*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2012. Том 53, № 4*

*УДК 512.66*

# ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ КАТЕГОРИЙ ОТ ЧАСТИЧНО КОММУТИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**А. А. Хусаинов**

**Аннотация.** Изучается глобальная размерность категории объектов абелевой категории, на которых действует свободный частично коммутативный моноид. Эта размерность вычислена для случая, когда абелева категория имеет бесконечные копроизведения и достаточное число проективных объектов. Ранее данная проблема была решена автором для абелевой категории с точными копроизведениями.

**Ключевые слова:** когомологии малых категорий, свободный частично коммутативный моноид, моноид трасс, глобальная размерность.

## Введение

Работа посвящена глобальной размерности категории объектов абелевой категории, на которых действует свободный частично коммутативный моноид. Мы вычисляем эту размерность для случая, когда абелева категория имеет (бесконечные) копроизведения и достаточное число проективных объектов. В [1] эта проблема решена для абелевой категории с точными копроизведениями.

Как известно [2, теорема 4.3.7], для любого кольца $R$ с 1 глобальная размерность кольца многочленов $\operatorname{gl.dim} R[x_1, \dots, x_n]$ от $n$ переменных равна $n + \operatorname{gl.dim} R$. Более того, согласно [3, теорема IX.2.1] имеет место равенство

$$\operatorname{gl.dim} \mathcal{A}[x_1, \dots, x_n] = n + \operatorname{gl.dim} \mathcal{A}$$

в случае абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными счетными копроизведениями и достаточным числом проективных объектов. Здесь $\mathcal{A}[x_1, \dots, x_n]$ — категория, которая называется *полиномиальной* и состоит из объектов категории $\mathcal{A}$ с действием свободного коммутативного моноида с $n$ порождающими. В дальнейшем этот результат был развит и обобщен в работах Митчела [4, 5]. В частности, удалось освободиться от условия существования достаточного числа проективных объектов в $\mathcal{A}$. Но в этих работах $\mathcal{A}$ должна иметь точные копроизведения.

*Полиномиальной категорией от частично коммутирующих переменных* называется категория объектов абелевой категории с действием свободного частично коммутативного моноида. Чему равна ее глобальная размерность? В [1] доказано, что для любых свободного частично коммутативного моноида $M(E, I)$ и абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными копроизведениями верно равенство

$$\operatorname{gl.dim} \mathcal{A}^{M(E,I)} = \omega(E, I) + \operatorname{gl.dim} \mathcal{A}.$$

Работа выполнена в рамках программы стратегического развития государственных образовательных учреждений высшего профессионального образования (№ 2011–ПР–054).

Здесь $\omega(E, I)$ — точная верхняя грань (в множестве $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) мощностей конечных подмножеств из $E$, состоящих из попарно перестановочных элементов, $\mathcal{A}^{M(E,I)}$ обозначает категорию объектов из $\mathcal{A}$ с левым действием моноида $M(E, I)$. Данная работа посвящена следующему вопросу: будет ли это равенство верно без предположения точности копроизведений в случае, когда $\mathcal{A}$ имеет достаточное число проективных объектов?

Мы даем положительный ответ на этот вопрос (теорема 3.3). Тем самым частично подтверждена выдвинутая в [1] гипотеза о том, что это равенство имеет место в случае произвольной абелевой категории $\mathcal{A}$ с копроизведениями.

Свободные частично коммутативные моноиды и их группы гомологий применяются для изучения математических моделей параллельных вычислительных систем [6, 7].

## 1. Предварительные сведения

В этом разделе напомним определения проективной и глобальной размерности для абелевых категорий с достаточным числом проективных объектов и познакомимся со свободными частично коммутативными моноидами. В настоящей работе эти моноиды могут иметь бесконечное множество порождающих.

**1.1. Обозначения и определения.** Будем применять следующие обозначения: Set — категория множеств и отображений, Ab — категория абелевых групп и гомоморфизмов, $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел, $\mathbb{N}$ — множество неотрицательных целых чисел. Для произвольной категории $\mathcal{A}$ и объектов $A_1, A_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}(A_1, A_2)$ обозначается множество морфизмов $A_1 \to A_2$.

Функтор, определенный на малой категории и принимающий значения в произвольной категории, называется *диаграммой*.

Пусть $\mathscr{C}$ — малая категория. Обозначим через $\mathcal{A}^{\mathscr{C}}$ категорию диаграмм $\mathscr{C} \to \mathcal{A}$ и естественных преобразований. Для объекта $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ через $\Delta_{\mathscr{C}}A$ или, коротко, $\Delta A$ обозначается диаграмма $\mathscr{C} \to \mathcal{A}$, принимающая постоянные значения, равные $A$ на объектах и $1_A$ на морфизмах.

Будем придерживаться стандартной терминологии из теории абелевых категорий [2, 3]. Если в абелевой категории $\mathcal{A}$ для каждого объекта $A$ существуют проективный объект $P$ и эпиморфизм $P \to A$, то $A$ называется *абелевой категорией с достаточным числом проективных объектов.* В этом случае наименьшая из длин $n$ проективных резольвент (если существуют проективные резольвенты конечной длины)

$$0 \leftarrow A \leftarrow P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow \cdots \leftarrow P_n \leftarrow 0$$

ненулевого объекта $A \in \mathcal{A}$ называется *проективной размерностью* объекта $A$ и обозначается через $\operatorname{pd} A$. Для нулевого объекта положим $\operatorname{pd} 0 = -1$. Если объект $\mathcal{A}$ не имеет проективных резольвент конечной длины, то $\operatorname{pd} A = \infty$.

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория с достаточным числом проективных объектов. *Глобальной размерностью* $\operatorname{gl.dim}\mathcal{A}$ называется точная верхняя грань проективных размерностей объектов категории $\mathcal{A}$. Точная верхняя грань берется в множестве $\{-1\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, упорядоченном обычным образом.

**1.2. Свободные частично коммутативные моноиды.** Пусть $E$ — произвольное множество, его элементы будем называть *символами*, конечные последовательности $a_1a_2 \dots a_n$ — *словами длины $n$*. Множество $E^*$ всех слов, включая пустое слово 1, будет моноидом относительно операции, сопоставляющей любой паре слов $u = a_1 \dots a_m$ и $v = b_1 \dots b_n$ слово $uv = a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n$, полученное приписыванием слова $v$ к слову $u$. Оно называется *свободным моноидом, порожденным множеством $E$*. *Отношением независимости* на множестве $E$ называется произвольное бинарное антирефлексивное симметричное отношение $I \subseteq E \times E$. Если на $E$ задано отношение независимости, то, отождествляя слова $uabv$ и $ubav$ для всех $u, v \in E^*$, $(a, b) \in I$, получим *свободный частично коммутативный моноид*. Чтобы дать более точное определение, заметим, что наименьшее отношение эквивалентности $\equiv_I$ на $E^*$ такое, что для всех $u, v \in E^*$ и $(a, b) \in I$ имеет место $uabv \equiv_I ubav$, будет отношением конгруэнтности.

Определение 1.1. Для произвольного множества $E$ и отношения независимости $I \subseteq E \times E$ множество классов эквивалентности $[w]$ слов $w \in E^*$, отвечающее отношению $\equiv_I$, с операцией $([u], [v]) \mapsto [uv]$ называется *свободным частично коммутативным моноидом $M(E, I)$*.

Пару $(E, I)$ можно рассматривать как простой граф с множеством вершин $E$, элементы которого $a, b \in E$ соединяются ребром в тех случаях, когда $(a, b) \in I$. Он называется *графом независимости моноида $M(E, I)$*. Например, граф независимости моноида, заданного с помощью множества порождающих $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ и соотношений $ab = ba$, $bc = cb$, $cd = dc$, $ad = da$, $ae = ea$, $de = ed$, $df = fd$, имеет вид

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
b \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & e \arrow[dl] \\
c \arrow[r] & d \arrow[r] & f
\end{tikzcd}.$$

*Кликой* простого графа $(E, I)$ называется конечное подмножество его вершин, любая пара из которых имеет общее ребро. *Плотностью* $\omega(E, I)$ простого графа называется точная верхняя грань мощностей его клик. Если для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует клика, имеющая $n$ вершин, то полагаем $\omega(E, I) = \infty$.

Например, для показанного выше графа плотность равна 3.

## 2. Когомологическая размерность

Введем когомологическую размерность малой категории. Приведем формулы для вычисления когомологической размерности моноида $M(E, I)$ и категории факторизаций $\mathfrak{F}M(E, I)$.

**2.1. Когомологическая размерность малой категории** Пусть $\mathscr{C}$ — малая категория. Ее *когомологической размерностью* $\operatorname{cd}\mathscr{C}$ называется проективная размерность объекта $\Delta_{\mathscr{C}}\mathbb{Z}$ в категории диаграмм абелевых групп $\mathrm{Ab}^{\mathscr{C}}$.

Дадим определение когомологической размерности малой категории с помощью комплекса абелевых групп. Для произвольного семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ абелевых групп декартово произведение $\prod\limits_{i \in I} A_i$ будем рассматривать как абелеву группу функций $\varphi : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, принимающих для всех $i \in I$ значения $\varphi(i) \in A_i$.

Для каждого функтора $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ рассмотрим последовательность абелевых групп

$$C^0(\mathscr{C}, F) = \prod_{c_0 \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}} F(c_0), \ldots, C^n(\mathscr{C}, F) = \prod_{c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \ldots \xrightarrow{\alpha_n} c_n} F(c_n), \ldots$$

и гомоморфизмов $\delta^n : C^n(\mathscr{C}, F) \to C^{n+1}(\mathscr{C}, F)$, действующих по формуле

$$(\delta^n\varphi)(c_0 \overset{\alpha_1}{\to} \dots \overset{\alpha_{n+1}}{\to} c_{n+1})$$
$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\varphi(c_0 \overset{\alpha_1}{\to} \dots \overset{\alpha_i}{\to} \hat{c}_i \overset{\alpha_{i+1}}{\to} \dots \overset{\alpha_{n+1}}{\to} c_{n+1})$$
$$+ (-1)^{n+1}F(c_n \overset{\alpha_{n+1}}{\to} c_{n+1})(\varphi(c_0 \overset{\alpha_1}{\to} \dots \overset{\alpha_n}{\to} c_n)).$$

Здесь $c_0 \overset{\alpha_1}{\to} c_1 \overset{\alpha_2}{\to} \dots \overset{\alpha_i}{\to} \hat{c}_i \overset{\alpha_{i+1}}{\to} \dots \overset{\alpha_n}{\to} c_n$ обозначает последовательность $n-1$ морфизмов, полученную при $0 < i < n$ из последовательности $c_0 \overset{\alpha_1}{\to} c_1 \overset{\alpha_2}{\to} \dots \overset{\alpha_n}{\to} c_n$ с помощью замены морфизмов $c_{i-1} \overset{\alpha_i}{\to} c_i \overset{\alpha_{i+1}}{\to} c_{i+1}$ их композицией $c_{i-1} \overset{\alpha_{i+1}\circ\alpha_i}{\longrightarrow} c_{i+1}$. При $i = 0$ просто удаляются объект $c_0$ и морфизм $\alpha_1$, а при $i = n$ — объект $c_n$ и морфизм $\alpha_n$. Положим $C^n(\mathscr{C}, F) = 0$ при $n < 0$. Для всех целых $n$ имеют место равенства $\delta^{n+1}\delta^n = 0$. Полученный коцепной комплекс обозначим через $C^*(\mathscr{C}, F)$. Абелевы группы $H^n(C^*(\mathscr{C}, F)) = \operatorname{Ker}\delta^{n+1}/\operatorname{Im}\delta^n$ называются *группами когомологий малой категории* $\mathscr{C}$ *с коэффициентами в диаграмме* $F$ и обозначаются через $\varprojlim^n_{\mathscr{C}} F$.

С помощью утверждения [8, приложение 2, предложение 3.3], примененного к абелевой категории $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}^{op}$, легко доказать, что функторы $\varprojlim^n_{\mathscr{C}}$ будут $n$-ми правыми сателлитами функтора предела $\varprojlim_{\mathscr{C}} : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Ab}$. Поскольку категория $\mathrm{Ab}^{\mathscr{C}}$ обладает достаточным числом инъективных объектов, функторы $\varprojlim^n_{\mathscr{C}}$ изоморфны правым производным функторам функтора предела.

Легко видеть, что когомологическая размерность $\operatorname{cd}\mathscr{C}$ равна точной верхней грани в $\{-1\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ множества чисел $n \in \mathbb{N}$, для которых функторы $\varprojlim^n_{\mathscr{C}} : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Ab}$ не равны 0.

**2.2. Когомологическая размерность свободного частично-коммутативного моноида.** История вычисления когомологической размерности свободного частично коммутативного моноида связана с построением минимальной свободной резольvenты объекта $\Delta_{M(E,I)}R \in \mathrm{Mod}_R^{M(E,I)}$, где $R$ — поле либо кольцо целых чисел. Для произвольных поля $k$ и конечно порожденного свободного частично коммутативного моноида $M(E,I)$ минимальная свободная резольвента для $\Delta_{M(E,I)}k$ известна из [9]. Длина этой резольвенты равна $\omega(E,I)$. Стало быть, $\operatorname{pd}\Delta_{M(E,I)}k = \omega(E,I)$. Отсюда не следует равенство $\operatorname{gl.dim}\mathrm{Mod}_k^{M(E,I)} = \omega(E,I)$, ибо $\operatorname{gl.dim}\mathrm{Mod}_k^{M(E,I)}$ — точная верхняя грань чисел $\operatorname{pd}V$, взятая по всем объектам $V \in \mathrm{Mod}_k^{M(E,I)}$, тогда как $\operatorname{pd}\Delta_{M(E,I)}k$ — проективная размерность одного из объектов этой категории.

В работе Л. Ю. Поляковой [10] тоже в случае конечного множества $E$ построена свободная резольвента $M(E,I)$-модуля $\Delta_{M(E,I)}\mathbb{Z}$. Ее длина не больше $\omega(E,I)$. Аналогичная резольвента построена в [11, следствие 2.19] для локально конечномерного свободного частично коммутативного моноида. В этих случаях получаем равенство $\operatorname{cd}M(E,I) = \omega(E,I)$. Будет ли это равенство верно для любых свободных частично коммутативных моноидов? Мы дадим ответ в конце этой части.

**2.3. Когомологическая размерность категории факторизаций.** Пусть $\mathscr{C}$ — малая категория. Множество объектов ее *категории факторизаций* $\mathfrak{F}\mathscr{C}$ [12] состоит из всех морфизмов категории $\mathscr{C}$. Для любых $\alpha, \beta \in \operatorname{Ob}\mathfrak{F}\mathscr{C} = \operatorname{Mor}\mathscr{C}$ множества морфизмов состоят из пар $(f, g)$ морфизмов из $\mathscr{C}$, удовлетворяющих соотношению $g \circ \alpha \circ f = \beta$. Композиция морфизмов $\alpha \overset{(f_1,g_1)}{\longrightarrow} \beta$ и

$\beta \xrightarrow{(f_2,g_2)} \gamma$ определяется как $\alpha \xrightarrow{(f_1\circ f_2, g_2\circ g_1)} \gamma$. Тождественный морфизм объекта $a \xrightarrow{\alpha} b$ категории $\mathfrak{F}\mathscr{C}$ состоит из пары тождественных морфизмов $\alpha \xrightarrow{(1_a,1_b)} \alpha$.

*Натуральной системой абелевых групп на малой категории* $\mathscr{C}$ называется произвольный функтор $F : \mathfrak{F}\mathscr{C} \to Ab$. Бауэс и Виршинг ввели в [12] определение групп когомологий $H^n(\mathscr{C}, F)$ и доказали, что они естественно изоморфны $\varprojlim^n_{\mathfrak{F}\mathscr{C}} F$. *Размерностью Бауэса — Виршинга* $\operatorname{Dim}\mathscr{C}$ называется когомологическая размерность категории $\mathfrak{F}\mathscr{C}$.

Рассматривая моноид $M(E,I)$ как категорию с единственным объектом, приходим к его категории факторизаций и размерности Бауэса — Виршинга $\operatorname{Dim} M(E,I) = \operatorname{cd}\mathfrak{F}M(E,I)$.

**Предложение 2.1** [1, теорема 6]. $\operatorname{Dim} M(E,I) = \omega(E,I)$.

Перейдем к вычислению когомологической размерности произвольного свободного частично коммутативного моноида. Оценим $\operatorname{cd} M(E,I)$ снизу.

**Лемма 2.2.** *Если $E$ содержит конечное подмножество $S$ попарно независимых элементов, то* $\operatorname{cd} M(E,I) \geq |S|$.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $r : M(E,I) \to M(S)$ на порожденный множеством $S$ подмоноид, определяя его на элементах из $E$, полагая $r(e) = e$, если $e \in S$, и $r(e) = 1$ в других случаях. Получим ретракцию. Согласно свойству [5, 5.(2)] если существует ретракция малых категорий $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$, то $\operatorname{cd}\mathscr{C} \geq \operatorname{cd}\mathscr{D}$. Получаем $\operatorname{cd} M(E,I) \geq \operatorname{cd} M(S) = |S|$. $\square$

В силу леммы 2.2 верно неравенство $\omega(E,I) \leq \operatorname{cd} M(E,I)$. Применяя неравенство $\operatorname{cd}\mathscr{C} \leq \operatorname{Dim}\mathscr{C}$, справедливое для любой малой категории [12], получим $\omega(E,I) \leq \operatorname{cd} M(E,I) \leq \operatorname{Dim} M(E,I)$. Из предложения 2.1 вытекает

**Следствие 2.3.** $\operatorname{cd} M(E,I) = \omega(E,I)$.

Замечание 2.1. В общем случае когомологическая размерность моноида с сокращениями не равна его размерности Бауэса — Виршинга. Из [13, следствие 3.4] вытекает, что моноиды с сокращениями $M$ размерности $\operatorname{Dim} M \leq 1$ исчерпываются частично свободными, в то время как Б. В. Новиков [14] доказал, что существуют моноиды с сокращениями размерности $\operatorname{cd} M \leq 1$, которые не являются частично свободными.

## 3. Глобальная размерность

Докажем вспомогательное утверждение об оценке глобальной размерности $\operatorname{gl.dim}\mathcal{A}^{\mathscr{C}} \leq \dim\mathscr{C} + \operatorname{gl.dim}\mathcal{A}$ для произвольных малой категории $\mathscr{C}$ и абелевой категории $\mathcal{A}$ с копроизведениями и достаточным числом проективных объектов. В случае $\mathscr{C} = M(E,I)$ эта оценка приведет к основному результату работы.

**3.1. Размерность Хохшильда — Митчела.** Рассмотрим размерность Хохшильда — Митчела малой категории и ее применение для оценки глобальной размерности категории диаграмм.

Пусть $\mathscr{C}$ — малая категория. Рассмотрим категорию $\mathrm{Ab}^{\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C}}$ функторов $\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$. Определим функтор $\mathbb{Z}\mathscr{C} : \mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ как композицию функторов

$$\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C} \xrightarrow{\mathscr{C}(-,=)} \mathrm{Set} \xrightarrow{L} \mathrm{Ab},$$

первый из которых равен функтору морфизмов, а второй $L$ сопоставляет каждому множеству свободную абелеву группу, порожденную этим множеством, отображению — гомоморфизм свободных абелевых групп, продолжающий это отображение.

Для любого функтора $D : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ абелевы группы $\mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}\mathscr{C}, D)$ называются *$n$-ми группами когомологий Хохшильда — Митчела категории $\mathscr{C}$ с коэффициентами в* $D \in \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C}}$.

*Размерность Хохшильда — Митчела* определяется по формуле $\dim \mathscr{C} = \mathrm{pd}\, \mathbb{Z}\mathscr{C}$.

Определен функтор $(s,t) : \mathfrak{F}\mathscr{C} \to \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C}$, сопоставляющий каждому $\alpha \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{F}\mathscr{C}) = \mathrm{Mor}\, \mathscr{C}$ объект $(s(\alpha), t(\alpha))$ категории $\mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C}$, где $s(\alpha)$ — начало, а $t(\alpha)$ — конец морфизма $\alpha$. Функтор $(s,t)$ сопоставляет морфизмам $\alpha \overset{(f,g)}{\to} \beta$ морфизмы $(f,g)$ категории $\mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C}$.

Согласно [12, 1.18] для всех $n \geq 0$ существуют естественные по $D$ изоморфизмы $\mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}\mathscr{C}, D) \cong \varprojlim^n_{\mathfrak{F}\mathscr{C}}(D \circ (s,t))$.

Имеют место неравенства $\mathrm{cd}\, \mathscr{C} \leq \dim \mathscr{C} \leq \mathrm{Dim}\, \mathscr{C}$ [12]. Поскольку $\mathrm{cd}\, M(E,I) = \mathrm{Dim}\, M(E,I)$, получаем

**Следствие 3.1.** $\dim M(E,I) = \omega(E,I)$.

**Лемма 3.2.** *Пусть $\mathscr{C}$ — малая категория, а $\mathcal{A}$ — абелева категория с копроизведениями и достаточным числом проективных объектов. Тогда* $\mathrm{gl.dim}\, \mathcal{A}^{\mathscr{C}} \leq \dim \mathscr{C} + \mathrm{gl.dim}\, \mathcal{A}$.

Доказательство. В случае $\dim \mathscr{C} = \infty$ или $\mathrm{gl.dim}\, \mathcal{A} = \infty$ утверждение очевидно. Пусть $\dim \mathscr{C} = m$ и $\mathrm{gl.dim}\, \mathcal{A} = k$ конечны. Согласно [15, 2.6, 2.7] существует спектральная последовательность первой четверти, состоящая из абелевых групп

$$E_2^{p,q} = \varprojlim{}^p_{\mathfrak{F}\mathscr{C}} \{\mathrm{Ext}^q(F(s\alpha), G(t\alpha))\}_{\alpha \in \mathfrak{F}\mathscr{C}} \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(F,G).$$

Пусть $\mathrm{EXT}^q(F,G) : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ — функтор, принимающий на объектах $(a,b)$ значения $\mathrm{Ext}^q(F(a), G(b))$. Поскольку функтор на $\mathfrak{F}\mathscr{C}$, принимающий значения $\mathrm{Ext}^q(F(s\alpha), G(t\alpha))$, равен композиции $\mathrm{EXT}^q(F,G) \circ (s,t)$, то $E_2^{p,q} \cong \mathrm{Ext}^p(\mathbb{Z}\mathscr{C}, \mathrm{EXT}^q(F,G))$. Напомним, что сходимость $E_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}$ спектральной последовательности означает существование последовательности подгрупп для каждого $n \geq 0$:

$$H^n = F^0H^n \supseteq F^1H^n \supseteq F^2H^n \supseteq \dots \supseteq F^nH^n \supseteq F^{n+1}H^n = 0,$$

таких, что фактор-группы $F^pH^n/F^{p+1}H^n$ изоморфны $E_\infty^{p,n-p}$. Поскольку в нашем случае $E_\infty^{p,q} = 0$ при $p + q > m + k$, получаем при $n > m + k$ равенства $H^n = F^1H^n = \dots = F^nH^n = 0$, приводящие к свойству $\mathrm{Ext}^n(F,G) = 0$ при $n > m + k$. Следовательно, $\mathrm{gl.dim}\, \mathcal{A}^{\mathscr{C}} \leq m + k$. □

### 3.2. Основная теорема.

**Теорема 3.3.** *Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория с копроизведениями и достаточным числом проективных объектов, $M(E,I)$ — произвольный свободный частично коммутативный моноид. Тогда*

$$\mathrm{gl.dim}\, \mathcal{A}^{M(E,I)} = \omega(E,I) + \mathrm{gl.dim}\, \mathcal{A}.$$

Доказательство. Подставляя в лемме 3.2 полученное в следствии 3.1 равенство $\dim M(E,I) = \omega(E,I)$, приходим к неравенству

$$\mathrm{gl.dim}\, \mathcal{A}^{M(E,I)} \leq \omega(E,I) + \mathrm{gl.dim}\, \mathcal{A}.$$

Для любого конечного подмножества попарно перестановочных элементов $S \subseteq E$ существует ретракция $M(E, I) \to M(S)$. Поскольку целочисленные $n$-е группы гомологий моноида $M(S)$ при $n = |S|$ изоморфны $\mathbb{Z}$, то $\operatorname{gl.dim} \mathcal{A}^{M(S)} = n + \operatorname{gl.dim} \mathcal{A}$ [15, 2.7]. Согласно [5, следствие 1.4] для любых абелевой категории $\mathcal{A}$ и ретракции $r : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ между малыми категориями имеет место неравенство $\operatorname{gl.dim} \mathcal{A}^{\mathscr{C}} \geq \operatorname{gl.dim} \mathcal{A}^{\mathscr{D}}$. Приходим к неравенству $\operatorname{gl.dim} \mathcal{A}^{M(E,I)} \geq \operatorname{gl.dim} \mathcal{A}^{M(S)} = |S| + \operatorname{gl.dim} \mathcal{A}$. Так как $\dim M(E, I)$ равно верхней грани мощностей $|S|$ конечных подмножеств попарно перестановочных элементов из $E$, получаем $\operatorname{gl.dim} \mathcal{A}^{M(E,I)} \geq \omega(E, I) + \operatorname{gl.dim} \mathcal{A}$. Следовательно, $\operatorname{gl.dim} \mathcal{A}^{M(E,I)} = \omega(E, I) + \operatorname{gl.dim} \mathcal{A}$. $\square$

**3.3. Глобальная размерность колец многочленов от частично коммутирующих переменных.** Предположим, что задано множество переменных $E = \{x_p : p \in P\}$ и указано множество пар $(x_p, x_q) \in I$ коммутирующих переменных. Пусть $R$ — кольцо с 1. *Кольцо многочленов над $R$ от частично коммутирующих переменных* состоит из сумм $\sum\limits_{w \in M(E,I)} r_w w$, где $r_w$ — элементы из $R$, почти все из которых равны нулю. Как и в случае кольца от одной переменной (над некоммутативным кольцом $R$), умножение определяется по формуле

$$\Big( \sum_{w \in M(E,I)} r_w w \Big) \Big( \sum_{w \in M(E,I)} s_w w \Big) = \sum_{w \in M(E,I)} t_w w,$$

где $t_w = \sum\limits_{uv=w} r_u s_v$. Определенное таким образом кольцо будет в точности моноидным кольцом $R[M(E, I)]$. Если $R$ — поле, то из теоремы 3.3 следует, что $\operatorname{gl.dim} R[M(E, I)] = \omega(E, I)$. Аналогичная формула имеет место для любого кольца $R$ глобальной размерности 0, например, для кольца $(n \times n)$-матриц $R = M_n(k)$ с коэффициентами из поля $k$. Для кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ получаем $\operatorname{gl.dim} \mathbb{Z}[M(E, I)] = 1 + \omega(E, I)$.

Вычислим, например, глобальную размерность фактор-кольца свободного кольца от семи некоммутативных переменных

$$\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \rangle / \mathfrak{a}$$

по идеалу $\mathfrak{a}$, порожденному многочленами $x_1x_2 - x_2x_1$, $x_2x_3 - x_3x_2$, $x_3x_4 - x_4x_3$, $x_4x_5 - x_5x_4$, $x_5x_6 - x_6x_5$, $x_6x_7 - x_7x_6$ и $x_1x_7 - x_7x_1$. Это фактор-кольцо изоморфно моноидному кольцу $Z[M(E, I)]$ свободного частично коммутативного моноида $M(E, I)$, имеющего граф независимости

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] x_1 \arrow[r] \arrow[dd] & x_2 \arrow[r] & x_3 \arrow[dr] & \\ & & & x_4 \\ x_7 \arrow[r] & x_6 \arrow[r] & x_5 \arrow[ur] & \end{tikzcd} .$$

Максимальная мощность клики равна 2. Следовательно,

$$\operatorname{gl.dim} \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \rangle / \mathfrak{a} = 3.$$

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Husainov A. A.* The global dimension of a trace monoid ring // Semigroup Forum. 2011. V. 82, N 2. P. 261–270.
2. *Weibel C. A.* An introduction to homological algebra. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.

**3.** *Mitchell B.* Theory of categories. New York; London: Acad. Press, 1965. (Univ. Lect. Notes; V. 37).
**4.** *Mitchell B.* Rings with several objects // Adv. Math. 1972. V. 8. P. 1–161.
**5.** *Mitchell B.* Some applications of module theory to functor categories // Bull. Amer. Math. Soc. 1978. V. 84, N 5. P. 867–885.
**6.** *Husainov A. A.* On the homology of small categories and asynchronous transition systems // Homology Homotopy Appl. 2004. V. 6, N 1. P. 439–471.
**7.** *Хусаинов А. А., Лопаткин В. Е., Трещев И. А.* Исследование математической модели параллельных вычислительных процессов методами алгебраической топологии // Сиб. журн. индустр. математики. 2008. Т. 11, № 1. С. 141–152.
**8.** *Габриель П., Цисман М.* Категории частных и теория гомотопий. М.: Мир, 1971.
**9.** *Fröberg R.* Determination of a class of Poincaré series // Math. Scand. 1975. V. 37. P. 29–39.
**10.** *Полякова Л. Ю.* Резольвенты для свободных частично коммутативных моноидов // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1295–1304.
**11.** *Хусаинов А. А.* Кубические гомологии и размерность Лича свободных частично коммутативных моноидов // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 12. С. 129–154.
**12.** *Baues H.-J., Wirsching G.* Cohomology of small categories // J. Pure Appl. Algebra. 1985. V. 38, N 2–3. P. 187–211.
**13.** *Хусаинов А. А.* Сравнение размерностей малой категории // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 6. С. 1413–1426.
**14.** *Novikov B. V.* On partial cohomologies of semigroups // Semigroup Forum. 1984. V. 28, N 1. P. 355–364.
**15.** *Хусаинов А. А.* О группах расширений в категории абелевых диаграмм // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 1. С. 179–185.

*Статья поступила 29 марта 2011 г.*

Хусаинов Ахмет Аксанович
Комсомольский-на-Амуре гос. технический университет,
пр. Ленина, 27, Комсомольск-на-Амуре 681013
husainov51@yandex.ru