Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 512.542

НЕАБЕЛЕВЫ КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФАКТОРЫ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРОЙ ХОЛЛОВЫ

Н. В. Маслова

Аннотация. Получено полное описание неабелевых композиционный факторов конечной неразрешимой группы, все максимальные подгруппы которой холловы. Тем самым решена проблема 17.92 из «Коуровской тетради».

Ключевые слова: конечная группа, неразрешимая группа, максимальная подгруппа, холлова подгруппа, неабелев композиционный фактор.

Посвящается Маслову Николаю Яковлевичу
и Масловой Маргарите Ивановне

1. Введение

Будем употреблять термин «группа» в значении «конечная группа».

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Символом π' будем обозначать множество тех простых чисел, которые не принадлежат π. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначим множество его простых делителей, а для конечной группы G через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$. Натуральное число n, для которого $\pi(n) \subseteq \pi$, называется *π-числом*, а группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется *π-группой*. Подгруппа H конечной группы G называется *π-холловой подгруппой*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. Таким образом, если π состоит из одного простого числа p, то π-холлова подгруппа — это в точности силовская p-подгруппа. *Холлова подгруппа* — это π-холлова подгруппа для некоторого множества π.

Будем говорить, что G — *конечная группа с холловыми максимальными подгруппами*, если каждая максимальная подгруппа группы G является холловой подгруппой.

Изучение конечных групп, в которых каждая максимальная подгруппа холлова, берет свое начало в работах В. М. Левчука, А. Г. Лихарева [1] и В. Н. Тютянова [2], где было установлено, что конечная простая группа с дополняемыми максимальными подгруппами изоморфна одной из групп $PSL_2(7) \cong PSL_3(2)$, $PSL_2(11)$ или $PSL_5(2)$. Во всех этих группах каждая максимальная подгруппа холлова.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00324), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12–С–1–1018) и УрО РАН с НАН Беларуси (проект 12–С–1–1009), Совета по грантам Президента РФ (проект МК–3395.2012.1), а также программы поддержки молодежных научных проектов УрО РАН (проект А3).

© **2012 Маслова Н. В.**

В 2008 г. Т. В. Тихоненко и В. Н. Тютянов показали [3], что неабелевы конечные простые группы с холловыми максимальными подгруппами исчерпываются с точностью до изоморфизма группами $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ и $PSL_5(2)$. В том же году В. С. Монаховым [4] были изучены нормальное строение и другие свойства конечной разрешимой группы с холловыми максимальными подгруппами. В этой же работе им была сформулирована

Проблема 1. *Каковы неабелевы композиционные факторы конечной неразрешимой группы, у которой все максимальные подгруппы холловы?*

В 2010 г. проблема 1 была записана В. С. Монаховым в «Коуровскую тетрадь» [5] под номером 17.92. Хотя холловы подгруппы в простых и близких к ним группах изучались различными авторами [6–21] и к настоящему времени полностью описаны, изучение холловых максимальных подгрупп произвольной конечной группы нельзя свести только к изучению холловых подгрупп ее композиционных факторов. Например, любая подгруппа $P \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{Aut}(A_6))$ максимальна в группе $\mathrm{Aut}(A_6)$, однако $P \cap A_6 \leq A_4$ и A_4 — максимальная подгруппа в A_6, не являющаяся холловой. Тем не менее максимальные подгруппы конечной простой группы дают определенную информацию о том, может ли данная группа быть композиционным фактором некоторой конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы.

Подход к решению проблемы Монахова, сформулированный в следствии 1, был предложен автору Д. О. Ревиным. Этот подход позволяет установить для довольно обширного семейства конечных простых групп, что никакая из этих групп не может быть композиционным фактором конечной группы с холловыми максимальными подгруппами. Однако для полного описания неабелевых композиционных факторов конечной группы с холловыми максимальными подгруппами мы используем более общий подход, сформулированный в предложении 1.

Решение проблемы Монахова дает следующая

Теорема 1. *Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы, исчерпываются группами* $PSL_2(7) \cong PSL_3(2)$, $PSL_2(11)$ *и* $PSL_5(2)$.

2. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Используемые терминология и обозначения в основном стандартны, их можно найти в [21–25].

Наибольшая целая неотрицательная степень простого числа p, делящая натуральное число j, называется *p-частью числа j* и обозначается через j_p.

Пусть q — натуральная степень простого нечетного числа p и G — одна из конечных простых классических групп $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$, $PSp_n(q)$ для четного n, $P\Omega_n(q)$ для нечетного n и $P\Omega_n^{\varepsilon}(q)$ для четного n, где $\varepsilon \in \{+,-\}$. Будем обозначать через V естественное векторное пространство размерности n над полем F с определенной на нем соответствующей билинейной или квадратичной формой, ассоциированное с группой G, где $F = F_q$ для линейных, симплектических и ортогональных групп и $F = F_{q^2}$ для унитарных групп.

Пусть G — конечная группа Шевалле с системой корней Φ над полем F_q, где $q = p^l$. Как известно, группа G обладает BN-парой, т. е. такими подгруппами B и N, что $B = N_G(U)$, где $U \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $H = B \cap N$ — абелева p'-группа,

$B = UH$ и $H \trianglelefteq N$. Группа $W = N/H$ изоморфна группе Вейля системы корней Φ группы G и будет в дальнейшем отождествляться с этой группой. Группа Вейля W порождается фундаментальными отражениями $\{w_{r_1}, \dots, w_{r_s}\}$ [22, II, § 8]. *Параболической подгруппой группы Вейля* W называется подгруппа $W_J = \langle w_r \mid w_r \in J\rangle$, где $J \subseteq \{w_{r_1}, \dots, w_{r_s}\}$, или любая сопряженная с ней. *Параболической подгруппой группы* G*, отвечающей множеству корней* J, называется подгруппа $G_J = BN_JB$, где N_J — полный прообраз группы W_J в N. Пусть G^1 — скрученная группа Шевалле и G — группа Шевалле нормального типа, которая используется для определения группы G^1. Предположим, что с группой G ассоциирована система корней Φ, диаграмма Дынкина которой обладает симметрией порядка $n \in \{2, 3\}$, и G^1 определяется с помощью автоморфизма порядка n группы G. Условимся считать, что тип системы корней Φ^1, ассоциированной с группой G^1, определяется типом системы корней Φ и числом n. Таким образом, условно считаем различными системы корней скрученных групп, определяемых с помощью групп нормального типа с различными системами корней.

Пусть $\mathscr{M}$ — множество всех последовательностей $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, где $x_i \in \{0, 1\}$ для всех i и число ненулевых компонент конечно. Введем на $\mathscr{M}$ естественный частичный порядок $\geq$, считая $1 \geq 0$, а для $u = (u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$, $v = (v_0, v_1, \dots, v_n, \dots)$ из $\mathscr{M}$ полагая $u \geq v$ тогда и только тогда, когда $u_i \geq v_i$ для всех i. Через ψ обозначим функцию, которая ставит в соответствие каждому целому неотрицательному числу s последовательность $(s_0, s_1, \dots, s_k, \dots)$ из $\mathscr{M}$ такую, что $\overline{s_k s_{k-1} \dots s_0}$ — запись числа s в двоичной системе счисления и $s_n = 0$ для всех $n > k$.

Обозначим через $\mathfrak{V}$ класс конечных групп, в которых любая максимальная подгруппа является холловой.

Лемма 1 [11, лемма 1]. *Если H — π-холлова и A — нормальная подгруппы группы G, то HA/A и $H \cap A$ — π-холловы подгруппы групп G/A и A соответственно.*

Лемма 2 [4, лемма 4]. *Класс $\mathfrak{V}$ замкнут относительно взятия фактор-групп.*

Предложение 1. *Пусть S — конечная простая неабелева группа, обладающая подгруппой X такой, что*

(1) *класс сопряженности $X^S = \{X^s \mid s \in S\}$ является инвариантным относительно* $\mathrm{Aut}(S)$;

(2) *для любой подгруппы Z такой, что $X \leq Z < S$, выполняется свойство: порядок $|Z|$ и индекс $|S : Z|$ не взаимно просты.*

Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.

Следствие 1. *Пусть S — конечная простая неабелева группа, обладающая максимальной подгруппой X такой, что*

(1) *класс сопряженности $X^S = \{X^s \mid s \in S\}$ является инвариантным относительно* $\mathrm{Aut}(S)$;

(2) *порядок $|X|$ и индекс $|S : X|$ не взаимно просты.*

Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{X}$.

Доказательство предложения 1. Допустим, что заключение предложения 1 неверно. Среди групп из $\mathfrak{V}$, обладающих композиционным фактором, изоморфным S, выберем группу G наименьшего возможного порядка.

Так как группа G имеет наименьший возможный порядок, с учетом леммы 2 любая нормальная подгруппа группы G, не имеющая композиционных факторов, изоморфных S, тривиальна.

Пусть A — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда ввиду [24, 8.2]

$$A = S_1 \times \dots \times S_n,$$

где $S_1, \dots, S_n$ — сопряженные в G простые подгруппы. Так как $S_1, \dots, S_n$ сопряжены и A имеет композиционный фактор, изоморфный S (иначе $A \leq K = 1$), получаем, что $S_i \simeq S$ для любого $i = 1, \dots, n$. В частности, группа A неразрешима и G действует сопряжениями транзитивно на множестве $\Omega = \{S_1, \dots, S_n\}$. Допуская небольшую вольность, можно считать, что S — одна из групп S_i. Так как G действует транзитивно на Ω, имеем $n = |G : N_G(S)|$. Зафиксируем некоторую полную систему представителей $g_1, \dots, g_n$ правых смежных классов группы G по подгруппе $N_G(S)$. Тогда подгруппы S^{g_i} попарно различны и, не уменьшая общности, можем считать, что $S_i = S^{g_i}$ для всех $i = 1, \dots, n$. Положим $X_i = X^{g_i}$ (см. условие) и $Y = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$. Покажем, что класс сопряженности $Y^A = \{Y^a \mid a \in A\}$ инвариантен относительно G. Пусть $g \in G$. Требуется понять, что $Y^g = Y^a$ для некоторого $a \in A$.

Из определения элементов $g_1, \dots, g_n$ вытекает, что существуют подстановка $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ и элементы $x_1, \dots, x_n \in N_G(S)$ такие, что $g_i g = x_i g_{i\sigma}$ для всех $i = 1, \dots, n$. Далее, так как $x_i \in N_G(S)$, отображение γ_i, задаваемое правилом $s \mapsto s^{x_i}$ для всех $s \in S$, является автоморфизмом группы S. Поскольку класс X^S инвариантен относительно группы $\mathrm{Aut}(S)$, для любого $i = 1, \dots, n$ найдется элемент $t_i \in S$ такой, что

$$X^{x_i} = X^{\gamma_i} = X^{t_i}.$$

Обозначим через $s_{i\sigma}$ элемент $t_i^{g_{i\sigma}} \in S_{i\sigma}$. Положим также $a = s_1 \dots s_n$. Далее, поскольку $[X_i, X_j] = 1$ при $i \neq j$, для всех $i = 1, \dots, n$ справедливо равенство $X_i^a = X_i^{s_i}$. Имеем

$$\begin{aligned} Y^g = \langle X_1^g, \dots, X_n^g \rangle &= \langle X^{g_1 g}, \dots, X^{g_n g} \rangle = \langle X^{x_1 g_{1\sigma}}, \dots, X^{x_n g_{n\sigma}} \rangle \\ &= \langle X^{t_1 g_{1\sigma}}, \dots, X^{t_n g_{n\sigma}} \rangle = \langle (X_{1\sigma})^{g_{1\sigma}^{-1} t_1 g_{1\sigma}}, \dots, (X_{n\sigma})^{g_{n\sigma}^{-1} t_n g_{n\sigma}} \rangle \\ &= \langle X_{1\sigma}^{s_{1\sigma}}, \dots, X_{n\sigma}^{s_{n\sigma}} \rangle = \langle X_{1\sigma}^a, \dots, X_{n\sigma}^a \rangle = \langle X_1^a, \dots, X_n^a \rangle = Y^a. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что $Y^G = Y^A$. Ввиду аргумента Фраттини [24, предложение 6.3] $G = AN_G(Y)$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, содержащая $N_G(Y)$. Тогда $G = AM$. Отсюда следует, что $A \not\leq M$. В частности, найдется подгруппа S_i, $1 \leq i \leq n$, такая, что $S_i \not\leq M$. Ввиду того, что $X_i \leq Y \leq M$, имеем $X_i \leq Z_i = S_i \cap M < S_i$. Далее, так как $G \in \mathfrak{V}$ и M максимальна в G, подгруппа M холлова в G. Ввиду субнормальности подгруппы S_i в G и с учетом леммы 1 заключаем, что Z_i — холлова подгруппа группы S_i. Но тогда в S есть холлова собственная подгруппа Z, содержащая X, вопреки выбору S и X; противоречие. □

3. Доказательство теоремы 1

Предложение 2. *Пусть S изоморфна одной из 26 спорадических групп. Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.*

Доказательство. Ввиду [26] в любой спорадической группе S есть максимальная подгруппа X четного порядка и четного индекса, класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Значит, с учетом следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. $\square$

Предложение 3. *Пусть $S \cong A_n$ при $n \geq 5$. Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.*

Доказательство. Ввиду [26] группа A_6 обладает не холловой максимальной подгруппой, которая имеет форму $3^2 : 4$ и класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(A_6)$. Поэтому можно считать, что $n \neq 6$. Тогда $\mathrm{Aut}(A_n) \cong S_n$. Допуская небольшую вольность, будем считать, что $\mathrm{Aut}(A_n) = S_n$. Ввиду [27] подгруппа $X = K \cap A_n$, где $K \cong S_m \times S_{n-m}$, является максимальной подгруппой в A_n при $m \neq n/2$. Заметим, что класс сопряженности X инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Действительно, зафиксируем нечетную подстановку $g \in S_n$. Не ограничивая общности, будем считать, что $m \geq n - m$. Тогда существует цикл $(i, j) \in S_m \times 1 \leq K \subseteq N_{S_n}(K) \setminus A_n$. Поэтому

$$X^g = K^g \cap A_n = (S_m \times S_{n-m})^g \cap A_n = ((S_m \times S_{n-m})^{(i,j)})^g \cap A_n$$
$$= (S_m \times S_{n-m})^{(i,j)g} \cap A_n = K^{(i,j)g} \cap A_n = X^{(i,j)g}.$$

Элемент $(i, j)g$ является четной подстановкой.

Докажем, что для любого числа $n \geq 5$ число m можно выбрать таким образом, чтобы подгруппа X была максимальной в A_n, при этом порядок и индекс подгруппы X в A_n были не взаимно просты. Ввиду [26] можно считать, что $n \geq 17$. Поскольку $A_n \trianglelefteq S_n$, произведение подгрупп $A_n \cdot K$ является подгруппой в S_n, строго содержащей максимальную в S_n подгруппу K. Поэтому $A_n \cdot K = S_n$, откуда по соответствующей теореме о гомоморфизме получаем, что $|X| = |K|/2$ и $|A_n : X| = |S_n : K|$. Поскольку предполагалось, что $m \geq n - m$, имеем $m \geq 3$, следовательно, 6 делит $|X|$.

Ввиду основного результата [28] индекс $|A_n : X|$ нечетен тогда и только тогда, когда $\psi(n) \geq \psi(m)$. Если $n \neq 2^w - 1$ ни для какого натурального числа w, то m можно выбрать таким образом, что $\psi(n) \ngeq \psi(m)$ и $m \neq n/2$. Тогда индекс $|A_n : X|$ четен.

Если найдется натуральное число w такое, что $n = 2^w - 1$, причем $w \geq 3$, то либо $n \equiv 0 \pmod 3$, либо $n \equiv 1 \pmod 3$. Положим $n - m = 5$. Тогда $m \neq n/2$ и

$$|A_n : X| = |S_n : K| = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Если $n \equiv 0 \pmod 3$, то числа n и $n - 3$ делятся на 3. Если $n \equiv 1 \pmod 3$, то числа $n-1$ и $n-4$ делятся на 3. Следовательно, и индекс $|A_n : X|$ делится на 3.

Таким образом, подгруппа X является не холловой максимальной подгруппой в S такой, что класс сопряженности X инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Значит, ввиду следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. $\square$

Предложение 4. *Пусть $S = PSL_n(q)$, где $q = p^l$ нечетно, $n \geq 2$ и $(n, q) \neq (2, 3)$. Тогда если группа S изоморфна некоторому композиционному фактору некоторой группы из $\mathfrak{V}$, то $S \in \{PSL_2(7), PSL_2(11)\}$.*

Доказательство. Пусть $n = 2$ и $q \equiv 1 \pmod 4$. Если $q \neq 9$, то ввиду [29] в группе S есть максимальная подгруппа X из класса Ашбахера C_3, имеющая композиционное строение $\frac{q+2}{2}.2$, класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ [25, табл. 3.5.A]. Порядок подгруппы X четен. Ввиду [30, теорема 1] индекс $|S:X|$ четен. Значит, в силу следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. Если $q=9$, то по [26] $PSL_2(9) \cong A_6$, поэтому по предложению 3 группа $PSL_2(9)$ не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$

Пусть $n=2$ и $q \equiv 3 \pmod 4$. Если $q \notin \{7,11\}$, то ввиду [29] подгруппа X из класса Ашбахера C_2 группы S — стабилизатор в S разложения $V = V_1 \oplus V_2$ в прямую сумму одномерных подпространств V_i, является максимальной подгруппой в S из класса Ашбахера C_2, имеющей композиционное строение $\frac{q-1}{2}.2$. Класс сопряженности X инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ [25, табл. 3.5.A]. Ввиду [30, теорема 7] индекс $|S:X|$ четен. Порядок подгруппы X также четен. Значит, с учетом следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. Если $q \in \{7,11\}$, то ввиду [26] все максимальные подгруппы группы $PSL_2(q)$ холловы.

Пусть $n=3$ и 3 не делит $q-1$, тогда в силу [31, 32] подгруппа $X \cong PSO_3(q)$ является максимальной подгруппой в S из класса Ашбахера C_8. Нетрудно понять, что порядок X четен. По [25, табл. 3.5.A, предложение 4.8.4] класс сопряженности X инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Из [33] следует, что индекс $|S:X|$ четен. Значит, ввиду следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.

Пусть $n=3$ и 3 делит $q-1$. Тогда по [31, 32] в S есть максимальная подгруппа X из класса Ашбахера C_3, имеющая композиционное строение $\frac{q^3-1}{3(q-1)}.3$, класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ ввиду [25, табл. 3.5.A, предложение 4.3.6]. Нетрудно понять, что 3 делит порядок X. Вычислим индекс

$$|S:X| = \frac{(q^2-1)(q-1)^2}{3}.$$

Поскольку 9 делит $(q^2-1)(q-1)^2$, получаем, что 3 делит $|S:X|$. Значит, ввиду следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.

Пусть $n>3$.

Если n четно, рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S — стабилизатор в S подпространства V_1, где $\dim V_1 = n/2$. Ввиду [25, табл. 3.5.A] это параболическая максимальная подгруппа в S, класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ вследствие [25, предложение 4.1.17]. В силу [21, теорема 10.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, с учетом следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.

Если n нечетно, рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S — стабилизатор в S пары подпространств $0 = V_0 < V_1 < V_2 < V_3 = V$, где $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = n-2$. Это параболическая подгруппа в S, класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ по [25, табл. 3.5.A, предложение 4.1.22]. Собственные надгруппы X — стабилизатор Y_1 в S подпространства V_1 и стабилизатор Y_2 в S подпространства V_2. Ввиду [21, теорема 10.2] подгруппы X, Y_1 и Y_2 не холловы в S. Значит, ввиду предложения 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. $\square$

Предложение 5. *Пусть $S = PSL_n(q)$, где $q = 2^w$ для некоторого натурального числа w, $n \geq 2$ и $(n,q) \neq (2,2)$. Тогда если группа S изоморф-*

на некоторому композиционному фактору некоторой группы из $\mathfrak{V}$, *то* $S \in \{PSL_3(2), PSL_5(2)\}$.

Доказательство. Пусть $S \cong PSL_2(2^w)$. Ввиду [26] $PSL_2(4) \cong PSL_2(5)$, поэтому с учетом предложения 4 группа $PSL_2(4)$ не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. В силу [29] при $w > 2$ подгруппа X из класса Ашбахера C_2 группы S — стабилизатор в S разложения $V = V_1 \oplus V_2$ в прямую сумму одномерных подпространств V_i, является максимальной подгруппой в S, имеющей по [25, предложение 4.2.9] композиционное строение $[q-1].2$. Нетрудно понять, что порядок $|X|$ четен. Ввиду [33, 34] индекс в $|S : X|$ также четен. Из [25, табл. 3.5.A] следует, что класс сопряженности X инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Значит, по следствию 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.

Пусть $n \in \{3, 5\}$. Ввиду [26] все максимальные подгруппы групп $PSL_3(2) \cong PSL_2(7)$ и $PSL_5(2)$ холловы.

Если $(q-1, n) > 1$, то рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S — стабилизатор в S пары подпространств $0 = V_0 < V_1 < V_2 < V_3 = V$, где $\dim V_1 = 1$, $\dim V_2 = n-1$. Это параболическая подгруппа в S, класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ ввиду [25, табл. 3.5.A, предложение 4.1.22]. Собственные надгруппы X — стабилизатор Y_1 в S подпространства V_1 и стабилизатор Y_2 в S подпространства V_2. Ввиду [21, теоремы 11.2, 12.2] подгруппы X, Y_1 и Y_2 не холловы в S. Значит, по предложению 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.

Если $w > 1$ и $(q-1, n) = 1$, то рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_5 группы S — централизатор полевого автоморфизма α простого порядка. Ввиду [25, табл. 3.5.A, предложение 4.5.3] из условия $(q-1, n) = 1$ следует, что класс сопряженности X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Из [23, 7.8] вытекает, что X — максимальная подгруппа в G. Ввиду [25, предложение 4.5.3] $X \cong PGL_n(q^{1/|\alpha|})$, поэтому порядок $|X|$ четен. Из [33, 34] следует, что индекс $|S : X|$ также четен. Значит, по следствию 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.

Пусть $n = 4$. Поскольку $PSL_4(2) \cong A_8$, группа $PSL_4(2)$ не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$ ввиду предложения 3. При $w > 1$ рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S — стабилизатор в S пары подпространств $0 = V_0 < V_1 < V_2 < V_3 = V$, где $\dim V_1 = 1$, $\dim V_2 = 3$. Это параболическая подгруппа в S, класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ ввиду [25, табл. 3.5.A, предложение 4.1.22]. Собственные надгруппы X — стабилизатор Y_1 в S подпространства V_1 и стабилизатор Y_2 в S подпространства V_2. Согласно [21, теоремы 11.2, 12.2] подгруппы X, Y_1 и Y_2 не холловы в S. Значит, по предложению 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.

Пусть теперь $n \geq 6$.

Рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S — стабилизатор в S пары подпространств $0 = V_0 < V_1 < V_2 < V_3 = V$, где $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = n-2$. Это параболическая подгруппа в S, класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ ввиду [25, табл. 3.5.A, предложение 4.1.22]. Собственные надгруппы X — стабилизатор Y_1 в S подпространства V_1 и стабилизатор Y_2 в S подпространства V_2. Ввиду [21, теоремы 11.2, 12.2] подгруппы X, Y_1 и Y_2 не холловы в S. Значит, по предложению 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. $\square$

Предложение 6. *Пусть $S = PSU_n(q)$, где $q = p^l$, $n \geq 3$ и $(n, q) \neq (3, 2)$. Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.*

Доказательство. Рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S — стабилизатор в S вполне изотропного подпространства U размерности 1 из V. Ввиду [23, § 2] X является параболической максимальной подгруппой S, отличной от подгруппы Бореля. Из [25, табл. 3.5.B, предложение 4.1.18] следует, что класс сопряженности X инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. По [21, теорема 5.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, ввиду следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. $\square$

Предложение 7. *Пусть $S = PSp_{2n}(q)$, где $q = p^w$, $n \geq 2$ и $(n, q) \neq (2, 2)$. Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.*

Доказательство. Если $(n, p) \neq (2, 2)$, рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S — стабилизатор в S вполне изотропного подпространства U размерности 1 из V. Ввиду [23, § 2] X является параболической максимальной подгруппой S, отличной от подгруппы Бореля. Ввиду [25, теорема 2.1.4, табл. 3.5.C, предложение 4.1.19] класс сопряженности X инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Группа $PSp_n(q)$ в лиевской интерпретации имеет систему корней типа C_n, поэтому по [21, теорема 5.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, ввиду следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.

Пусть $S = PSp_4(q)$, $q = 2^w$ и $w = rv \geq 2$, где r — некоторый простой делитель w. Рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_5 группы S — централизатор полевого автоморфизма α простого порядка r. Из [23, 7.8] следует, что X — максимальная подгруппа в G. Докажем, что класс сопряженности этой подгруппы инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$.

Считаем, что $S = C_4(q)$, где q — степень двойки, и что X — централизатор полевого автоморфизма простого порядка в S. В соответствии с [35, теорема 12.5.1] любой автоморфизм θ группы G представляется в виде $\theta = idgf$, где i — внутренний, d — диагональный, f — канонический полевой и g — канонический графовый автоморфизмы группы S, где под каноническими понимаются автоморфизмы, определенные в [35, гл. 12] с помощью действия на стандартных образующих элементах. Так как в рассматриваемом случае $(2, q-1) = 1$, группа внутренне-диагональных элементов совпадает с группой внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(S)$, которую будем отождествлять с S. Поэтому можно считать, что $\mathrm{Aut}(S) = \langle S, \Phi, \Gamma \rangle$, где Φ и Γ — канонические группы полевых и графовых автоморфизмов соответственно. Согласно [36, теорема 2.5.12] группа $\langle \Phi, \Gamma \rangle$ является прямым произведением циклических подгрупп Φ и Γ. Кроме того, можно считать, что $X = C_S(f)$ для некоторого элемента $f \in \Phi$ простого порядка. Так как $\Phi, \Gamma \leq C_{\mathrm{Aut}(S)}(f)$, имеем $\mathrm{Aut}(S) = SC_{\mathrm{Aut}(S)}(f)$. Поскольку группа $X = S \cap C_{\mathrm{Aut}(S)}(f)$ инвариантна относительно $C_{\mathrm{Aut}(S)}(f)$, класс сопряженности подгруппы X в S инвариантен относительно действия группы $SC_{\mathrm{Aut}(S)}(f) = \mathrm{Aut}(S)$.

Ввиду [25, предложение 4.5.4] $X \cong PSp_4(q^{1/r})$, поэтому порядок $|X|$ четен. Из [33, 34] следует, что индекс $|S : X|$ также четен. Значит, ввиду следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. $\square$

Предложение 8. *Пусть $S = P\Omega_{2n+1}(q)$, где $q = p^l$ нечетно и $n \geq 3$. Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.*

Доказательство. Рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S — стабилизатор в S вполне вполне сингулярного подпространства U размерности 1 из V. Ввиду [23, § 2] X является параболической максимальной подгруппой S, отличной от подгруппы Бореля. Из [25, табл. 3.5.D, предложение 4.1.20] следует, что класс сопряженности X инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Группа $P\Omega_n(q)$ в лиевской интерпретации имеет систему корней типа B_n, поэтому по [21, теорема 5.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, ввиду следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. $\square$

Предложение 9. *Пусть $S = P\Omega^+_{2n}(q)$, где $q = p^l$ и $n \geq 4$. Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.*

Доказательство. Группа $P\Omega^+_{2n}(q)$ в лиевской интерпретации имеет систему корней типа D_n.

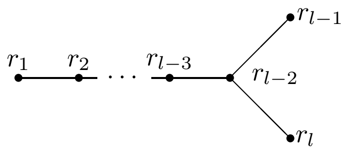

Рис. 1. Диаграмма Дынкина корневой системы типа D_l.

Рассмотрим параболическую максимальную подгруппу $X = G_J$, где $J = \{r_1, r_3, \dots, r_l\}$ (рис. 1), класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ [22, III]. Подгруппа X отлична от подгруппы Бореля группы S. По [21, теоремы 5.2, 6.3] подгруппа X не холлова в S. Значит, ввиду следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. $\square$

Предложение 10. *Пусть $S = P\Omega^-_{2n}(q)$, где $q = p^l$ и $n \geq 4$. Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$.*

Доказательство. Группа $P\Omega^-_{2n}(q)$ в лиевской интерпретации имеет систему корней типа ${}^2D_n$.

Рассмотрим в S параболическую максимальную подгруппу $X = G_J$, где $J = \{r^1_1, r^1_3, \dots, r^1_l\}$ (рис. 2), класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ [22, III]. Подгруппа X отлична от подгруппы Бореля группы S. По [21, теоремы 5.2, 8.3] подгруппа X не холлова в S. Значит, ввиду следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. $\square$

Рис. 2. Диаграмма Дынкина корневой системы типа ${}^2D_l$.

Предложение 11. *Пусть* $S \in \{E_8(q), E_7(q), {}^2E_6(q^2), {}^3D_4(q^3), {}^2F_4(2^{2n+1}), {}^2G_2(3^{2n+1})\}$. *Тогда группа* S *не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из* $\mathfrak{V}$.

Доказательство. Рассмотрим в S произвольную параболическую максимальную подгруппу X. Класс сопряженности X инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ [22, III]. Подгруппа X отлична от подгруппы Бореля группы S. По [21, теорема 5.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, ввиду следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. □

Предложение 12. *Пусть* $S = E_6(q)$. *Тогда группа* S *не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из* $\mathfrak{V}$.

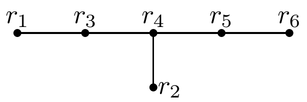

Рис. 3. Диаграмма Дынкина корневой системы типа E_6.

Доказательство. Рассмотрим в S параболическую максимальную подгруппу $X = G_J$, где $J = \{r_1, r_3, r_4, r_5, r_6\}$ (рис. 3), класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ [22, III]. Подгруппа X отлична от подгруппы Бореля группы S. По [21, теорема 7.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, ввиду следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. □

Предложение 13. *Пусть* $S = F_4(q)$. *Тогда группа* S *не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из* $\mathfrak{V}$.

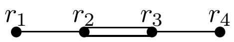

Рис. 4. Диаграмма Дынкина корневой системы типа F_4.

Доказательство. Рассмотрим в S параболическую подгруппу $X = G_J$, где $J = \{r_2, r_3\}$ (рис. 4), класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ [22, III]. Подгруппа X отлична от подгруппы Бореля группы S. Собственные надгруппы X — параболические максимальные в S подгруппы $X_1 = G_{J_1}$, где $J_1 = \{r_1, r_2, r_3\}$ и $X_2 = G_{J_2}$, $J_2 = \{r_2, r_3, r_4\}$. Ввиду [21, теоремы 5.2, 12.2] подгруппы X, X_1 и X_2 не холловы в S. Значит, в силу предложения 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. □

Предложение 14. *Пусть* $S = G_2(q)$. *Тогда группа* S *не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из* $\mathfrak{V}$.

Доказательство. Рассмотрим в S подгруппу Бореля X, класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$, а порядок $|X|$ делится на 2 и на 3 [22, III]. Собственные надгруппы X — параболические максимальные в S подгруппы $X_1 = G_{J_1}$, где $J_1 = \{r_1\}$ и $X_2 = G_{J_2}$, $J_2 = \{r_2\}$. Ввиду [21, теоремы 4.2, 5.2] подгруппы X, X_1 и X_2 не холловы в S. Значит, в силу предложения 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. □

Предложение 15. *Пусть* $S = {}^2B_2(2^w)$, *где* $q > 2$. *Тогда группа* S *не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из* $\mathfrak{V}$.

Доказательство. Все максимальные подгруппы группы ${}^2B_2(2^w)$ известны [37].

В каждой строке табл. 1 подгруппы образуют один класс сопряженности в S [37], за исключением последней строки, где один класс сопряженности образуют подгруппы одного порядка.

Таблица 1

Структура T	$\lvert T\rvert$	Примечания	$\lvert T\rvert_2$
$[q^2].(q-1)$	$q^2(q-1)$	Параболическая	q^2
$D_{2(q-1)}$	$2(q-1)$		2
$[q^2+(2q)^{1/2}+1].4$	$4(q^2+(2q)^{1/2}+1)$		4
$[q^2-(2q)^{1/2}+1].4$	$2q^2(q^2-1)^2$		2^{2w+1}
${}^2B_2(q_0)$	$q_0^2(q_0-1)(q_0^2+1)$	$q=q_0^r, q_0\geq 8,\ r$ – простое	q_0^2

Рассмотрим подгруппу $X\cong D_{2(q-1)}$. Из табл. 1 видно, что 2-часть подгруппы X в S не совпадает с 2-частью подгруппы из любого другого класса сопряженности в S. Поэтому класс сопряженности X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Из табл. 1 следует, что порядок $|X|$ четен, а из [33, 34] — что индекс $|S:X|$ также четен. Значит, ввиду следствия 1 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{V}$. $\square$

Доказательство теоремы 1 следует из предложений 2–15 и классификации конечных простых групп.

Автор благодарит В. С. Монахова за постановку задачи, Д. О. Ревина и А. С. Кондратьева за ценные замечания, послужившие ее решению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левчук В. М., Лихарев А. Г.* Конечные простые группы с дополняемыми максимальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 798–810.
2. *Тютянов В. Н.* Конечные группы с дополняемыми подгруппами // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. Т. 6. С. 178–183.
3. *Тихоненко Т. В., Тютянов В. Н.* Конечные группы с максимальными холловыми подгруппами // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2008. Т. 50, № 5. С. 198–206.
4. *Монахов В. С.* Конечные π-разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 390–394.
5. *Нерешенные вопросы теории групп.* Коуровская тетрадь. 17-е изд. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010.
6. *Gross F.* Odd order Hall subgroups of $GL(n,q)$ and $Sp(2n,q)$ // Math. Z. 1984. Bd 187, Heft 2. S. 185–194.
7. *Gross F.* On the existence of Hall subgroups // J. Algebra. 1986. V. 98, N 1. P. 1–13.
8. *Gross F.* Conjugacy of odd order Hall subgroups // Bull. Lond. Math. Soc. 1987. V. 19, N 4. P. 311–319.
9. *Gross F.* Hall subgroups of order not divisible by 3 // Rocky Mount. J. Math. 1993. V. 23, N 2. P. 569–591.
10. *Gross F.* Odd order Hall subgroups of the classical linear groups // Math. Z. 1995. Bd 220, Heft 3. S. 317–336. (Contemp. Math.; V. 402).
11. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1956. V. 6, N 22. P. 286–304.
12. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Hall subgroups of finite groups // Ischia group theory 2004. Proc. Conf. in Honour of Marcel Herzog. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2006. P. 229–263. (Contemp. Math.; V. 402).
13. *Revin D. O., Vdovin E. P.* On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups // J. Algebra. 2010. V. 324, N 12. P. 3614–3652.
14. *Revin D. O., Vdovin E. P.* An existence criterion for Hall subgroups of finite groups // J. Group Theory. 2011. V. 14, N 1. P. 93–101.
15. *Spitznagel E. L.* Hall subgroups of certain families of finite groups // Math. Z. 1967. Bd 97, Heft 4. S. 259–290.
16. *Thompson J. G.* Hall subgroups of the symmetric groups // J. Comb. Theory. 1966. V. 1. P. 271–279.
17. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Холловы подгруппы нечетного порядка в конечных группах // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 1. С. 15–56.

18. *Казарин Л. С.* Теоремы силовского типа для конечных групп // Структурные свойства алгебраических систем. Нальчик: Кабардино-балкарск. ун-т, 1981. С. 42–52.
19. *Мазуров В. Д., Ревин Д. О.* О холловом D_π-свойстве для конечных групп // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 106–113.
20. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в одном классе конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 335–370.
21. *Ревин Д. О.* Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 1. С. 160–208.
22. *Кондратьев А. С.* Группы и алгебры Ли. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2009.
23. *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.
24. *Aschbacher M.* Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.
25. *Kleidman P., Liebeck M.* The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
26. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
27. *Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J.* A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. Algebra. 1987. V. 111, N 2. P. 365–383.
28. *Маслова Н. В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 182–184.
29. *Dickson L. E.* Linear groups with an exposition of the Galois field theory. Leipzig: Teubner, 1901; New York: Dover, 1958.
30. *Маслова Н. В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 100–118.
31. *Bloom D. M.* The subgroups of $PSL(3, q)$ for odd q // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 127, N 1. P. 150–178.
32. *Mitchell H. H.* Determination of the ordinary and modular ternary linear groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1911. V. 12. P. 207–242.
33. *Liebeck M. W., Saxl J.* The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc (2). 1985. V. 31, N 2. P. 250–264.
34. *Kantor W. M.* Primitive permutation groups of odd degree, and an application to the finite projective planes // J. Algebra. 1987. V. 106, N 1. P. 15–45.
35. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: John Wiley and Sons, 1972.
36. *Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.* The classication of the finite simple groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. N 3.
37. *Suzuki M.* On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. 1962. V. 75, N 1. P. 105–145.

Статья поступила 1 декабря 2011 г.

Маслова Наталья Владимировна
Институт математики и механики УрО РАН,
Екатеринбург, ГСП-384, 620990;
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
butterson@mail.ru