Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 510.64

РАЗРЕШИМОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО СВОЙСТВА КРЕЙГА В СТРОЙНЫХ J–ЛОГИКАХ

Л. Л. Максимова

Аннотация. Исследуются расширения минимальной логики J Йохансона. Найдены достаточные условия финитной аппроксимируемости J-логик в зависимости от вида их аксиом. С использованием этих условий доказывается разрешимость интерполяционного свойства Крейга в стройных J-логиках. Ранее были описаны все J-логики со слабым интерполяционным свойством WIP и доказана разрешимость WIP над J.

Установлена разрешимость проблемы амальгамируемости стройных многообразий J-алгебр.

Ключевые слова: интерполяция, минимальная логика, стройная логика.

Введение

В статье исследуется проблема интерполяции в пропозициональных расширениях минимальной логики J. Минимальная логика, введенная Йохансоном [1], имеет тот же позитивный фрагмент, что и интуиционистская логика, но в минимальной логике нет специальных аксиом для отрицания. В отличие от классической и интуиционистской логик минимальная логика допускает нетривиальные теории, содержащие некоторое утверждение вместе с его отрицанием.

Интерполяционная теорема, доказанная Крейгом [2] для классической логики первого порядка, стала источником большого числа исследований по проблеме интерполяции в классических и неклассических теориях [3, 4]. В настоящее время интерполяция рассматривается как стандартное свойство логик наряду с непротиворечивостью, полнотой и т. д. Для интуиционистской логики предикатов и для минимальной логики Йохансона интерполяционная теорема была доказана Шютте [5]. Семантическое доказательство интерполяционной теоремы в интуиционистской логике предикатов найдено Габбаем [6]. Интерполяционное свойство тесно связано со свойством определимости по Бету [7], которое тоже широко исследуется в литературе.

Семейство расширений логики J содержит все суперинтуиционистские логики, для которых проблема интерполяции решена в [8]. Доказано, что существует лишь конечное число суперинтуиционистских логик с интерполяционным свойством Крейга CIP и существует алгоритм для распознавания свойства CIP в суперинтуиционистских исчислениях. Все суперинтуиционистские логики с проективным свойством Бета PBP описаны в [9], доказана конечность числа таких логик и разрешимость свойства PBP над интуиционистской логикой Int

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00090–а), а также программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1.10726).

[10]. Аналогичные результаты получены для позитивных логик, содержащих позитивный фрагмент интуиционистской логики Int^+ [11], и для негативных J-логик.

Интерполяционное свойство допускает различные варианты, которые равносильны в классической логике, но неэквивалентны в других логиках. Оказалось, что проективное свойство Бета PBP, которое следует из CIP, влечет ограниченное интерполяционное свойство IPR на классе всех J-логик. Более того, IPR и PBP равносильны на классах суперинтуиционистских, позитивных и негативных логик [12, 13].

В [14] исследовалось слабое интерполяционное свойство WIP, введенное в [15]. В [16] доказано, что во всех расширениях минимальной логики свойство WIP равносильно слабой версии свойства совместной непротиворечивости по Робинсону. В [15] доказано, что все пропозициональные суперинтуиционистские логики обладают свойством WIP. Так как лишь конечное число пропозициональных суперинтуиционистских логик имеет свойство IPR, свойства WIP и IPR неэквивалентны над интуиционистской логикой. Тем более они неэквивалентны над минимальной логикой J. Заметим, что свойство WIP нетривиально в пропозициональных расширениях минимальной логики: множество J-логик с WIP и множество J-логик без WIP имеют мощность континуума [16].

В [16] найден алгебраический эквивалент свойства WIP, а именно свойство слабой амальгамируемости. Доказано, что проблема справедливости WIP в J-логиках сводится к рассмотрению расширений логики Gl, которая получается добавлением закона исключенного третьего к логике J. В [14] построена классификация логик над J со свойством WIP и доказано, что слабое интерполяционное свойство WIP разрешимо над логикой J. Это означает, что существует алгоритм, который по любому конечному множеству схем аксиом определяет, обладает ли свойством WIP исчисление, полученное добавлением этих схем аксиом к исчислению Йохансона.

В [17] найдено полное описание логик над Gl, обладающих свойствами CIP, PBP или IPR, доказана разрешимость этих свойств над логикой Gl.

В этой статье мы рассматриваем так называемые стройные J-логики, т. е. J-логики, удовлетворяющие дополнительной аксиоме $(\bot \to A) \vee (A \to \bot)$. Изучение таких логик начато в [18]. В [19] найдены теоремы о представлении для стройных логик, обладающих свойствами CIP, PBP или IPR. Показано, что лишь конечное число стройных логик обладает этими свойствами и что свойства PBP и IPR равносильны на классе стройных J-логик.

Основная цель статьи — доказательство разрешимости интерполяционного свойства Крейга CIP в стройных J-логиках.

В § 4 будут найдены достаточные условия финитной аппроксимируемости J-логик в зависимости от вида их аксиом. Эти результаты представляют самостоятельный интерес; здесь они используются для доказательства финитной аппроксимируемости и разрешимости каждой стройной J-логики со свойством CIP.

Существенную роль в доказательстве разрешимости CIP играют также разрешимость слабого интерполяционного свойства над J [14] и теорема о представлении стройных J-логик с CIP [19].

Ввиду равносильности CIP и свойства амальгамируемости многообразий из разрешимости CIP сразу следует разрешимость проблемы амальгамируемости на классе стройных многообразий J-алгебр. Таким образом, существует алгоритм, который по любой конечной системе тождеств определяет, является ли амальгамируемым стройное многообразие алгебр, задаваемое этой системой тождеств.

§ 1. Интерполяция и определимость

Язык логики J содержит в качестве исходных связок $\&, \vee, \to, \bot, \top$; отрицание определяется как сокращение: $\neg A = A \to \bot$; $(A \leftrightarrow B) = (A \to B)\&(B \to A)$. Формула называется *позитивной*, если она не содержит вхождений константы $\bot$. Логика J может быть задана исчислением, которое имеет те же самые схемы аксиом, что и позитивное интуиционистское исчисление Int^+, и единственное правило вывода модус поненс: $A, A \to B/B$. Более точно, J задается следующими схемами аксиом:

1) $A \to (B \to A)$,
2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,
3) $A\&B \to A$,
4) $A\&B \to B$,
5) $A \to (B \to A\&B)$,
6) $A \to A \vee B$,
7) $B \to A \vee B$,
8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$.

Под J-*логикой* мы понимаем любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления J и замкнутое относительно модус поненс и правила подстановки. Обозначаем

$$\mathrm{Int} = \mathrm{J} + (\bot \to p), \quad \mathrm{Cl} = \mathrm{Int} + (p \vee \neg p), \quad \mathrm{Neg} = \mathrm{J} + \bot, \quad \mathrm{Gl} = \mathrm{J} + (p \vee \neg p),$$

$$\mathrm{JX} = \mathrm{J} + ((\bot \to p) \vee (p \to \bot)), \quad \mathrm{For} = \mathrm{J} + p.$$

Логика называется *нетривиальной*, если она не совпадает с множеством всех формул For. *Суперинтуиционистской* называется J-логика, содержащая интуиционистскую логику Int, а *негативной* — J-логика, содержащая логику Neg; логика L называется *паранепротиворечивой*, если не содержит ни Int, ни Neg. Можно доказать, что J-логика негативна, если и только если она не содержится в Cl. Логику называем *стройной*, если она содержит логику JX. Для любой J-логики L обозначаем через $E(L)$ семейство всех J-логик, содержащих L.

Пишем $\Gamma \vdash_L A$, если формула A выводима из $L \cup \Gamma$ посредством правила модус поненс.

Если $\mathbf{p}$ — список переменных, то через $A(\mathbf{p})$ обозначаем формулу, все переменные которой входят в $\mathbf{p}$, а через $\mathscr{F}(\mathbf{p})$ — множество всех таких формул.

Пусть L — логика, $\vdash_L$ — отношение выводимости в L. Пусть $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}'$ — попарно не пересекающиеся списки переменных, не содержащие x и y, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$ имеют одинаковую длину, $A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x)$ — формула.

Говорим, что логика L обладает *проективным свойством Бета* PBP, если из $A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x), A(\mathbf{p}, \mathbf{q}', y) \vdash_L (x \leftrightarrow y)$ следует $A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x) \vdash_L (x \leftrightarrow B(\mathbf{p}))$ для некоторой формулы $B(\mathbf{p})$;

L обладает *свойством Бета* BP, если из $A(\mathbf{p}, x), A(\mathbf{p}, y) \vdash_L (x \leftrightarrow y)$ следует $A(\mathbf{p}, x) \vdash_L (x \leftrightarrow B(\mathbf{p}))$ для подходящей формулы $B(\mathbf{p})$.

Формулу $B(\mathbf{p})$ называем *явным определением для* x. Таким образом, формула $B(\mathbf{p})$ дает явное выражение для x через $\mathbf{p}$ в случае, если x неявно определим, т. е. однозначно определяется формулой $A(\mathbf{p}, x)$.

Свойства PBP и BP рассматривались, например, в [20], там они обозначались через PB2 и B2. Очевидно, что BP есть частный случай PBP. В [20] определены также варианты PB1 проективного свойства Бета и B1 свойства Бета.

В случае логик, рассматриваемых в данной статье, эти свойства равносильны соответственно PB2 и B2. Кроме того, в [21] доказано, что все суперинтуиционистские логики обладают свойством BP. Тем же способом можно доказать свойство Бета для всех логик данной статьи.

Следуя [2], можно вывести проективное свойство Бета из *интерполяционного свойства*, определенного следующим образом (где списки $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ попарно не пересекаются).

CIP. Если $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, то существует такая формула $C(\mathbf{p})$, что $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$.
Формула $C(\mathbf{p})$ называется *интерполянтом.*

Ввиду теоремы дедукции свойство CIP в J-логиках равносильно *дедуктивному интерполяционному свойству*

IPD. Если $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, то существует такая формула $C(\mathbf{p})$, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L C(\mathbf{p})$ и $C(\mathbf{p}) \vdash_L B(\mathbf{p},\mathbf{r})$.

Мы также рассмотрим *ограниченное интерполяционное свойство* IPR, введенное в [22], и *слабое интерполяционное свойство* WIP, введенное в [15]:

IPR. Если $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L C(\mathbf{p})$, то существует формула $A'(\mathbf{p})$ такая, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L A'(\mathbf{p})$ и $A'(\mathbf{p}), B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L C(\mathbf{p})$.

WIP. Если $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L \bot$, то существует формула $A'(\mathbf{p})$ такая, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L A'(\mathbf{p})$ и $A'(\mathbf{p}), B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L \bot$.

Во всех J-логиках имеет место

$$\mathrm{CIP} \iff \mathrm{IPD} \Rightarrow \mathrm{PBP} \Rightarrow \mathrm{IPR} \Rightarrow \mathrm{WIP}.$$

Кроме того, из PBP не следует IPD, и из WIP не следует IPR уже на классе суперинтуиционистских логик. Проблема эквивалентности IPR и PBP в J-логиках остается пока открытой; доказана равносильность этих свойств в суперинтуиционистских, позитивных и негативных логиках.

В [8] найдено описание всех пропозициональных суперинтуиционистских логик с интерполяционным свойством Крейга. Существует лишь конечное число суперинтуиционистских логик, обладающих свойством CIP. Все позитивные логики со свойством CIP описаны в [11], где также начато изучение этого свойства в расширениях минимальной логики Йохансона.

Приведем известные факты об интерполяционных свойствах в расширениях минимальной логики.

Предложение 1.1 [9]. *Существуют точно* 16 *суперинтуиционистских логик с проективным свойством Бета* PBP*; из них точно* 8 *логик имеют* CIP. *Все эти логики конечно аксиоматизируемы и финитно аппроксимируемы.*

Список суперинтуиционистских логик с CIP включает в себя логики Int, LS, Cl и тривиальную логику For. Логика Cl наибольшая среди непротиворечивых суперинтуиционистских логик, а логика LS наибольшая среди непротиворечивых суперинтуиционистских логик, отличных от Cl. Логика Cl характеризуется двухэлементной булевой алгеброй B_0, а логика LS — трехэлементной линейно упорядоченной гейтинговой алгеброй C_1.

Предложение 1.2 [11]. *Существуют точно* 7 *негативных логик с проективным свойством Бета* PBP*; из них точно* 4 *логики имеют* CIP. *Все эти логики конечно аксиоматизируемы и финитно аппроксимируемы.*

Перечислим негативные логики с CIP:

$$\mathrm{Neg},\ \mathrm{NC} = \mathrm{Neg} + (p \to q) \lor (q \to p),\ \mathrm{NE} = \mathrm{Neg} + p \lor (p \to q),\ \mathrm{For} = \mathrm{Neg} + p.$$

Логика NC характеризуется линейно упорядоченными негативными алгебрами, а логика NE — двухэлементной негативной алгеброй.

Предложение 1.3. *Для всех суперинтуиционистских и негативных логик свойства* IPR *и* PBP *равносильны.*

Доказательство для суперинтуиционистских логик приведено в [12], для негативных логик сразу вытекает из равносильности этих свойств в позитивных логиках, доказанной в [13]. □

Все суперинтуиционистские и негативные логики обладают свойством WIP. Однако это не распространяется на все J-логики [14]. Проблема справедливости WIP в J-логиках сводится к изучению расширений логики $\mathrm{Gl} = J + (p \vee (p \to \bot))$.

Предложение 1.4 [16]. J-*логика* L *имеет* WIP *тогда и только тогда, когда* $L + \mathrm{Gl}$ *имеет* WIP.

Все расширения логик Gl и J со свойством WIP описаны в [14]. Множество логик над Gl с WIP и множество логик без WIP оба имеют мощность континуума. Полное описание расширений логики Gl, обладающих свойствами CIP, IPR или PBP, найдено в [17]. В частности, доказано, что существует лишь конечное число таких логик. Кроме того, свойства IPR и PBP равносильны над логикой Gl.

Говорим, что свойство P *разрешимо над логикой* L, если существует алгоритм, который по любому конечному множеству схем аксиом Ax определяет, обладает ли логика $L + Ax$ свойством P.

Предложение 1.5 [14, 17]. *Свойство* WIP *разрешимо над* J. *Свойства* CIP, PBP *и* IPR *разрешимы над логикой* Gl.

§ 2. Алгебраическая семантика

Алгебраическая семантика для расширений минимальной логики строится с помощью так называемых J-*алгебр*, т. е. алгебр $\mathbf{A} = \langle A; \&, \vee, \to, \bot, \top \rangle$, удовлетворяющих условиям:

$\langle A; \&, \vee, \to, \top \rangle$ есть импликативная решетка, т. е. решетка относительно $\&, \vee$ с наибольшим элементом $\top$,

$z \leq x \to y \iff z \& x \leq y$,

$\bot$ — произвольный элемент в A.

J-алгебра называется *гейтинговой*, или *псевдобулевой алгеброй*, если $\bot$ — наименьший элемент множества A, и *негативной алгеброй*, если $\bot$ — наибольший элемент множества A. Одноэлементная J-алгебра $\mathbf{E}$ называется *единичной*, или *вырожденной*; это единственная J-алгебра, которая является одновременно негативной и гейтинговой алгеброй. J-алгебра называется *стройной*, если $x \leq \bot$ или $\bot \leq x$ для всех $x \in A$.

J-алгебра $\mathbf{A}$ называется *невырожденной*, если она содержит не менее двух элементов; $\mathbf{A}$ называется *вполне связной*, или *сильно компактной*, если для всех $x, y \in \mathbf{A}$ выполняется

$$x \vee y = \top \Leftrightarrow (x = \top \text{ или } y = \top).$$

Элемент Ω алгебры $\mathbf{A}$ называется *предпоследним элементом*, или *опремумом* алгебры $\mathbf{A}$, если он является наибольшим среди элементов алгебры $\mathbf{A}$, отличных от $\top$. Через B_0 обозначаем двухэлементную булеву алгебру, через C_1 — трехэлементную гейтингову алгебру.

Напомним, что невырожденная алгебра называется *подпрямо неразложимой*, если она не разлагается в подпрямое произведение отличных от нее сомножителей. Называем алгебру *финитно неразложимой*, если она не разлагается в подпрямое произведение конечного числа отличных от нее сомножителей.

По известной теореме Биркгофа (см., например, [23]) любое многообразие порождается классом своих подпрямо неразложимых алгебр, а значит, и классом финитно неразложимых алгебр.

Следующая лемма, известная для гейтинговых алгебр (см., например, [8]), легко переносится на J-алгебры.

Лемма 2.1. *Для любой* J-*алгебры* $\mathbf{A}$

a) $\mathbf{A}$ *финитно неразложима тогда и только тогда, когда единичный фильтр* $\nabla = \{\top\}$ *является простым, т. е.* $\mathbf{A}$ *вполне связна;*

b) $\mathbf{A}$ *подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *имеет опремум.*

Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — частично упорядоченные множества, причем $\mathbf{A}$ имеет наибольший элемент, а $\mathbf{B}$ — наименьший элемент, то определяем новое множество $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ следующим образом: берем множество $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}'$, где $\mathbf{B}'$ изоморфно $\mathbf{B}$ и его наименьший элемент склеивается с наибольшим элементом множества $\mathbf{A}$, а остальные элементы не входят в $\mathbf{A}$, причем $\mathbf{C}$ частично упорядочено отношением

$$x \leq_{\mathbf{C}} y \Leftrightarrow [(x \in \mathbf{A} \text{ и } y \in \mathbf{B}') \text{ или } (x, y \in \mathbf{A} \text{ и } x \leq_{\mathbf{A}} y) \text{ или } (x, y \in \mathbf{B}' \text{ и } x \leq_{\mathbf{B}'} y)].$$

Таким образом, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}'$ можно рассматривать как интервалы частично упорядоченного множества $\mathbf{C}$. Из определения вытекает, что $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}'$ являются подрешетками $\mathbf{C}$. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — импликативные решетки, то $\mathbf{C}$ тоже импликативная решетка, и операция $\to$ удовлетворяет условиям:

$$x \to_{\mathbf{C}} y = \begin{cases} \top_{\mathbf{C}}, & \text{если } x \leq_{\mathbf{C}} y, \\ x \to_{\mathbf{A}} y, & \text{если } x, y \in \mathbf{A},\ x \not\leq_{\mathbf{A}} y, \\ x \to_{\mathbf{B}'} y, & \text{если } x, y \in \mathbf{B}', \\ y, & \text{если } x \in \mathbf{B}',\ y \in \mathbf{A} - \{\top_{\mathbf{A}}\}. \end{cases}$$

Напомним конструкцию из [18]. Если $\mathbf{A} = \langle A; \&, \vee, \to, \bot, \top \rangle$ — негативная алгебра и $\mathbf{B} = \langle B; \&, \vee, \to, \bot, \top \rangle$ — гейтингова алгебра, определяем новую J-алгебру $\mathbf{C} = A \uparrow B$ как J-алгебру с носителем $\mathbf{A} + B$, где $\bot_{\mathbf{C}} = \bot_{\mathbf{A}} = \top_{\mathbf{A}} = \bot_{\mathbf{B}'}$. Ясно, что $\top_{\mathbf{C}} = \top_{\mathbf{B}'}$.

В частности, любая негативная алгебра $\mathbf{A}$ представима как $\mathbf{A} \uparrow \mathbf{E}$, а гейтингова алгебра $\mathbf{B}$ — как $\mathbf{E} \uparrow B$. Ясно, что J-алгебра является стройной тогда и только тогда, когда она имеет вид $\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}$ для подходящих негативной алгебры $\mathbf{A}$ и гейтинговой алгебры $\mathbf{B}$.

Особую роль в этой статье будут играть стройные алгебры вида $\mathbf{A} \uparrow B_0$, где B_0 — двухэлементная булева алгебра. Для негативной алгебры $\mathbf{A}$ определим

$$\mathbf{A}^{\Lambda} = \mathbf{A} \uparrow B_0.$$

Очевидно, все J-алгебры $\mathbf{A}^{\Lambda}$ подпрямо неразложимы и имеют $\bot$ в качестве опремума.

Приведем обозначения специальных алгебр, используемых в статье:

L_n — линейно упорядоченная гейтингова алгебра, содержащая n элементов, $n \geq 1$;

C_n — гейтингова алгебра, упорядоченная по типу $\left(B_0^n + B_0\right)$, $n \geq 1$;

$G_n = \left(B_0^n\right)^\Lambda$ — алгебра, упорядоченная по типу $\left(B_0^n + B_0\right)$, с опремумом $\perp$;

L_n^Λ — линейно упорядоченная J-алгебра с опремумом $\perp$, содержащая $(n+1)$ элемент;

$C_n^\Lambda = \left(B_0^n + B_0\right)^\Lambda$ — алгебра, упорядоченная по типу $\left(B_0^n + B_0 + B_0\right)$, с опремумом $\perp$.

В частности, $G_1 = L_2^\Lambda$, $C_1^\Lambda = L_3^\Lambda$.

Из определения легко вытекает

Лемма 2.2. 1. *Алгебра* $\mathbf{B}$ *изоморфна подалгебре алгебры* $\mathbf{C} = \mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}$.

2. *Алгебра* $\mathbf{A}$ *является гомоморфным образом алгебры* $\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}$ *относительно гомоморфизма* $f(z) = z \& \perp$.

3. $\mathbf{A}$ *является подалгеброй алгебры* $\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}$ *в том и только в том случае, если* $\mathbf{B}$ *— вырожденная алгебра.*

По любой стройной алгебре $\mathbf{A}$ однозначно определяются алгебры

$$\mathbf{A}^l = \{x \in \mathbf{A} \mid x \leq \perp\} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}^u = \{x \in \mathbf{A} \mid x \geq \perp\},$$

причем $\mathbf{A}^l$ — негативная алгебра, $\mathbf{A}^u$ — гейтингова алгебра и $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^l \uparrow \mathbf{A}^u)$.

Лемма 2.3 [18]. *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *— стройные алгебры. Отображение* $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *является мономорфизмом тогда и только тогда, когда его ограничения* α^l *и* α^u *на* $\mathbf{A}^l$ *и* $\mathbf{A}^u$ *соответственно являются мономорфизмами из* $\mathbf{A}^l$ *в* $\mathbf{B}^l$ *и из* $\mathbf{A}^u$ *в* $\mathbf{B}^u$.

Хорошо известно, что семейство J-алгебр образует многообразие и существует взаимно однозначное соответствие между логиками, содержащими логику J, и многообразиями J-алгебр. Если A — формула, $\mathbf{A}$ — алгебра, то говорим, что в $\mathbf{A}$ *общезначима формула* A, и пишем $\mathbf{A} \models A$, если тождество $A = \top$ выполняется в $\mathbf{A}$. Пишем $\mathbf{A} \models L$ вместо $(\forall A \in L)(\mathbf{A} \models A)$.

Каждой логике $L \in E(\mathrm{J})$ соответствует многообразие J-алгебр

$$V(L) = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \models L\}.$$

Любая логика характеризуется многообразием $V(L)$. Говорим, что логика L *порождается некоторым классом алгебр*, если многообразие $V(L)$ порождается этим классом. Если $V(L)$ порождается алгеброй $\mathbf{A}$, то пишем иногда $L = L\mathbf{A}$.

Если $L \in E(\mathrm{Int})$, то $V(L)$ — многообразие гейтинговых алгебр, а если $L \in E(\mathrm{Neg})$, то $V(L)$ — многообразие негативных алгебр.

§ 3. Аксиоматизация некоторых J-логик

Для $L_1 \in E(\mathrm{Neg})$, $L_2 \in E(\mathrm{Int})$ обозначим через $L_1 \uparrow L_2$ логику, характеризуемую всеми алгебрами вида $\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}$, где $\mathbf{A} \models L_1$, $\mathbf{B} \models L_2$. Через $L_1 \Uparrow L_2$ обозначаем логику, характеризуемую классом алгебр вида $\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ — финитно неразложимая алгебра из $V(L_1)$, а $\mathbf{B} \in V(L_2)$. В частности, если L_1 — тривиальная логика For, то $L_1 \uparrow L_2$ и $L_1 \Uparrow L_2$ совпадают с L_2. Если L_2 тривиальна, то $L_1 \uparrow L_2$ и $L_1 \Uparrow L_2$ совпадают с L_1. Ясно, что $L_1 \uparrow L_2$ и $L_1 \Uparrow L_2$ всегда являются стройными логиками.

В [18] найдена аксиоматизация для логик вида $L_1 \uparrow L_2$ и $L_1 \Uparrow L_2$, где L_1 — негативная, L_2 — суперинтуиционистская логики. Следуя [24], положим

$$I(A(p_1, \dots, p_n)) = A(p_1 \vee \perp, \dots, p_n \vee \perp),$$

$$L_2 * L_1 = \mathrm{J} + \{(\perp \to A) \mid A \in L_2\} + \{I(A) \mid A \in L_1\}.$$

В [24] показано, что если $L_1 = \mathrm{Neg} + Ax_1$, $L_2 = \mathrm{Int} + Ax_2$, то

$$L_2 * L_1 = \mathrm{J} + \{(\bot \to A) \mid A \in Ax_2\} + \{I(A) \mid A \in Ax_1\}.$$

Напомним,что

$$\mathrm{JX} = \mathrm{J} + ((\bot \to p) \vee (p \to \bot)).$$

Предложение 3.1 [18]. *Для любой негативной логики L_1 и суперинтуиционистской логики L_2*

$$L_1 \uparrow L_2 = \mathrm{JX} + (L_2 * L_1),$$

$$L \Uparrow L_2 = (L_2 \uparrow L_1) + ((\bot \to p \vee q) \to (\bot \to p) \vee (\bot \to q)).$$

В частности, $\mathrm{JX} = \mathrm{Neg} \uparrow \mathrm{Int}$.

Предложение 3.2 [14]. *Логика* $\mathrm{Gl} = J + (p \vee \neg p)$ *совпадает с* $\mathrm{Neg} \uparrow \mathrm{Cl}$ *и порождается классом* $\{\mathbf{A}^{\Lambda} \mid \mathbf{A}$ *— негативная алгебра*$\}$.

Предложение 3.3 [14]. *Для любой негативной логики L логика $L \uparrow \mathrm{Cl}$ порождается классом алгебр $\mathbf{A}^{\Lambda}$, где $\mathbf{A} \in V(L)$, а логика $L \Uparrow \mathrm{Cl}$ — классом алгебр $\mathbf{A}^{\Lambda}$, где $\mathbf{A}$ — финитно неразложимая алгебра из $V(L)$.*

Любой J-логике L соответствуют ее негативный и суперинтуиционистский напарники [24]:

$$L_{\mathrm{neg}} = L + \bot, \quad L_{\mathrm{int}} = L + (\bot \to p).$$

Ввиду предложения 3.1 ясно, что для любой негативной логики L_1 и суперинтуиционистской логики L_2 выполнены равенства $(L_1 \uparrow L_2)_{\mathrm{neg}} = (L_1 \Uparrow L_2)_{\mathrm{neg}} = L_1$ и $(L_1 \uparrow L_2)_{\mathrm{int}} = (L_1 \Uparrow L_2)_{\mathrm{int}} = L_2$.

Лемма 3.4 [19]. *Пусть L — стройная J-логика, $\mathbf{A}$ — финитно неразложимая алгебра из $V(L)$. Тогда $\mathbf{A} = \mathbf{A}^l \uparrow \mathbf{A}^u$, где $\mathbf{A}^l \in V(L_{\mathrm{neg}})$, $\mathbf{A}^u \in V(L_{\mathrm{int}})$. Если формула $(\bot \to p \vee q) \to (\bot \to p) \vee (\bot \to q)$ общезначима в $\mathbf{A}$, то $\mathbf{A}^l$ финитно неразложима, т. е. $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию $x \vee y = \bot \Rightarrow (x = \bot$ или $y = \bot)$.*

Ясно, что пересечение двух J-логик тоже является J-логикой. Аксиоматизация пересечения легко находится по аксиоматизации исходных логик. Для формул A и B обозначаем через $A \vee' B$ дизъюнкцию $A \vee B'$, где B' получается из B заменой всех переменных новыми переменными, не входящими в A.

Лемма 3.5. *Пусть L — пересечение двух J-логик L_1 и L_2. Тогда*

(1) *L аксиоматизируема формулами $A \vee' B$, где A — аксиома логики L_1, B — аксиома логики L_2;*

(2) *финитно неразложимая алгебра $\mathbf{A}$ принадлежит $V(L)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{A} \in (V(L_1) \cup V(L_2))$.*

Доказательство. (1) Аналогично теореме Миура [25].

(2) Следует из (1) и леммы 2.1. $\square$

§ 4. J-логики и финитная аппроксимируемость

В этом параграфе найдем достаточные условия финитной аппроксимируемости J-логик.

Логика L и многообразие $V(L)$ называются *локально табличными*, если любая конечно порожденная алгебра в $V(L)$ конечна. Логика L называется *финитно аппроксимируемой*, если многообразие $V(L)$ порождается некоторым классом конечных алгебр. По известной теореме Харропа любая финитно аппроксимируемая и конечно аксиоматизируемая логика разрешима.

Финитная аппроксимируемость интуиционистской логики доказана Маккинси и Тарским [26]. Маккей [27] доказал, что любая суперинтуиционистская логика, аксиоматизируемая формулами без дизъюнкции, финитно аппроксимируема. Полезное обобщение этой теоремы найдено в [28]: любая суперинтуиционистская логика, аксиоматизируемая формулами без отрицательных вхождений дизъюнкции, финитно аппроксимируема. В этом параграфе мы заметим, что это обобщение переносится на класс всех J-логик, и найдем другие достаточные условия финитной аппроксимируемости J-логик.

Доказательства Маккинси — Тарского и Маккея основаны на вложимости конечных частичных подалгебр импликативной решетки в конечные импликативные решетки.

Предложение 4.1. *Пусть* $\mathbf{A} = \langle A, \&, \vee, \to \rangle$ — *импликативная решетка,* A_0 — *конечное подмножество множества* A. *Тогда*

(1) *существует конечная импликативная решетка* $\mathbf{B} = \langle B, \&, \vee, \to \rangle$ *такая, что* $B \supseteq A_0$, $\langle B, \&, \vee \rangle$ *является подрешеткой решетки* $\langle A, \&, \vee \rangle$ *и* $x \to_{\mathbf{B}} y \le x \to_{\mathbf{A}} y$ *для всех* $x, y \in \mathbf{B}$, *причем если* $x \to_{\mathbf{A}} y \in \mathbf{B}$, *то* $x \to_{\mathbf{B}} y = x \to_{\mathbf{A}} y$;

(2) *существует конечная импликативная решетка* $\mathbf{C} = \langle C, \&, \vee, \to \rangle$ *такая, что* $C \supseteq A_0$, $\langle C, \&, \to \rangle$ *является подалгеброй алгебры* $\langle A, \&, \to \rangle$ *и* $x \vee_{\mathbf{C}} y \ge x \vee_{\mathbf{A}} y$ *для всех* $x, y \in \mathbf{C}$, *причем если* $x \vee_{\mathbf{A}} y \in \mathbf{C}$, *то* $x \vee_{\mathbf{C}} y = x \vee_{\mathbf{A}} y$.

Доказательство. (1) В качестве B берется замыкание множества A_0 относительно решеточных операций алгебры $\mathbf{A}$. Множество B конечно, так как любая конечно порожденная дистрибутивная решетка конечна. Операция $\to$ определяется условием

$$x \to_{\mathbf{B}} y = \bigvee \{z \in \mathbf{B} \mid z \& x \le y\}.$$

(2) В качестве C берется замыкание множества A_0 относительно операций $\&$ и $\to$ алгебры $\mathbf{A}$. Тогда множество C конечно по теореме Диего [29] о локальной табличности соответствующего многообразия. Операция $\vee$ определяется условием

$$x \vee_{\mathbf{C}} y = \& \{z \in \mathbf{C} \mid x \le z \text{ и } y \le z\}. \quad \square$$

Напомним, что в формуле $\varphi \to \psi$ подформула φ считается отрицательной, а ψ — положительной; дизъюнкция и конъюнкция не меняют знака подформул.

Предложение 4.2. *Пусть* J-*логика аксиоматизируема формулами без отрицательных вхождений дизъюнкции. Тогда она аксиоматизируема формулами без дизъюнкции.*

Доказательство. Пусть аксиома φ содержит положительное вхождение подформулы $\psi \vee \chi$. Обозначим через φ' результат замены этого вхождения формулой $(\psi \to q) \to ((\chi \to q) \to q)$, где q — новая переменная, не входящая в φ. Тогда индукцией по глубине вхождения подформулы легко доказать, что формула $\varphi \to \varphi'$ выводима в J. С другой стороны, подставляя в φ' формулу $\psi \vee \chi$ вместо переменной q, выводим формулу φ. Таким образом, можно элиминировать все положительные вхождения дизъюнкции в аксиомах данной логики. $\square$

Докажем обобщение теоремы из [28].

Теорема 4.3. *Если* J-*логика аксиоматизируема формулами без отрицательных вхождений дизъюнкции, то она финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть J-логика L аксиоматизируема формулами без отрицательных вхождений дизъюнкции. Тогда по предложению 4.2 она аксиоматизируема формулами без дизъюнкции. Предположим, что $L \not\vdash \varphi$. Тогда существуют алгебра $\mathbf{A} \in V(L)$ и означивание v в $\mathbf{A}$ такие, что $v(\varphi) \neq \top_{\mathbf{A}}$.

Пусть B_0 — множество значений всех подформул формулы φ, $A_0 = B_0 \cup \{\perp_{\mathbf{A}}, \top_{\mathbf{A}}\}$. По предложению 4.1(2) существует конечная J-алгебра $\mathbf{C} = \langle C, \&, \vee, \to, \perp, \top\rangle$ такая, что $C \supseteq A_0$, $\langle C, \&, \to\rangle$ является подалгеброй алгебры $\langle A, \&, \to\rangle$, $\perp_{\mathbf{C}} = \perp_{\mathbf{A}}$, $\top_{\mathbf{C}} = \top_{\mathbf{A}}$ и для всех $x, y \in \mathbf{C}$ если $x \vee_{\mathbf{A}} y \in \mathbf{C}$, то $x \vee_{\mathbf{C}} y = x \vee_{\mathbf{A}} y$.

Определим означивание v_1 в алгебре $\mathbf{C}$, полагая $v_1(p) = v(p)$ для любой переменной p формулы φ.

Индукцией по длине подформулы нетрудно доказать, что $v_1(\psi) = v(\psi)$ для любой подформулы ψ формулы φ. Отсюда вытекает, что $v_1(\varphi) = v(\varphi) \neq \top_{\mathbf{C}}$.

Так как $\perp_{\mathbf{C}} = \perp_{\mathbf{A}}$ и операции $\&_{\mathbf{C}}$ и $\to_{\mathbf{C}}$ являются ограничениями соответствующих операций на $\mathbf{A}$, заключаем, что алгебра $\mathbf{C}$ удовлетворяет всем тождествам, не содержащим дизъюнкции и истинным на алгебре $\mathbf{A}$, поэтому $\mathbf{C} \in V(L)$. $\square$

Лемма 4.4. *Если суперинтуиционистская логика L_1 и негативная логика L_2 аксиоматизируемы формулами без отрицательных вхождений дизъюнкции, то логика $L_1 * L_2$ также аксиоматизируема формулами без отрицательных вхождений дизъюнкции.*

Доказательство. Заметим, что аксиому $A(p_1 \vee \perp, \dots, p_n \vee \perp)$ логики $L_1 * L_2$, где $A(p_1, \dots, p_n)$ — аксиома логики L_1, можно заменить аксиомой $B = ((\perp \to p_1)\& \dots \&(\perp \to p_n)) \to A(p_1, \dots, p_n)$, не содержащей отрицательных вхождений дизъюнкции. В самом деле, формула $A(p_1 \vee \perp, \dots, p_n \vee \perp) \to B$ выводима в J. С другой стороны, подставляя в B формулы $p_i \vee \perp$ вместо переменных p_i, $i = 1, \dots, n$, выводим $A(p_1 \vee \perp, \dots, p_n \vee \perp)$. $\square$

Следствие 4.5. *Если суперинтуиционистская логика L_1 и негативная логика L_2 аксиоматизируемы формулами без отрицательных вхождений дизъюнкции, то логики $L_1 * L_2$ и $L_2 \uparrow L_1$ финитно аппроксимируемы.*

Доказательство вытекает из леммы 4.4 и теоремы 4.3. $\square$

Теорема 4.6. *Пусть L_1 — негативная логика, L_2 — суперинтуиционистская логика.*

(1) *Если L_1 и L_2 локально табличны, то логика $L_1 \uparrow L_2$ и все ее расширения финитно аппроксимируемы.*

(2) *Если L_1 локально таблична, а L_2 аксиоматизируема формулами без отрицательных вхождений дизъюнкции, то $L_1 \uparrow L_2$ и $L_1 \Uparrow L_2$ финитно аппроксимируемы.*

(3) *Если L_2 аксиоматизируема формулами без отрицательных вхождений дизъюнкции, то* Neg $\uparrow L_2$ *и* Neg $\Uparrow L_2$ *финитно аппроксимируемы.*

Доказательство. (1) Пусть $L \supseteq L_1 \uparrow L_2$ и $L \not\vdash \varphi$. Тогда существуют финитно неразложимая алгебра $\mathbf{A} \in V(L)$ и означивание v в $\mathbf{A}$ такие, что $v(\varphi) \neq \top_{\mathbf{A}}$.

По лемме 3.4 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^l \uparrow \mathbf{A}^u$, где $\mathbf{A}^l \in V(L_{\text{neg}})$, $\mathbf{A}^u \in V(L_{\text{int}})$. Пусть B' — множество значений подформул формулы φ, содержащихся в $\mathbf{A}^l$, а B'' — множество значений, содержащихся в $\mathbf{A}^u$. Обозначим через $\mathbf{B}_1$ подалгебру алгебры $\mathbf{A}^l$, порожденную множеством B', а через $\mathbf{B}_2$ — подалгебру алгебры $\mathbf{A}^u$, порожденную множеством B'. Тогда J-алгебра $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \uparrow \mathbf{B}_2$ конечна и является подалгеброй алгебры $\mathbf{A}$ по лемме 2.3. В частности, $\mathbf{B} \in V(L)$. Кроме того, v является означиванием в $\mathbf{B}$ и $v(\varphi) \neq \top_{\mathbf{B}}$.

(2) Пусть $L = L_1 \uparrow L_2$ и $L \not\vdash \varphi$. Тогда существуют финитно неразложимая алгебра $\mathbf{A} \in V(L)$ и означивание v в $\mathbf{A}$ такие, что $v(\varphi) \neq \top_{\mathbf{A}}$.

По лемме 3.4 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^l \uparrow \mathbf{A}^u$, где $\mathbf{A}^l \in V(L_1)$, $\mathbf{A}^u \in V(L_2)$. Пусть B' — множество значений подформул формулы φ, содержащихся в $\mathbf{A}^l$, а B'' — множество значений, содержащихся в $\mathbf{A}^u$. Обозначим через $\mathbf{B}_1$ подалгебру алгебры $\mathbf{A}^l$, порожденную множеством B', тогда $\mathbf{B}_1$ конечна. Для построения гейтинговой алгебры $\mathbf{B}_2$ применяем предложение 4.1(2). Существует конечная гейтингова алгебра $\mathbf{B}_2 = \langle B_2, \&, \vee, \to, \bot, \top\rangle$, где $B_2 \supseteq B'' \cup \{\bot, \top\}$, редукт $\langle B_2, \&, \to, \bot, \top\rangle$ является подалгеброй соответствующего редукта алгебры $\mathbf{A}^u$ и для всех $x, y \in \mathbf{B}_2$ если $x \vee_{\mathbf{A}} y \in \mathbf{B}_2$, то $x \vee_{\mathbf{B}_2} y = x \vee_{\mathbf{A}} y$. Тогда $\mathbf{B}_2$ принадлежит $V(L_2)$, так как логику L_2 можно аксиоматизировать формулами без дизъюнкции по теореме 4.3. Поэтому J-алгебра $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \uparrow \mathbf{B}_2$ конечна и принадлежит $V(L)$.

Определим означивание v_1 в алгебре $\mathbf{B}$ условием: $v_1(p) = v(p)$ для любой переменной p формулы φ.

Используя предложение 4.1(2), индукцией по длине подформулы нетрудно доказать, что $v_1(\psi) = v(\psi)$ для любой подформулы ψ формулы φ. Отсюда $v_1(\varphi) = v(\varphi) \neq \top_{\mathbf{B}}$.

Для $L = L_1 \Uparrow L_2$ доказательство аналогично. Надо лишь заметить, что в этом случае алгебра $\mathbf{A}^l$ и ее подалгебра $\mathbf{B}_1$ финитно неразложимы.

(3) Для $L = \mathrm{Neg} \uparrow L_2$ утверждение уже доказано в следствии 4.5.

Пусть $L = \mathrm{Neg} \Uparrow L_2$ и $L \not\vdash \varphi$. Тогда существуют финитно неразложимая алгебра $\mathbf{A} \in V(L)$ и означивание v в $\mathbf{A}$ такие, что $v(\varphi) \neq \top_{\mathbf{A}}$.

По лемме 3.4 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^l \uparrow \mathbf{A}^u$, где $\mathbf{A}^l$ — финитно неразложимая негативная алгебра, $\mathbf{A}^u \in V(L_2)$. Пусть B' — множество значений подформул формулы φ, содержащихся в $\mathbf{A}^l$, а B'' — множество значений, содержащихся в $\mathbf{A}^u$.

Для построения алгебры $\mathbf{B}_1 = \langle B_1, \&, \vee, \to, \bot, \top\rangle$ применяем предложение 4.1(1). Существует конечная негативная алгебра $\mathbf{B}_1 = \langle B_1, \&, \vee, \to, \bot, \top\rangle$, где $B_1 \supseteq B' \cup \{\bot\}$, редукт $\langle B_1, \&, \vee, \bot, \top\rangle$ является подалгеброй соответствующего редукта алгебры $\mathbf{A}^l$ и для всех $x, y \in \mathbf{B}_1$ если $x \to_{\mathbf{A}} y \in \mathbf{B}_1$, то $x \to_{\mathbf{B}_1} y = x \vee_{\mathbf{A}} y$. Тогда $\mathbf{B}_1$ удовлетворяет условию: $x \vee y = \bot \Rightarrow (x = \bot$ или $y = \bot)$, так как $\mathbf{A}^u$ удовлетворяет этому условию.

Алгебра $\mathbf{B}_2$ строится точно так же, как в п. (2). Тогда J-алгебра $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \uparrow \mathbf{B}_2$ конечна и принадлежит $V(L)$.

Определяя означивание v_1 в алгебре $\mathbf{B}$ условием $v_1(p) = v(p)$ для любой переменной p формулы φ и используя предложение 4.1, получаем, что $v_1(\psi) = v(\psi)$ для любой подформулы ψ формулы φ. Отсюда $v_1(\varphi) = v(\varphi) \neq \top_{\mathbf{B}}$. $\square$

Финитная аппроксимируемость логики $\mathrm{JF} = \mathrm{J} + (\bot \to p \vee q) \to (\bot \to p) \vee (\bot \to q)$ доказана в [30].

§ 5. Интерполяция и амальгамируемость

Напомним [11], что J-логика обладает интерполяционным свойством Крейга тогда и только тогда, когда многообразие $V(L)$ имеет свойство амальгамируемости AP. В случае J-алгебр AP равносильно сверхамальгамируемости SAP. Напомним необходимые определения.

Пусть V — класс алгебр, замкнутый относительно изоморфизмов. Класс V называется *амальгамируемым*, если он удовлетворяет следующему условию AP для любых алгебр $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ из V:

AP. Если $\mathbf{A}$ — общая подалгебра алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, то существуют $\mathbf{D}$ из V и мономорфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$.

Тройка $(\mathbf{D}, \delta, \varepsilon)$ называется *амальгамой* для $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.

Говорим, что класс V обладает свойством SAP *сверхамальгамируемости*, если для любых алгебр $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ из V выполнено условие AP и, сверх того, в алгебре $\mathbf{D}$

$$\delta(x) \leq \varepsilon(y) \iff (\exists z \in \mathbf{A})(x \leq z \text{ и } z \leq y),$$

$$\delta(x) \geq \varepsilon(y) \iff (\exists z \in \mathbf{A})(x \geq z \text{ и } z \geq y).$$

Следующая теорема доказана в [11].

Теорема 5.1. *Для любой логики L из $E(\mathrm{J})$ следующие условия эквивалентны:*

1) *L обладает интерполяционным свойством Крейга;*
2) *$V(L)$ амальгамируемо;*
3) *$V(L)$ имеет* SAP*;*
4) *выполнено условие* AP *для любых финитно неразложимых* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *из $V(L)$.*

Добавим, что из полученного в [8, 11] описания всех суперинтуиционистских и негативных логик с интерполяционным свойством следует

Теорема 5.2. *Для любой логики L из $E(\mathrm{Int})$ или $E(\mathrm{Neg})$ следующие условия эквивалентны:*

1) *многообразие $V(L)$ амальгамируемо;*
2) *класс финитно неразложимых алгебр из $V(L)$ амальгамируем.*

Мы не знаем, верно ли это утверждение для всех расширений минимальной логики.

Известно, что в J-логиках свойство IPR равносильно ограниченной амальгамируемости, а PBP — сильной сюръективности эпиморфизмов соответствующего многообразия J-алгебр [18].

Алгебраический эквивалент слабого интерполяционного свойства в J-логиках найден в [16]. Определим *свойство слабой амальгамируемости* для класса V J-алгебр.

WAPJ. Для любых $\mathbf{A}, B, C \in V$ и мономорфизмов $\beta : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta(x) = \varepsilon\gamma(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$, причем $\perp \neq \top$ в $\mathbf{D}$, если $\perp \neq \top$ в $\mathbf{A}$.

Многообразие J-алгебр называем *слабо амальгамируемым*, если оно имеет свойство WAPJ.

Заметим, что это определение отличается от определения слабой амальгамируемости WAP, рассмотренного в [31]. Свойство WAP является частным случаем свойства WAPJ.

Теорема 5.3 [16]. *Пусть L — J-логика. Тогда L имеет* WIP, *если и только если $V(L)$ имеет* WAPJ.

§ 6. Описание логик с WIP

Напомним обозначение из § 2. Для любой негативной алгебры $\mathbf{A}$ обозначаем $\mathbf{A}^{\Lambda} = (\mathbf{A} \uparrow B_0)$, где B_0 — двухэлементная булева алгебра. Для данной J-логики L определим класс $\Lambda(L) = \{\mathbf{A}^{\Lambda} \mid \mathbf{A}$ — негативная алгебра и $\mathbf{A}^{\Lambda} \in V(L)\}$. Легко видеть, что справедлива

Лемма 6.1. *Класс $\Lambda(L)$ является пустым тогда и только тогда, когда L — негативная логика.*

Предложение 1.4 сводит рассмотрение WIP в J-логиках к исследованию расширений логики Gl. Рассмотрим теперь расширения логики Gl специального вида. Аксиоматизация этих логик вида $L \uparrow \mathrm{Cl}$ и $L \Uparrow \mathrm{Cl}$, где L — негативная логика, указана в предложении 3.1. Логика $\mathrm{Gl} = \mathrm{Neg} \uparrow \mathrm{Cl}$ характеризуется всеми алгебрами вида $\mathbf{A}^{\Lambda}$, где $\mathbf{A}$ — негативная алгебра (см. предложение 3.2).

Особую роль в описании J-логик с WIP [14] играет следующий список SL из восьми логик, содержащих логику Gl:

$$\mathrm{For},\ \mathrm{Cl},\ (\mathrm{NE} \uparrow \mathrm{Cl}),\ (\mathrm{NC} \uparrow \mathrm{Cl}),\ (\mathrm{Neg} \uparrow \mathrm{Cl}),\ (\mathrm{NE} \Uparrow \mathrm{Cl}),\ (\mathrm{NC} \Uparrow \mathrm{Cl}),\ (\mathrm{Neg} \Uparrow \mathrm{Cl}).$$

Из предложения 3.3 следует, что каждая из этих логик L порождается классом $\Lambda(L)$. Имеет место

Предложение 6.2 [14]. *Пусть L — любая логика из списка* SL. *Тогда L имеет* CIP, *а классы $V(L)$ и $\Lambda(L)$ амальгамируемы.*

В статье [14] найден эффективный критерий проверки свойства WIP во всех J-логиках, использующий следующую теорему.

Теорема 6.3 [14]. *Для любой логики L из $E(\mathrm{J})$ следующие условия эквивалентны:*

1) *L имеет* WIP*;*
2) *класс $\Lambda(L)$ амальгамируем;*
3) *$\Lambda(L) = \Lambda(L_0)$ для некоторой логики L_0 из списка* SL.

Таким образом, свойство WIP нетривиально в пропозициональных расширениях минимальной логики. Множество J-логик с WIP и множество J-логик без WIP имеют мощность континуума. Первое множество содержит все суперинтуиционистские логики, т. е. континуальное семейство. Второе имеет как минимум ту же мощность, что и множество негативных логик, отличных от Neg, NC, NE, For, а множество негативных логик также имеет мощность континуума. Как уже отмечено в предложении 1.5, свойство WIP разрешимо над J, т. е. существует алгоритм, который по любому конечному множеству схем аксиом Ax определяет, обладает ли логика $\mathrm{J} + Ax$ свойством WIP.

Расположение логик с WIP представлено в следующей теореме. В пп. 1–8 представлены логики L с $\Lambda(L) = \Lambda(L_0)$, где L_0 есть For, Cl, $\mathrm{NE} \Uparrow \mathrm{Cl}$, $\mathrm{NE} \uparrow \mathrm{Cl}$, $\mathrm{NC} \Uparrow \mathrm{Cl}$, $\mathrm{NC} \uparrow \mathrm{Cl}$, $\mathrm{Neg} \Uparrow \mathrm{Cl}$ и $\mathrm{Gl} = \mathrm{Neg} \uparrow \mathrm{Cl}$ соответственно. Определения J-алгебр G_1, G_2, L_3^{Λ} и других даны в § 2.

Теорема 6.4 [14]. *Логика L из $E(\mathrm{J})$ имеет* WIP *тогда и только тогда, когда удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *$B_0 \notin V(L)$;*
2) *$L \subseteq \mathrm{Cl}$ и $G_1 \notin V(L)$;*
3) *$L \subseteq \mathrm{NE} \Uparrow \mathrm{Cl}$ и $L_3^{\Lambda} \notin V(L)$, $G_2 \notin V(L)$;*
4) *$L \subseteq \mathrm{NE} \uparrow \mathrm{Cl}$ и $L_3^{\Lambda} \notin V(L)$;*
5) *$L \subseteq \mathrm{NC} \Uparrow \mathrm{Cl}$ и $C_2^{\Lambda} \notin V(L)$, $G_2 \notin V(L)$;*
6) *$L \subseteq \mathrm{NC} \uparrow \mathrm{Cl}$ и $C_2^{\Lambda} \notin V(L)$;*
7) *$L \subseteq \mathrm{Neg} \Uparrow \mathrm{Cl}$ и $G_2 \notin V(L)$;*
8) *$L \subseteq \mathrm{Gl} = \mathrm{Neg} \uparrow \mathrm{Cl}$.*

§ 7. Разрешимость CIP в стройных J-логиках

В этом параграфе мы рассматриваем стройные J-логики, т. е. расширения логики $\mathrm{JX} = \mathrm{J} + (p \to \bot) \vee (\bot \to p)$.

В [18] рассматривались логики специального вида, содержащие логику JX. Определение этих логик $L_1 \uparrow L_2$, $L_1 \Uparrow L_2$ дано в § 2 нашей статьи. Приведем ряд утверждений.

Предложение 7.1 [18]. *Пусть L — любая из логик $L_1 \uparrow L_2$, $L_1 \Uparrow L_2$, где L_1 — негативная, L_2 — непротиворечивая суперинтуиционистская логики. Тогда L имеет* CIP, *если и только если L_1 и L_2 имеют* CIP.

Как мы уже отметили, существуют лишь четыре негативных логики с CIP, а именно, Neg, NC, NE и For. Имеет место

Теорема 7.2. *Пусть L_1 — негативная логика с* CIP, *L_2 — непротиворечивая суперинтуиционистская логика с* CIP. *Тогда логики $L_1 \uparrow L_2$ и $L_1 \Uparrow L_2$ финитно аппроксимируемы и разрешимы.*

Доказательство. В [8] доказана финитная аппроксимируемость суперинтуиционистских логик с CIP. Кроме того, эти логики конечно аксиоматизируемы, и найденные в [8] аксиомы для этих логик не содержат отрицательных вхождений дизъюнкции. Заметим, что в случае $L_1 = \mathrm{For}$ логики $L_1 \uparrow L_2$ и $L_1 \Uparrow L_2$ совпадают с L_2 и поэтому финитно аппроксимируемы, а значит, и разрешимы.

Если $L_1 \in \{\mathrm{NC}, \mathrm{NE}\}$, то L_1 локально таблична. Тогда логики $L_1 \uparrow L_2$ и $L_1 \Uparrow L_2$ финитно аппроксимируемы по теореме 4.6(2). Для $L_1 = \mathrm{Neg}$ утверждение вытекает из теоремы 4.6(3). $\square$

Любой J-логике L соответствуют ее негативный и суперинтуиционистский напарники:
$$L_{\mathrm{neg}} = L + \bot, \quad L_{\mathrm{int}} = L + (\bot \to p).$$

Лемма 7.3 [13]. *Если* J-*логика L имеет* CIP, IPR *или* PBP, *то L_{neg} и L_{int} обладают тем же свойством.*

Имеет место следующая теорема о представлении стройных J-логик с CIP.

Теорема 7.4 [19]. *Пусть L — стройная* J-*логика. Тогда L имеет* CIP *в том и только в том случае, если L совпадает с одной из логик:*

(1) *$L_1 \cap L_2$, где $L_1 = L_{\mathrm{neg}}$ — негативная логика с* CIP, *L_2 — суперинтуиционистская логика с* CIP;

(2) *$L_1 \cap (L_3 \Uparrow L_2)$, где $L_1 = L_{\mathrm{neg}}$ — негативная логика с* CIP, *L_2 — непротиворечивая суперинтуиционистская логика с* CIP, *$L_3 \in \{\mathrm{Neg}, \mathrm{NC}, \mathrm{NE}\}$;*

(3) *$L_1 \cap (L_3 \uparrow L_2)$, где L_1, L_2, L_3 такие же, как в п. (2).*

Так как существует лишь конечное число негативных и суперинтуиционистских логик с CIP [11, 4], из теоремы 7.4 сразу следует, что существует лишь конечное число стройных логик с CIP.

Для доказательства разрешимости CIP переформулируем теорему 7.4 следующим образом.

Теорема 7.5. *Пусть L — стройная* J-*логика. Тогда L имеет* CIP *в том и только в том случае, если L_{neg} и L_{int} имеют* CIP *и существует логика $L_0 \in \mathrm{SL}$ такая, что L совпадает с одной из логик:*

(1) *$L_{\mathrm{neg}} \cap L_{\mathrm{int}}$;*

(2) *$L_{\mathrm{neg}} \cap (L_3 \Uparrow L_{\mathrm{int}})$, где $L_3 \in \{\mathrm{Neg}, \mathrm{NC}, \mathrm{NE}\}$, $L_0 = (L_3 \Uparrow \mathrm{Cl})$;*

(3) $L_{\rm neg} \cap (L_3 \uparrow L_{\rm int})$, *где* $L_3 \in \{\rm Neg, NC, NE\}$, $L_0 = (L_3 \uparrow \rm Cl)$.

Доказательство. Применим теорему 7.4.

Пусть L имеет CIP. Тогда $L_{\rm neg}$ и $L_{\rm int}$ тоже имеют CIP по лемме 7.3. Кроме того, L имеет WIP, а значит, по теореме 6.3 существует логика L_0 из списка SL такая, что $\Lambda(L) = \Lambda(L_0)$.

Далее, логика L представима в одном из трех видов, указанных в теореме 7.4. Если L совпадает с одной из логик $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cap (L_3 \Uparrow L_2)$, $L_1 \cap (L_3 \uparrow L_2)$, где L_1, L_3 — негативные логики, а L_2 — суперинтуиционистская логика, то по лемме 3.5 и предложению 3.1 получаем $L_{\rm int} = L + (\bot \to A) = L_2$. Кроме того, в случае $L = L_1 \cap (L_3 \Uparrow L_2)$, где $L_3 \in \{\rm Neg, NC, NE\}$, имеем $L_0 = (L_3 \Uparrow \rm Cl)$, а в случае $L = L_1 \cap (L_3 \uparrow L_2)$ получаем $L_0 = (L_3 \uparrow \rm Cl)$.

Обратное утверждение сразу следует из теоремы 7.4. $\square$

Предложение 7.6. *Пусть L — стройная J-логика, L' порождается всеми алгебрами вида $\mathbf{B} \uparrow \mathbf{C}$, где $\mathbf{B}^\Lambda \in \Lambda(L)$, $\mathbf{C} \in V(L_{\rm int})$. Тогда $L \supseteq L_{\rm neg} \cap L'$.*

Доказательство. Достаточно показать, что все подпрямо неразложимые алгебры из $V(L)$ принадлежат $V(L_{\rm neg} \cap L')$. Пусть $\mathbf{A}$ — подпрямо неразложимая алгебра из $V(L)$. Если $\mathbf{A}$ — негативная алгебра, то $\mathbf{A} \in V(L_{\rm neg}) \subseteq V(L_{\rm neg} \cap L')$.

Пусть $\mathbf{A}$ не является негативной алгеброй. По лемме 3.4 $\mathbf{A} = \mathbf{B} \uparrow \mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$ — невырожденная гейтингова алгебра из $V(L_{\rm int})$. Поскольку в этом случае $\mathbf{B}^\Lambda$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{A}$, получаем $\mathbf{B}^\Lambda \in V(L)$ и $\mathbf{B}^\Lambda \in \Lambda(L)$. Значит, $\mathbf{A} \in V(L') \subseteq V(L_{\rm neg} \cap L')$. $\square$

Теорема 7.7. *Свойство* CIP *разрешимо на классе стройных* J*-логик.*

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{JX} + \{A_1, \dots, A_n\}$, $A = A_1 \& \dots \& A_n$. Напомним, что свойство CIP разрешимо на классах негативных и суперинтуиционистских логик [4, 11]. Прежде всего проверим, обладают ли свойством CIP логики $L_{\rm neg}$ и $L_{\rm int}$. Если хотя бы одна из них не имеет CIP, то по лемме 7.3 L тоже не имеет CIP. Пусть теперь обе логики $L_{\rm neg}$ и $L_{\rm int}$ имеют CIP.

Далее, по предложению 1.5 можно проверить, обладает ли L свойством WIP. Если L не имеет WIP, то тем более не имеет CIP.

Допустим, что L имеет WIP. По теореме 6.3 существует логика L_0 из списка SL такая, что $\Lambda(L) = \Lambda(L_0)$. Для нахождения этой логики применяем теорему 6.4. Рассмотрим все возможные случаи.

1. $L_0 = \rm For$. Тогда $\Lambda(L)$ — пустой класс и по лемме 6.1 L является негативной логикой, т. е. $L = L_{\rm neg}$. Поэтому L обладает свойством CIP.

2. $L_0 = \rm Cl$. Тогда класс $\Lambda(L) = \Lambda(\rm Cl)$ содержит лишь двухэлементную алгебру B_0. Положим $L' = L_{\rm int}$. По предложению 7.6 (где $\mathbf{B}$ — единичная алгебра) получаем $L \supseteq L_{\rm neg} \cap L'$. С другой стороны, очевидно $L \subseteq L_{\rm neg} \cap L_{\rm int}$, поэтому $L = L_{\rm neg} \cap L_{\rm int}$. По теореме 7.5(1) логика L имеет CIP.

3. Пусть $L_0 = L_3 \Uparrow \rm Cl$, где $L_3 \in \{\rm Neg, NC, NE\}$. По теореме 7.5(2) логика L имеет CIP тогда и только тогда, когда $L = L_{\rm neg} \cap (L_3 \Uparrow L_{\rm int})$.

Заметим, что $\Lambda(L) = \Lambda(L_3 \Uparrow \rm Cl)$ состоит из всех алгебр $\mathbf{B}^\Lambda$ таких, что $\mathbf{B}$ — финитно неразложимая алгебра из $V(L_3)$. Напомним, что логика $L_3 \Uparrow L_{\rm int}$ порождается всеми алгебрами $\mathbf{B} \uparrow \mathbf{C}$ такими, что $\mathbf{B}$ — финитно неразложимая алгебра из $V(L_3)$, а $\mathbf{C} \in V(L_{\rm int})$. По предложению 7.6 $L \supseteq L_{\rm neg} \cap (L_3 \Uparrow L_{\rm int})$.

Остается проверить обратное включение. Так как логики $L_{\rm neg}$ и $(L_3 \Uparrow L_{\rm int})$ конечно аксиоматизируемы по предложению 3.1 и финитно аппроксимируемы по предложению 1.2 и теореме 7.2, существует алгоритм для проверки выводимости формулы A в $L_{\rm neg} \cap (L_3 \Uparrow L_{\rm int})$. Если A выводима, то $L = L_{\rm neg} \cap (L_3 \Uparrow L_{\rm int})$ и L имеет CIP. В противном случае L не имеет CIP.

4. Доказывается аналогично случаю 3. Достаточно заменить $\Uparrow$ на $\uparrow$ и удалить условие финитной неразложимости алгебр $\mathbf{B}$. $\square$

Ввиду равносильности CIP и свойства амальгамируемости многообразий (см. теорему 5.1) теорему 7.7 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 7.8. *Свойство амальгамируемости разрешимо на классе стройных многообразий J-алгебр, т. е. существует алгоритм, который по любой конечной системе тождеств определяет, является ли амальгамируемым стройное многообразие алгебр, задаваемое этой системой тождеств.*

§ 8. Заключение

В [14] установлена разрешимость свойства WIP над J. Класс стройных логик содержит все суперинтуиционистские логики и все расширения логики Gl, для которых установлена также разрешимость свойств CIP, IPR и PBP. Как доказано в этой статье, свойство CIP разрешимо и на классе стройных J-логик. Представляется правдоподобным, что свойства IPR и PBP также разрешимы на классе стройных J-логик.

Для семейства всех J-логик следующие проблемы остаются открытыми.

1. Описание всех J-логик с CIP, IPR, PBP. Являются ли множества таких логик конечными? Как показано в [13], существует лишь конечное число стройных J-логик с CIP, IPR или PBP.

2. Верно ли, что все J-логики со свойствами CIP, IPR или PBP конечно аксиоматизируемы? финитно аппроксимируемы? разрешимы?

3. Как уже было отмечено, свойство WIP разрешимо над J. Разрешимы ли над J остальные свойства?

4. Для любой J-логики свойство IPR следует из PBP. В [13] доказано, что обратное верно для любой стройной J-логики. Равносильны ли свойства IPR и PBP на классе всех J-логик?

Добавим для сравнения, что на классе всех модальных логик IPR следует из PBP, но обратное неверно [22].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Johansson I.* Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // Comp. Math. 1937. V. 4. P. 119–136.

2. *Craig W.* Three uses of Herbrand–Gentzen theorem in relating model theory // J. Symb. Log. 1957. V. 22. P. 269–285.

3. *Model-theoretic logic* / J. Barwise, S. Feferman, eds. New York: Springer-Verl., 1985.

4. *Gabbay D. M., Maksimova L.* Interpolation and definability: modal and intuitionistic logics. Oxford: Clarendon Press, 2005.

5. *Schütte K.* Der Interpolationsatz der intuitionistischen Prädikatenlogik // Math. Ann. 1962. Bd 148. S. 192–200.

6. *Gabbay D. M.* Semantical investigations in Heyting's intuitionistic logic. Dordrecht: D. Reidel Publ. Co, 1981.

7. *Beth E. W.* On Padoa's method in the theory of definitions // Indag. Math. 1953. V. 15, N 4. P. 330–339.

8. *Максимова Л. Л.* Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 6. С. 643–681.

9. *Maksimova L. L.* Intuitionistic logic and implicit definability // Ann. Pure Appl. Log. 2000. V. 105, N 1–3. P. 83–102.

10. *Максимова Л. Л.* Разрешимость проективного свойства Бета в многообразиях гейтинговых алгебр // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 3. С. 290–301.

11. *Максимова Л. Л.* Неявная определимость в позитивных логиках // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 1. С. 65–93.
12. *Maksimova L.* Problem of restricted interpolation in superintuitionistic and some modal logics // Log. J. IGPL. 2010. V. 18, N 3. P. 367–380.
13. *Максимова Л. Л.* Проективное свойство Бета и интерполяция в позитивных и близких к ним логиках // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 1. С. 85–113.
14. *Максимова Л. Л.* Разрешимость слабого интерполяционного свойства над минимальной логикой // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 2. С. 152–188.
15. *Maksimova L.* Interpolation and joint consistency // We will show them! Essays in honour of Dov Gabbay / Ed. by S. Artemov, H. Barringer, A. d'Avila Garcez, L. Lamb, J. Woods. London: King's College Publ., 2005. V. 2. P. 293–305.
16. *Максимова Л. Л.* Совместная непротиворечивость в расширениях минимальной логики // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 604–619.
17. *Maksimova L.* Interpolation and definability over the logic Gl // Studia Log. 2011. V. 99, N 1. P. 249–267.
18. *Максимова Л. Л.* Интерполяция и определимость в расширениях минимальной логики // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 726–750.
19. *Максимова Л. Л..* Интерполяция и проективное свойство Бета в стройных J-логиках // Алгебра и логика (в печати).
20. *Максимова Л. Л.* Проективные свойства Бета в модальных и суперинтуиционистских логиках // Алгебра и логика. 1999. Т. 38. С. 316–333.
21. *Kreisel G.* Explicit definability in intuitionistic logic // J. Symb. Log. 1960. V. 25. P. 389–390.
22. *Maksimova L.* Restricted interpolation in modal logics // Advances in modal logic. V. 4. London: College Publ., 2003. P. 297–311.
23. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
24. *Odintsov S. P.* Logic of classical refutability and class of extensions of minimal logic // Log. Log. Philos. 2001. V. 9. P. 91–107.
25. *Miura S.* A remark on the intersection of two logics // Nagoya Math. J. 1966. V. 26. P. 167–171.
26. *McKinsey J., Tarski A.* Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting // J. Symb. Log. 1948. V. 13, N 1. P. 1–15.
27. *McKay C. C.* The decidability of certain intermediate logics // J. Symb. Log. 1968. V. 33. P. 258–264.
28. *Кузнецов А. В., Герчиу В. Я.* О суперинтуиционистских логиках и финитной аппроксимируемости // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195, № 5. С. 1029–1032.
29. *Diego A.* Sur les algebras de Hilbert. Paris: Gauthier-Villars, 1966.
30. *Стукачева М. В.* О дизъюнктивном свойстве в классе паранепротиворечивых расширений минимальной логики // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 2. С. 235–252.
31. *Максимова Л. Л.* Слабая форма интерполяции в эквациональной логике // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 1. С. 94–107.

Статья поступила 19 июля 2011 г.

Максимова Лариса Львовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`lmaksi@math.nsc.ru`