Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 517.9

ОБ АСИМПТОТИКЕ КУСОЧНО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ КОНТАКТНЫМ УСЛОВИЯМ

Н. А. Жура, А. П. Солдатов

Аннотация. Рассматривается кусочно аналитическая функция, заданная в секторах круга и связанная на соседних участках границы контактными условиями для ее реальной и мнимой частей. В предположении степенного характера поведения найдена точная асимптотика этой функции в центре круга.

Ключевые слова: аналитическая функция, контактные условия сопряжения, степенно логарифмическая асимптотика.

Пусть единичный круг разбит на n открытых секторов $S_1, \dots, S_n$ раствора $2\pi/n$, где $n \geq 4$ четно, которые занумеруем в порядке обхода против часовой стрелки. Радиальные отрезки, составляющие боковые стороны секторов, ориентируем от $z = 0$ к единичной окружности, их объединение обозначим через L. Исходя из двух положительных чисел ν_1 и ν_2, составим кусочно постоянную функцию

$$\chi(z) = \begin{cases} \nu_1, & z \in S_1 \cup S_3 \cup \dots \cup S_{n-1}, \\ \nu_2, & z \in S_2 \cup S_4 \cup \dots \cup S_n. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим кусочно аналитическую в $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$ функцию $\phi(z)$, сужение ϕ_j которой на каждый сектор S_j непрерывно в $\overline{S}_j \setminus 0$. В частности, на ориентированной кривой L определена пара ее граничных значений $\phi^{\pm}$. Эти граничные значения подчиним так называемым контактным условиям

$$\operatorname{Re}(\phi^+ - \phi^-) = 0, \quad \operatorname{Im}[(\chi\phi)^+ - (\chi\phi)^-] = c, \tag{2}$$

где функция c постоянна на каждом отрезке, составляющем L. Предположим, кроме того, что $\phi(z)$ допускает оценку

$$|\phi(z)| = O(|z|^\lambda) \quad \text{при } z \to 0 \tag{3}$$

с некоторым $\lambda \in \mathbb{R}$. Заметим, что в случае $\lambda > 0$ кусочно постоянная функция c должна быть равна нулю.

Возникает вопрос: какова точная асимптотика функции $\phi(z)$ в точке $z = 0$? При $n = 6$ этот вопрос тесно связан с задачей об эффективной проводимости [1] в регулярной двухкомпонентной системе, составленной из правильных треугольников. Вопросы подобного рода возникают и в других приложениях, например в обратной задаче теории рассеяния, связанной с матричной задачей

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 14.A18.21.0357).

Римана [2]. В данной статье получено решение этого вопроса в рамках нелокальной задачи Римана, изученной в [3, 4].

С этой целью постановку (1), (2) задачи перепишем в форме краевых условий задачи Римана. Обозначим через $\partial^0 S_j$ и $\partial^1 S_j$ боковые стороны сектора S_j, считая, что поворот от $\partial^0 S_j$ к $\partial^1 S_j$ внутри сектора осуществляется против часовой стрелки. Все боковые стороны занумеруем единым образом:

$$\begin{matrix} \partial^1 S_1 & \partial^0 S_2 & \partial^1 S_2 & \partial^0 S_2 & \dots & \partial^1 S_n & \partial^0 S_1 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & \dots & \Gamma_{2n-1} & \Gamma_{2n}, \end{matrix} \tag{4}$$

так что отрезки $L_1 = \Gamma_1 = \Gamma_2, L_2 = \Gamma_3 = \Gamma_4, \dots, L_n = \Gamma_{2n-1} = \Gamma_{2n}$ составляют L. Отрезок Γ_j параметризуем линейным уравнением $\gamma_j(s) = \gamma_j'(0)s$, $0 \le s \le 1$, где $|\gamma_j'(0)| = 1$. С помощью этих параметризаций граничные значения $\phi^\pm$ можем снести на отрезок $(0, 1]$ действительной оси. Более точно, положим

$$\phi_{\gamma,1} = \phi_1^- \circ \gamma_1,\ \phi_{\gamma,2} = \phi_1^+ \circ \gamma_2,\ \phi_{\gamma,3} = \phi_2^- \circ \gamma_3, \dots, \phi_{\gamma,2n} = \phi_1^+ \circ \gamma_{2n}.$$

В этих обозначениях краевое условие (2) запишется в виде

$$\operatorname{Re} A\phi_\gamma = f, \tag{5}$$

где матрица A блочно-диагональна: $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_1, a_2, \dots, a_1, a_2)$ с диагональными блоками

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i\nu_1 & -i\nu_2, \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i\nu_2 & -i\nu_1, \end{pmatrix},$$

и аналогично положено $f = (f_1, \dots, f_n)$ с $f_j = (0, c|_{L_j})$.

В соответствии с (4) отрезки Γ_1 и Γ_{2n} составляют боковые стороны сектора S_1, причем первый по отношению к этому сектору ориентирован отрицательно, а второй — положительно. Аналогичным образом отрезок Γ_3 ориентирован отрицательно, а Γ_2 — положительно по отношению к S_2, и т. д. В соответствии с этим имеем сигнатуру ориентации $\sigma = (\sigma_j)_1^{2n}$, где $\sigma_j = 1$ для четного j и $\sigma_j = -1$ для нечетного j. Пусть матрица A^σ получается из A путем комплексного сопряжения j-го столбца, если $\sigma_j = -1$, и сохранением этого столбца, если $\sigma_j = 1$. Тогда матрица $B = (A^\sigma)^{-1} A^{-\sigma}$ имеет блочно-диагональный вид $B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, b_1, b_2, \dots, b_1, b_2)$, где

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i\nu_1 & -i\nu_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i\nu_1 & i\nu_2, \end{pmatrix} = \frac{1}{\nu_1 + \nu_2} \begin{pmatrix} -\nu_1 + \nu_2 & -2\nu_2 \\ -2\nu_1 & \nu_1 - \nu_2 \end{pmatrix}$$

и b_2 определяется аналогично перестановкой ν_1 и ν_2. Полагая $s = (\nu_1 + \nu_2)/2$, $\delta = (\nu_1 - \nu_2)/2$, можем записать

$$b_1 = -\frac{1}{s} \begin{pmatrix} \delta & \nu_2 \\ \nu_1 & -\delta \end{pmatrix}, \quad b_2 = -\frac{1}{s} \begin{pmatrix} -\delta & \nu_1 \\ \nu_2 & \delta \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Диагональный блок концевого символа [3], отвечающий краевым условиям (5) на боковых сторонах секторов $S_1, \dots, S_n$, представляет собой $(2n \times 2n)$-матрицу

$$X(\zeta) = B + z(\zeta) T_\alpha, \quad z(\zeta) = e^{\pi i \zeta / n}, \tag{7}$$

где $T_\alpha = (\delta_{\alpha i, j})_1^{2n}$ — матрица перестановки

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 2n & 3 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n-2 & 1 \end{pmatrix},$$

определяемой боковыми сторонами секторов S_j в (4).

Результаты [3] применительно к задаче (1)–(3) сформулируем следующим образом.

Теорема 1. *В каждой полосе $\lambda_1 < \operatorname{Re}\zeta < \lambda_2$ функция $\det X(\zeta)$ имеет конечное число нулей. Пусть Δ — проекция на действительную прямую множества этих нулей и выполнено условие* (3) *с $\lambda \notin \Delta$. Пусть точка $\delta \in \Delta$ такова, что $\delta > \lambda$ и $\Delta \cap (\lambda, \delta) = \varnothing$. Пусть $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ — все нули функции $\det X(\zeta)$ на прямой $\operatorname{Re}\zeta = \delta$ и $r_1, \dots, r_n$ — порядки полюсов матрицы-функции $X^{-1}(\zeta)$ в этих точках соответственно. Тогда при $\delta \neq 0$ в каждом секторе S_i функция $\phi(z)$ представима в виде*

$$\phi(z) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j-1} c_{jk} (\ln z)^k z^{\zeta_j} + O(|z|^{\delta+\varepsilon}) \tag{8}$$

с некоторыми $c_{jk} \in \mathbb{C}$ и $\varepsilon > 0$.

Если $\delta = 0$ и $0 \notin \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$, то в этом разложении последнее слагаемое надо заменить на $c + O(|z|^{\varepsilon})$, $c \in \mathbb{C}$. Наконец, пусть $\delta = 0$ и, например, $\zeta_1 = 0$. Тогда имеет место разложение (8)*, в котором $r_1 - 1$ нужно заменить на r_1.*

В соответствии с этой теоремой опишем нули функции $\det X$ и порядки полюсов X^{-1}. Удобно ввести обозначения

$$\delta = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}, \quad s = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}, \quad \nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}, \quad q = \frac{\nu}{s}, \tag{9}$$

часть из которых уже использовалась в (6).

Лемма 1. *Все нули функции $\det X(\zeta)$ простые и описываются равенствами*

$$\zeta = \pm \frac{\arccos(1 - 2q^2 \sin^2 k\theta)}{2\theta} + \frac{\pi s}{\theta}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \; s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{10}$$

где положено $\theta = 2\pi/n$.

Доказательство. В классе целых $(n_j \times n_j)$-матриц-функций $X_j(\zeta)$, $j = 1, 2$, удобно ввести следующее отношение эквивалентности: $X_1 \sim X_2$, если существуют целые $(n_1 \times n_1)$-матрицы-функции $Y(\zeta)$, $Z(\zeta)$, произведение определителей которых постоянно и отлично от нуля, такие, что

$$Y X_1 Z = \operatorname{diag}(1, X_2),$$

где для определенности $n_1 \geq n_2$ и 1 означает единичную $((n_1 - n_2) \times (n_1 - n_2))$-матрицу (при $n_1 = n_2$ правую часть этого соотношения следует заменить на X_2).

Обратимся к матрице (7). Пусть T_β — матрица некоторой перестановки β. Произведение BT_β представляет собой матрицу с элементами

$$(BT_\beta)_{ij} = B_{i, \beta^{-1} j}.$$

Следовательно, умножение B на T_β справа равносильно перестановке β^{-1} ее столбцов $B_1, \dots, B_n$, т. е. j-й столбец $(BT_\beta)_j = B_{\beta^{-1} j}$. Кроме того, $T_\alpha T_\beta = T_{\beta \circ \alpha}$. В частности, для матрицы перестановки, фигурирующей в (7), имеем равенство $T_\alpha^2 = 1$, так что $X \sim BT_\alpha + z \sim BT_\alpha T_\beta + zT_\beta$. Выберем в качестве β циклическую перестановку $1 \to 2 \to \dots \to 2n \to 1$. Если T_β записать в виде блочной $(n \times n)$-матрицы, группируя номера $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}$, то получим

$$T_\beta = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_1 & e_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e_1 & e_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e_1 \end{pmatrix}$$

с (2×2)-матрицами

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу $BT_\alpha T_\beta = BT_{\beta\circ\alpha}$. Нетрудно видеть, что перестановка $(\beta \circ \alpha)^{-1} = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1} = \alpha \circ \beta^{-1}$ оставляет неподвижными нечетные номера и осуществляет циклическую перестановку $2 \to 2n \to 2n-2 \to \cdots \to 4 \to 2$ четных номеров. Поэтому для столбцов матрицы $\widetilde{B} = BT_\alpha T_\beta$ можем записать

$$\widetilde{B}_i = \begin{cases} B_i, & i = 1, 3, \ldots, 2n-1, \\ B_{2n}, & i = 2, \\ B_{i-2}, & i = 4, 6, \ldots, 2n. \end{cases}$$

Вспоминая определение матрицы B в (7) и пользуясь обозначениями (6), матрицу $\widetilde{B}$ также можем записать в аналогичном $(n \times n)$-блочном виде:

$$-sBT_\alpha T_\beta = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & d_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_2 \end{pmatrix}$$

с (2×2)-матрицами

$$c_1 = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ \nu_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_1 = \begin{pmatrix} 0 & \nu_2 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \nu_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X \sim -sBT_\alpha T_\beta - szT_\beta \sim \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & q_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

с (2×2)-матрицами

$$p_1 = \begin{pmatrix} \delta & -sz \\ \nu_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} 0 & \nu_2 \\ -sz & -\delta \end{pmatrix},$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} -\delta & -sz \\ \nu_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 \\ -sz & \delta \end{pmatrix}.$$

Полагая $P = \mathrm{diag}(p_1, p_2, p_1, p_2, p_1, p_2)$ и $x_j = p_j^{-1} q_j$, можем записать таким образом:

$$P^{-1}X \sim \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Вычитая из второго столбца матрицы в правой части этого соотношения первый столбец, умноженный справа на x_1, получим эквивалентную матрицу

$$P^{-1}X \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2 & -x_2x_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьего столбца последней матрицы второй столбец, умноженный справа на x_2, и продолжая этот процесс, в результате придем к соотношению $P^{-1}X \sim 1 + Y$, где, за исключением последней строки, все элементы блочной $(n \times n)$-матрицы Y равны нулю, а последняя строка составлена из элементов

$$x_2, -(x_2x_1), (x_2x_1)x_2, -(x_2x_1)^2, (x_2x_1)^2x_2, \dots, -(x_2x_1)^{n/2}.$$

Таким образом,

$$P^{-1}X \sim \begin{pmatrix} 1_{2n-2} & 0 \\ \cdots & 1-(x_2x_1)^{n/2} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где 1_k означает единичную $(k \times k)$-матрицу. Из (11) видно, что

$$p_1 \sim \begin{pmatrix} -sz & \delta \\ 0 & \nu_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -sz & 0 \\ 0 & \nu_1 \end{pmatrix}, \quad p_2 \sim \begin{pmatrix} -sz & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, $P \sim \operatorname{diag}(1_n, z1_n)$. Отсюда с учетом (13) имеем

$$X \sim \operatorname{diag}(1_n, z1_n)\operatorname{diag}[1_{2n-2}, 1-(x_2x_1)^{n/2}] \sim z\operatorname{diag}[1_{n-2}, 1-(x_2x_1)^{n/2}]. \tag{14}$$

Согласно (9), (11)

$$x_1 = -\frac{1}{\nu_1 z}\begin{pmatrix} sz^2 & \delta z \\ \delta z & s \end{pmatrix}, \quad x_2 = -\frac{1}{\nu_2 z}\begin{pmatrix} sz^2 & -\delta z \\ -\delta z & s \end{pmatrix}$$

и

$$x = x_2x_1 = \frac{1}{\nu^2z^2}\begin{pmatrix} s^2z^4 - \delta^2z^2 & \delta sz^3 - s\delta z \\ -\delta sz^3 + s\delta z & -\delta^2z^2 + s^2 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Запишем

$$x^{n/2} - 1 = \prod_{k=0}^{n/2-1}(x - \varepsilon_k), \quad \varepsilon_k = e^{4\pi ik/n}.$$

Тогда с учетом (14)

$$\det X \sim z^n \prod_{k=0}^{n/2-1}\det(x - \varepsilon_k). \tag{16}$$

В силу (15)

$$x - \varepsilon = \frac{1}{\nu^2z^2}\begin{pmatrix} s^2z^4 - a^2z^2 & \delta sz(z^2-1) \\ -\delta sz(z^2-1) & s^2 - a^2z^2 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \delta^2 + \varepsilon_k\nu^2,$$

и после несложных вычислений получим

$$\det(x - \varepsilon_k) = \frac{\varepsilon_k}{\nu^2z^2}\left[s^2z^4 - \left(\frac{\nu^2}{\varepsilon_k} + \nu^2\varepsilon_k + 2\delta^2\right)z^2 + s^2\right] = \frac{\varepsilon_k h_k(z^2)}{q^2z^2} \tag{17}$$

с квадратным трехчленом

$$h_k(t) = t^2 - 2(1 - q^2 + q^2\cos 2k\theta)t + 1 = t^2 - 2(1 - 2q^2\sin^2 k\theta)t + 1,$$

где для краткости положено $\theta = 2\pi/n$. Корнями этого многочлена служат два комплексно сопряженных корня

$$1 - 2q^2\sin^2 k\theta \pm 2iq(\sin 2k\theta)\sqrt{1 - q^2\sin^2 k\theta} = e^{\pm i\varphi_k}, \quad \varphi_k = \arccos(1 - 2q^2\sin^2 k\theta).$$

Совместно с (16), (17) отсюда получим окончательно

$$\det X \sim \prod_{k=0}^{n/2-1}[(z^2 - e^{i\varphi_k})(z^2 - e^{-i\varphi_k})].$$

Вспоминая, что $z^2 = e^{2i\theta\zeta}$, заключаем, что все нули функции $\det X(\zeta)$ простые и даются формулой (10).

Лемма 1 и теорема 1 приводят к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть $\delta > \lambda$ — ближайшая к λ точка вида (10). Тогда в каждом секторе S_j функция $\phi(z)$ представима в виде*

$$\phi(z) = cz^\delta + O(|z|^{\delta+\varepsilon}), \quad c \neq 0, \tag{18}$$

при $\delta \neq 0$ и в виде

$$\phi(z) = c_0 + c_1 \ln z + O(|z|^\varepsilon), \quad |c_0| + |c_1| \neq 0, \tag{19}$$

при $\delta = 0$.

В заключение остановимся на случае $\nu_1 = \nu_2$. В этом случае $q = 1$ и (10) переходит в целочисленные точки прямой. С другой стороны, при $\nu_1 = \nu_2$ и $c = 0$ соотношения (1), (2) приводят к аналитичности $\phi(z)$ в проколотом единичном круге, и, следовательно, $\phi(z)$ может допускать только полюсы, что согласуется с (18). Если $-1 < \lambda < 0$ и $c \neq 0$ в (2), то $\phi(z)$ имеет логарифмическое разложение (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овчинников Ю. Н., Лукьянчук И. А.* Проводимость и распределение поля и токов в двухкомпонентной системе, составленной из правильных треугольников // Журн. эксперимент. и теор. физики. 2002. Т. 121, № 1. С. 239–252.
2. *Итс А. Р., Суханов В. В.* Матричная задача Римана и обратные задачи теории рассеяния // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 3. С. 534–538.
3. *Солдатов А. П.* Краевые задачи теории функций в областях с кусочно-гладкой границей. Тбилиси: Изд-во ТГУ; Ин-т прикл. математики им. И. Н. Векуа, 1991. Ч. 11.
4. *Солдатов А. П.* Обобщенная задача Римана на римановой поверхности // Докл. РАН. 1998. Т. 362, № 6. С. 735–738.

Статья поступила 8 октября 2011 г.

Жура Николай Андреевич
Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН,
Ленинский пр., 53, Москва 119991

Солдатов Александр Павлович
Белгородский гос. национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород 308015
soldatov48@gmail.com