^{l-1}[a^{l!}]^2$. Отсюда для любого $t \geq l$ верно $g_r^t = g_r^l$. Получим противоречие, что и доказывает лемму. $\square$

Для дальнейшего положим $g_i \rightleftharpoons g_i^{t_i}$.

Из определения элементов g_i^t непосредственно вытекает

Лемма 8. *Для любых r, t система $\left\{g_i^t \mid i < r\right\}$ $(t+1)$-зависит от $\left\{g_i^{t+1} \mid i < r\right\}$.*

Систему элементов $\{h_i \mid i < n\}$ группы G назовем *независимой*, если для любого t она t-независима.

Лемма 9. *Смежные классы $\{g_iB \mid i \in \omega\}$ образуют базис фактор-группы G/B.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда существуют наименьшее τ и элемент $x \in D_0^\tau$ такие, что система $\{g_iB \mid i \in \omega\}, xB$ независима. Через a обозначим такой элемент x с наименьшим ν-номером. Тогда найдутся число r и шаг t' такие, что все элементы множества $\bigcup\{D_0^t \mid t < \tau\} \cup \{x \in D_0^\tau \mid \nu^{-1}x < \nu^{-1}a\}$ t'-зависят от системы $\{g_j \mid j \leq r\}$ и $t' \geq \max\{t_j, r\}$. Пусть s — наибольшее число k такое, что $k < t'$ и элементы $g_0^{t'}, \dots, g_k^{t'}$ не меняются в дальнейшем. Очевидно, что $s \geq r$. Если $s = t' - 1$, то по построению $g_{t'}^{t'+1} = a$. Отсюда имеем $g_{t'} = a$; противоречие.

Поэтому $s < t' - 1$. Тогда на некотором шаге $l + 1 \geq t' + 1$ элемент $g_{s+1}^{t'+1}$ меняется. Пусть l — наименьший такой шаг. Рассмотрим возможные случаи.

1. $g_{s+1}^{l+1} = g_{s+1}^l a$. Тогда по замечанию 2 элемент g_{s+1}^l $(l+1)$-зависит от $\bar g = \{g_0, \dots, g_s\}$. Отсюда и из условия на элемент a следует, что g_{s+1}^{l+1} не зависит от $\bar g$. По замечанию 1 имеем $g_{s+1} = g_{s+1}^l a$. Поэтому элемент a зависит от $\bar g, g_{s+1}$; противоречие.

2. Случай 1 не выполняется. Тогда по построению верно хотя бы одно из следующих неравенств: $[g_i, a] \neq_\tau 1$, $[a_i, a] \neq_\tau 1$, $[a_i, x] \neq_\tau 1$ для некоторых $i < l$, $x \in B^{l+1}$, где τ определяется по замечанию 2. Тогда для любого k, $s < k < l$, верно $g_k^{l+1} \neq_{l+1} g_k^l a$. Поэтому $g_l^{l+1} = a$. Пусть m — шаг такой, что $m \geq t'$ и $g_k^m = g_k$ для любого k. Если $g_l^m = a$, то $g_l = g_l^m = a$; противоречие.

Поэтому на некотором шаге p, $t' < p < m$, верно $g_k^{p+1} = g_k^p a$. Пусть p_0 — наибольший шаг такой, что $g_{k_0}^{p_0+1} = g_{k_0}^{p_0} a$, $t' < p_0 < m$, $s < k_0 < l$ для некоторого k_0. Тогда для любых $i < k_0$ и $t \geq p_0$ верно $g_i^{t+1} \neq g_i^t a$. Пусть t_0 — шаг такой, что $g_i^{t_0} = g_i$ для любого $i < k_0$. Так как по лемме 8 $g_{k_0}^{p_0+1}$ зависит от $\{g_0, \dots, g_{k_0}\}$, элемент a зависит от $\{g_0, \dots, g_{k_0}\}$; противоречие. $\square$

Лемма 10. *Отображение ν^* является нумерацией группы G.*

Доказательство. Покажем, что для любого элемента $x \in G$ существуют шаг t_x и число m_x такие, что $\forall t \geq t_x(\nu^{*^t} m_x =_t \nu^{*^{t_x}} m_x =_{t_x} x)$. По лемме 9 для x найдутся числа s, α, α_i, $i < s$, и элемент $b \in B$ такие, что $x^\alpha = \prod\limits_{i<s} g_i^{\alpha_i} b$.

Пусть t_x — шаг такой, что $t_x \geq \max\{t_i \mid i < s\}$, $b \in B^{t_x}$, $|\alpha|, |\alpha_i| \leq t_x$, $\nu^{-1}x \leq t_x$ и $x^\alpha =_{t_x} \prod g_i^{\alpha_i} b$. Тогда $x \in G^{t_x+1}$. Отсюда для некоторого числа m_x верно $\nu^{*^{t_x+1}} m_x = x$. Так как $\varphi_t g_i = g_i$, $\varphi_t b = b$ для любого $t \geq t_x + 1$, из построения нумерации ν^{*^t} следует, что $\nu^{*^t} m_x =_t \nu^{*^{t_x+1}} m_x =_{t_x} x$ для любого $t \geq t_x + 1$. Аналогично доказывается, что для любого n существует $\lim\limits_t \nu^{*^t} n$. $\square$

Для дальнейшего положим $\nu^* n = \lim\limits_t \nu^{*^t} n$. Из леммы 10 и определения нумерации ν^* вытекает

Лемма 11. *Элемент g_i имеет номер ν^*-номер s_i.*

Лемма 12. *Справедливо равенство $\nu^{*^{-1}} B = R$.*

Доказательство. Пусть $b \in B$. Докажем, что для некоторого $r \in R$ верно $\nu^* r = b$. По лемме 10 существуют такие числа e и r, что $\forall t \geq e(\nu^{*^t} r = \nu^{*^e} r = b)$. Пусть e — наименьший такой шаг. Рассмотрим отдельно случаи из определения нумерации ν^{*^e} на шаге e. Пусть имеет место случай 1, т. е. $b \in \varphi_{e-1} G^{e-1}$,

$\varphi_{e-1}y = b$, $y \in G^{e-1}$. Тогда существуют числа α, α_i, $i < e-1$, и элемент $b' \in B^{e-1}$ такие, что $|\alpha|, |\alpha_i| \leq e-1$, $\alpha \neq 0$ и $y^\alpha = \prod\bigl(g_i^{e-1}\bigr)^{\alpha_i} b'$. Тогда $(\varphi_{e_1}y)^\alpha = \prod\bigl(g_i^{e}\bigr)^{\alpha_i} b'$.

Если $\sum|\alpha_i| \neq 0$, то на некотором шаге $s > e$ обнаружится s-зависимость $\{g_i^e\}$ и номер элемента b изменится, что противоречит выбору e. Поэтому $\sum|\alpha_i| = 0$. Тогда имеет место случай 3а в построении нумерации ν^* и $r \in R$. Аналогично доказывается и случай 2.

Из построения непосредственно следует, что для любого $r \in R$ существует шаг e такой, что ${\nu^*}^e r \in B$ и $\forall t \geq e({\nu^*}^t r = b)$. $\square$

Лемма 13. (G, ν^*) — *позитивная группа.*

Доказательство. Через D_t^+, D^+ обозначим соответственно позитивные диаграммы моделей $\langle (G^t, {\nu^*}^t), \cdot, 1\rangle$, $\langle (G, \nu^*), \cdot, 1\rangle$, $t \in \omega$, т. е. например, $D_t^+ = \{xy = z \mid x, y, z \in G^t\}$. Из построения нумерации ${\nu^*}^t$ следует, что для любого числа $m \in \delta{\nu^*}^t$ верно ${\nu^*}^{t+1} m =_{t+1} \varphi_t {\nu^*}^t m$, поэтому $D_t^+ \subseteq D_{t+1}^+$. По определению нумерации ν^* имеем $D^+ = \bigcup D_t^+$. Так как (G, ν) — позитивно нумерованная группа, $\{D_t^+\}$ — возрастающая вычислимо перечислимая последовательность конечных множеств. Следовательно, множество D^+ вычислимо перечислимо, т. е. (G, ν^*) — позитивно нумерованная группа. $\square$

Из лемм 7–13 непосредственно следует, что нумерация ν^* требуемая. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Пусть (G, ν) — позитивная (конструктивная) R-группа и размерность фактор-группы $\overline{G} = \mathbb{Z}(G)/\mathbb{Z}(G) \cap I(G')$ центра $\mathbb{Z}(G)$ по изолятору коммутанта бесконечна. Тогда существует такая позитивная (конструктивная) нумерация ν^* группы G, что*

1) *подгруппа $I(G')$ вычислима в (G, ν^*);*

2) *существует такая вычислимо перечислимая система элементов $\{g_i\}$ в (G, ν^*), что смежные классы $\{g_i I(G')\}$ образуют базис группы $\overline{G}$.*

Следствие 2. *Для любой позитивной (конструктивной) R-группы (G, ν) существуют позитивная (конструктивная) группа (G_*, ν_*) и вычислимый изоморфизм $\varphi : (G, \nu) \to (G_*, \nu_*)$ такие, что*

1) $\varphi(G') = G'_*$;

2) *подгруппа $I(G'_*) = I(\varphi(G'))$ вычислима в (G_*, ν_*);*

3) *существует такая вычислимо перечислимая система элементов $\{g_i^*\}$ в (G_*, ν_*), что смежные классы $\{g_i^* I(G'_*)\}$ образуют базис группы $G_*/I(G'_*)$.*

Действительно, пусть (G_i, ν_i), $i \in \omega$, — бесконечная циклическая группа с естественной нумерацией и $(A, \mu) = \oplus\{(G_i, \nu_i)\}$, $(G_*, \nu_*) = (G, \nu) \times (A, \mu)$. Тогда группа (G_*, ν_*) и естественное вложение $\varphi : (G, \nu) \to (G_*, \nu_*)$ требуемые. $\square$

Замечание 4. Если группа G в следствии 2 разрешимая или нильпотентная ступени n, то таковой является и G_*.

§ 2. Вычислимые расширения групп

Здесь даны необходимые и достаточные условия позитивизируемости (конструктивизируемости) некоторых классов R-групп.

Пусть даны группы N и H, $N \cap H = \{1\}$, двуместная функция $f : H \times H \to N$, автоморфизмы $\varphi_u : N \to N$, $u \in H$, такие, что для любых $a \in N$ и $u, v, w \in H$ справедливы соотношения

1^0) $\varphi_v(\varphi_u(a)) = f^{-1}(u, v)\varphi_{uv}(a) f(u, v)$;

2^0) $f(uv,w)\cdot\varphi_w(f(u,v)) = f(u,vw)f(u,w)$;
3^0) $f(1,1)=1$.

По ним определим группу G следующим генетическим кодом:

$$G = gr(\{ua \mid u\in H,\ a\in N\} \mid\mid ua\cdot vb = uv\cdot f(u,v)\varphi_v(a)b).$$

Группа G называется *расширением* N *посредством* H, системой факторов f и последовательностью Φ автоморфизмов $\langle\varphi_u \mid u\in H\rangle$ и обозначается через $E(N,H,f,\Phi)$.

Если $\varphi_u(a)=a$ для любых $a\in N$, $u\in H$, то расширение G называется *центральным* и обозначается через $EZ(N,H,f)$.

Из этих определений непосредственно следует

Предложение 1. *Если (N,α) и (H,β) — позитивно (конструктивно) нумерованные группы и система факторов f и последовательность автоморфизмов $\langle\varphi_n \rightleftharpoons \varphi_{\beta n}\rangle$ вычислимы, то нумерация γ группы G, где $\gamma n = \beta r\cdot\alpha s$, если n — номер пары $\langle r,s\rangle$, будет позитивной (конструктивной) и естественный гомоморфизм $g:(G,\gamma)\to(H,\beta)$ вычислим.*

Пару (G,γ) обозначим через $E((N,\alpha),(H,\beta),f,\Phi)$ и назовем *вычислимым* расширением группы (N,α) посредством (H,β), системой факторов f и последовательностью автоморфизмов $\Phi=\langle\varphi_n \mid n\in\omega\rangle$.

Предложение 2. *Пусть (G,ν) — позитивная (конструктивная) группа и N — ее вычислимая подгруппа. Тогда существуют позитивные (конструктивные) нумерации $\alpha\le_m\nu$ и $\beta\le_m\nu$ соответственно групп N и $H=G/N$ и вычислимая система факторов $f:(H,\beta)\times(H,\beta)\to(N,\alpha)$ и вычислимая последовательность автоморфизмов $\langle\varphi_n:(N,\alpha)\to(N,\alpha)\mid n\in\omega\rangle$ такие, что (G,ν) вычислимо изоморфна $E((N,\alpha),(H,\beta),f,\Phi)$.*

Доказательство. Введем вычислимо перечислимое множество представителей $\{\bar u_i \mid i\in\omega\}$ смежных классов $\{xN \mid x\in G\}$ следующим образом. Представителем единичного класса N считаем единицу 1 группы G. Пусть представители $\bar u_0,\dots,\bar u_{n-1}$ уже выбраны и νm_n — элемент с наименьшим ν-номером такой, что для всех $i<n$ верно $\nu m_n\cdot\bar u_i^{-1}\notin N$. Если $\bar u_i\cdot\nu m_n\in N$ для некоторого $i<n$, то полагаем $\bar u_n=\nu m_n{}^{-1}$. Если же это не так, то $\bar u_n\rightleftharpoons\nu m_n$. На множестве $H=\{u_i\}$ введем операцию умножения $\circ$, положив $u_i\circ u_j=u_k\Leftrightarrow\bar u_i\bar u_j\bar u_k^{-1}\in N$. Тогда группа $H=\langle\{u_i\},\circ\rangle$ изоморфна группе G/N.

Определим систему факторов f, положив $f(u_i,u_j)=\bar u_k^{-1}\bar u_i\bar u_j\Leftrightarrow u_i\circ u_j=u_k$. Для любого $u_n\in H$ определим автоморфизм φ_n, положив $\varphi_n(a)=\bar u_n^{-1}a\bar u_n$.

Легко проверить, что естественные нумерации α и β соответственно групп N и H, определенные по ν, будут позитивными (конструктивными), а системы факторов f и последовательность автоморфизмов $\langle\varphi_n \mid n\in\omega\rangle$ — вычислимыми, для них справедливы условия 1^0—3^0 и группа (G,ν) вычислимо изоморфна $E((N,\alpha),(H,\beta),f,\Phi)$. $\square$

Теорема 2. *Пусть G — нильпотентная группа без кручения ступени s такая, что размерность фактор-групп $\mathbb{Z}(G)/\mathbb{Z}(G)\cap I(G')$ центра $\mathbb{Z}(G)$ группы G по изолятору коммутанта $I(G')$ бесконечна. Тогда группа G позитивизируема (конструктивизируема), если и только если существуют позитивная (конструктивная) абелева группа без кручения (A,β) и позитивная (конструктивная) нильпотентная группа без кручения (N,α) ступени $s-1$, вычислимая система факторов f из (A,β) в (N,α) и вычислимая последовательность автоморфизмом $\langle\varphi_n \mid n\in\omega\rangle$ группы N такие, что G изоморфна $E((N,\alpha),(A,\beta),f,\Phi)$.*

Доказательство. Достаточность следует из предложения 1. Пусть (G, ν) — позитивно нумерованная группа. Тогда подгруппа $I(G')$ вычислимо перечислима в (G, ν) и фактор-группа $G/I(G')$ абелева без кручения. Отсюда и из теоремы 1 следует существование такой конструктивизации ν^* группы G, что подгруппа $I(G')$ вычислима в (G, ν^*), и по предложению 2 получаем требуемое. $\square$

Теорема 3. *Пусть (G, ν) — позитивная (конструктивная) R-группа и $\dim(\mathbb{Z}(G) \cap G') < \omega$. Тогда имеет место одна из следующих альтернатив.*

1. *Центр $\mathbb{Z}(G)$ вычислимо перечислим (вычислим) в (G, ν).*

2. *Существует такая позитивная (конструктивная) нумерация ν^* группы G, что*

a) *изолятор $I(G')$ вычислим в (G, ν^*);*

b) *существует вычислимо перечислимая система элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ в (G, ν^*), $I \subseteq \omega$, такая, что смежные классы $\{g_i I(G')\}$ образуют базис группы $G/I(G')$.*

Доказательство. Рассмотрим следующие возможности.

(A) $\dim \mathbb{Z}(G)/\mathbb{Z}(G) \cap I(G') < \omega$. Тогда из условий теоремы следует, что $\dim \mathbb{Z}(G) < \omega$. Если (G, ν) — позитивно нумерованная группа, то центр $\mathbb{Z}(G)$ вычислимо перечислим в (G, ν). Если же (G, ν) — конструктивная группа, то центр $\mathbb{Z}(G)$ вычислим в (G, ν).

(B) $\dim \mathbb{Z}(G)/\mathbb{Z}(G) \cap I(G') = \omega$. Тогда по теореме 1 получаем справедливость второй альтернативы. $\square$

Следствие 3. *Пусть G — R-группа и $\dim(\mathbb{Z}(G) \cap G') < \omega$. Тогда группа G конструктивизируема, если и только если справедлива одна из следующих возможностей.*

1. *Существуют такие конструктивные нумерации α и β соответственно групп $\mathbb{Z}(G)$ и $H = G/\mathbb{Z}(G)$ и вычислимая система факторов f из H в $\mathbb{Z}(G)$, что G изоморфна вычислимому центральному расширению $EZ((\mathbb{Z}(G), \alpha), (H, \beta), f)$.*

2. *Существуют такие конструктивные нумерации α и β соответственно групп $I(G')$ и $H = G/I(G')$, вычислимая система факторов f из H в $I(G')$ и вычислимая последовательность автоморфизмов $\langle \varphi_n \mid n \in \omega \rangle$, что G изоморфна вычислимому расширению $E((I(G'), \alpha), (H, \beta), f, \Phi)$.*

Доказательство следует из теоремы 3 и предложения 2. $\square$

Аналогично доказывается

Следствие 4. *Пусть G — позитивизируемая R-группа и $\dim(\mathbb{Z}(G) \cap G') < \omega$. Тогда справедлива одна из следующих возможностей.*

1. *Центр $\mathbb{Z}(G)$ и фактор-группа $G/\mathbb{Z}(G)$ имеют позитивные нумерации $\alpha \leq_m \nu$ и $\beta \leq_m \nu$ соответственно.*

2. *Существуют позитивные нумерации α и β соответственно групп $I(G')$ и $H = G/I(G')$, вычислимая система факторов f из H в $I(G')$ и вычислимая последовательность автоморфизмов $\langle \varphi_n \mid n \in \omega \rangle$ такие, что G изоморфна вычислимому расширению $E((I(G'), \alpha), (H, \beta), f, \Phi)$.*

Предложение 3. *Пусть (G, ν) — позитивная группа и существует ее субнормальный ряд*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_{n-1} \supset G_n = 1$$

такой, что для любого $i < n$ справедливы следующие утверждения:

a) *секция* $\overline{G}_i = G_i/G_{i+1}$ *абелева без кручения;*

b) *существует вычислимо перечислимая последовательность элементов* $\langle g_{ik} \mid k \le \omega\rangle$ *в* G_i *такая, что смежные классы* $\{g_{ik}G_{i+1}\}$ *образуют базис группы* $\overline{G}_i$.

Тогда (G,ν) — *конструктивная группа.*

Доказательство. Так как (G,ν) — позитивная группа, достаточно доказать, что множество $A = \{n \mid \nu n \ne 1\}$ вычислимо перечислимо. Легко проверить, что подгруппы G_i вычислимо перечислимы. Справедлива эквивалентность

$$\nu n \ne 1 \Leftrightarrow \exists i < n\, \exists s\, \exists \alpha\, \exists \alpha_0 \dots \exists \alpha_{s-1}$$
$$\exists b \in G_{i+1}\Big(\nu n^{\alpha} = g_{i0}^{\alpha_0} \dots g_{is-1}^{\alpha_{s-1}} b \,\&\, \alpha \ne 0 \,\&\, \sum |\alpha_i| \ne 0\Big).$$

Отсюда следует вычислимая перечислимость множества A. □

Теорема 4 [7]. *Нильпотентная группа без кручения* G *ступени* 2 *конструктивизируема тогда и только тогда, когда существуют конструктивные абелевы группы без кручения* (A,α) *и* (B,β) *и вычислимая система факторов* f *из* B *в* A *такие, что* G *изоморфно центральному расширению* $EZ((A,\alpha),(B,\beta),f)$.

Доказательство. Достаточность следует из предложения 1. Докажем необходимость. Пусть (G,ν) — конструктивная группа. Тогда $I(G') \subseteq \mathbb{Z}(G)$. Рассмотрим следующие возможности.

1. $\dim \mathbb{Z}(G)/\mathbb{Z}(G) \cap I(G') < \omega$. Тогда центр $\mathbb{Z}(G)$ вычислимо перечислим в (G,ν), а следовательно, вычислим. Отсюда по предложению 2 получаем требуемое.

2. $\dim \mathbb{Z}(G)/\mathbb{Z}(G) \cap I(G') = \omega$. Тогда по теореме 1 существует конструктивная нумерация ν^* группы G такая, что подгруппа $I(G')$ вычислима в (G,ν^*). □

Лемма 14. *Пусть* (G,ν) — *позитивная группа и размерности подгрупп* G' *и* $\mathbb{Z}(G)$ *конечны. Тогда центр* $\mathbb{Z}(G)$ *вычислим в* (G,ν).

Доказательство. Пусть $a_0,\dots,a_{m-1}$ — база центра $\mathbb{Z}(G)$. Тогда справедлива эквивалентность

$$x \ne 1 \,\&\, x \in \mathbb{Z}(G) \Leftrightarrow \exists \alpha\, \exists \alpha_0 \dots \exists \alpha_{m-1}\Big(x^{\alpha} = a_0^{\alpha_0} \dots a_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \,\&\, \alpha \ne 0 \,\&\, \sum |\alpha_i| \ne 0\Big).$$

Отсюда центр $\mathbb{Z}(G)$ вычислимо перечислим в (G,ν).

Подгруппа G' вычислимо перечислима в (G,ν), следовательно, существует ее позитивная нумерация μ и $\mu \le_m \nu$. Для (G',μ) справедливы все условия предложения 3, поэтому (G',μ) — конструктивная группа. Тогда из эквивалентности

$$x \notin \mathbb{Z}(G) \Leftrightarrow \exists y([x,y] \ne 1)$$

следует, что множество $G \setminus \mathbb{Z}(G)$ вычислимо перечислимо в (G,ν), т. е. $\mathbb{Z}(G)$ вычислим. □

Лемма 15. *Пусть* (G,ν) — *позитивная группа и существует вычислимая подгруппа* B *в* (G,ν) *такая, что множество* $S = \{n \in \nu^{-1}B \mid \nu n = 1\}$ *вычислимо. Тогда* (G,ν) — *конструктивная группа.*

Действительно, множество $R = \{n \mid \nu n \ne 1\} = \{n \notin \nu^{-1}B\} \cup \{n \in \nu^{-1}B \mid \nu n \ne 1\}$ вычислимо. Отсюда и из позитивной определенности (G,ν) следует, что (G,ν) — конструктивная группа. □

Предложение 4. *Позитивная группа (G,ν), размерности подгрупп G' и $\mathbb{Z}(G)$ которой конечны, конструктивна.*

Действительно, по лемме 14 центр $\mathbb{Z}(G)$ вычислим в (G,ν), следовательно, существует его нумерация $\beta \leq_m \nu$. По предложению 3 $(\mathbb{Z}(G),\beta)$ — конструктивная группа. Отсюда и из леммы 15 получаем требуемое. $\square$

Теорема 5. *Позитивизируемая R-группа G, размерность коммутанта G' которой конечна, конструктивизируема.*

Доказательство. Пусть (G,ν) — позитивная группа. Рассмотрим следующие возможности.

1. $\dim \mathbb{Z}(G)/\mathbb{Z}(G) \cap I(G') < \omega$. Тогда $\dim \mathbb{Z}(G) < \omega$ и по предложению 4 (G,ν) — конструктивная группа.

2. $\dim \mathbb{Z}(G)/\mathbb{Z}(G) \cap I(G') = \omega$. Тогда по теореме 1 существует позитивная нумерация ν^* группы G такая, что подгруппа $I(G')$ вычислима в (G,ν^*), и существует вычислимая система элементов $\{g_i\}$ в (G,ν^*) такая, что смежные классы $\{g_i I(G')\}$ образуют базис фактор-группы $\overline{G}$. Отсюда по предложению 2 существуют позитивные нумерации $\alpha \leq_n \nu^*$, $\beta \leq_n \nu^*$ соответственно групп $I(G')$ и $\overline{G}$, вычислимая система факторов f из $(\overline{G},\beta)$ в $(I(G'),\alpha)$ и вычислимая последовательность автоморфизмов $\langle \varphi_n \mid n \in \omega\rangle$ группы $(I(G'),\alpha)$ такие, что (G,ν^*) вычислимо изоморфна $E((I(G'),\alpha),(\overline{G},\beta),f,\Phi)$. Так как $\dim I(G') < \omega$, а в $(\overline{G},\beta)$ существует вычислимо перечислимый базис, по предложению 3 группы $(I(G'),\alpha)$ и $(\overline{G},\beta)$ конструктивны. Отсюда по предложению 1 (G,ν^*) — конструктивная группа. $\square$

Следствие 5. *Рекурсивно перечислимо определенная упорядочиваемая группа, размерность коммутанта которой конечна, конструктивизируема.*

Следствие 6. *Рекурсивно перечислимо определенная нильпотентная группа без кручения, размерность коммутанта которой конечна, конструктивизируема.*

И. В. Латкин [6] доказал существование неконструктивизируемой рекурсивно перечислимо определенной нильпотентной группы без кручения ступени 2.

Следствие 7 [10]. *Рекурсивно перечислимо определенная абелева группа без кручения конструктивизируема.*

Это следствие положительно отвечает на вопрос, поставленный в [13].

Следствие 8. *Нильпотентная группа без кручения G ступени s, размерность коммутанта которой конечна, конструктивизируема, если и только если существуют конструктивные нильпотентные группы без кручения (N,α) и (H,β) ступеней, меньших s, одна из которых абелева, вычислимая система факторов f из (H,β) в (N,α) и вычислимая последовательность автоморфизмов $\langle \varphi_n \mid n \in \omega\rangle$ такие, что G изоморфна вычислимому расширению $E((N,\alpha),(H,\beta),f,\Phi)$.*

Достаточность следует из предложения 1. Докажем необходимость. Пусть (G,ν) — конструктивная группа. Рассмотрим следующие возможности.

1. $\dim \mathbb{Z}(G)/\mathbb{Z}(G) \cap I(G') < \omega$. Тогда центр $\mathbb{Z}(G)$ вычислимо перечислим, а следовательно, по предложению 2 получаем требуемое.

2. $\dim \mathbb{Z}(G)/\mathbb{Z}(G) \cap I(G') = \omega$. Тогда по теореме 2 получаем требуемое. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* О рекурсивных абелевых группах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 46, № 4. С. 1009–1012.
2. *Ершов Ю. Л.* Существование конструктивизаций // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 5. С. 1041–1044.
3. *Гончаров С. С., Молоков А. В., Романовский Н. С.* Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 82–88.
4. *Романьков В. А., Хисамиев Н. Г.* О конструктивных матричных и упорядоченных группах // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 353–363.
5. *Романьков В. А., Хисамиев Н. Г.* О конструктивных матричных группах // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 5. С. 603–613.
6. *Латкин И. В.* Арифметическая иерархия нильпотентных групп без кручения // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 3. С. 308–313.
7. *Хисамиев Н. Г.* О конструктивных нильпотентных группах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 214–223.
8. *Хисамиев Н. Г.* Позитивно определенные нильпотентные группы // Мат. журн., г. Алматы. 2007. Т. 24, № 2. С. 95–102.
9. *Хисамиев Н. Г.* О конструктивных нильпотентных R_p-группах без кручения // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 1. С. 222–230.
10. *Хисамиев Н. Г.* Иерархии абелевых групп без кручения // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 2. С. 205–226.
11. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Науч. кн., 1996.
12. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. Л.* Основы теории групп. М.: Наука, 1996.
13. *Baumslag G., Dyer E., Miller C.* On the homology of finitely presented groups // Topology. 1983. V. 22. P. 27–46.

Статья поступила 9 июня 2011 г.

Хисамиев Назиф Гарифуллинович
Восточно-Казахстанский гос. технический университет им. Д. Серикбаева,
ул. Протазанова, 69, Усть-Каменогорск 070004, Казахстан
hisamiev@mail.ru