Сибирский математический журнал
Июль—август, 2012. Том 53, № 4

УДК 517.972/974

ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ С ФУНКЦИОНАЛОМ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ С $p(x)$–, $p(x,u)$–РОСТОМ

М. А. Сычев

Аннотация. Продолжено изучение слабой сходимости для интегральных функционалов, удовлетворяющих условиям $p(x)$- и $p(x,u)$-роста. Получены теорема о сходимости с функционалом и результаты о взаимоотношении интегральных функционалов с их абстрактным полунепрерывным снизу расширением.

Ключевые слова: интегральный функционал, мера Янга, сходимость с функционалом, полунепрерывная снизу оболочка, строгая квазивыпуклость.

1. Введение

В работе мы продолжаем развивать теорию слабой сходимости для интегральных функционалов, удовлетворяющих условиям $p(x)$- и $p(x,u)$-роста.

Напомним, что функция $L : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ называется *интеграндом Каратеодори*, если для каждого $\epsilon > 0$ существует компактное множество $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ такое, что $L : \Omega_\epsilon \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ непрерывно и $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \Omega_\epsilon) \leq \epsilon$.

Интегранд Каратеодори L удовлетворяет условию $p(x)$-роста, если

$$\begin{gathered} c_1|v|^{p(x)} + c_2 \leq L(x,u,v) \leq c_3|v|^{p(x)} + c_4, \\ c_3 \geq c_1 > 0, \quad 1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \infty. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Более общо, интегранд Каратеодори L удовлетворяет условию $p(x,u)$-роста, если

$$\begin{gathered} c_1|v|^{p(x,u)} + c_2 \leq L(x,u,v) \leq c_3|v|^{p(x,u)} + c_4, \\ c_3 \geq c_1 > 0, \quad 1 < p_1 \leq p(x,u) \leq p_2 < \infty. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Полагаем

$$J(u) := \int\limits_\Omega L(x,u(x),Du(x))\,dx, \tag{1.3}$$

если $L(\cdot,u(\cdot),Du(\cdot)) \in L^1$, в противном случае — $J(u) = \infty$. Условия (1.1), (1.2) гарантируют, что $u \in W^{1,p_1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, если $J(u) < \infty$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00390), интеграционного проекта СО РАН (№ 30) и проекта № 15 Президиума РАН. Подход автора к теории мер Янга был развит во время его пребывания в ICTP и в SISSA (Триест, Италия) в 1995–97 гг. Дальнейшая работа проходила в математическом департаменте университета Карнеги Меллон (Питтсбург, США) и в Макс-Планк институте (Лейпциг, Германия).

В [1] мы изучали вопросы полунепрерывности снизу и построения полунепрерывных снизу оболочек (релаксация). В работах на эту тему [2–5] авторы рассматривали случай $L = L(x, Du)$, а в случае $L = L(x, u, Du)$ накладывали дополнительные ограничения на поведение по u. В [1] нам удалось избежать этих ограничений и доказать оптимальные результаты. Это может быть прокомментировано как преимущество теории градиентных мер Янга. Действительно, однородные L-градиентные меры Янга могут быть полностью охарактеризованы в случае произвольных интеграндов (см. [6]). Недавно также были описаны меры Янга, порождаемые градиентами функций из $W^{1,1}$ и BV [7]. В настоящей работе мы рассматриваем теорему о сходимости с функционалом и ее следствия. Напомним, что свойство сходимости с функционалом означает сходимость последовательности в сильной норме в случае ее сходимости в слабой топологии и сходимости значений функционала.

В случае (1.2) центральным дополнительным свойством является следующее условие (C). Если Ω — ограниченная липшицева область и $\epsilon > 0$, то полагаем $\Omega^\epsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$. Будем говорить, что функция $u \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ с $J(u) < \infty$ *удовлетворяет условию* (C), если

$$\begin{gathered}\exists u_k \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap C^1(\Omega^{1/k}; \mathbb{R}^m), \ k \in \mathbb{N} : \\ u_k \to u \quad \text{в } W^{1,p_1}(\Omega; \mathbb{R}^m), \quad J(u_k) \to J(u), \ k \to \infty, \quad u_k|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}, \ k \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{C}$$

Теорема о сходимости с функционалом имеет давнюю историю. Н. Боголюбов установил в [8] эту теорему для одномерного случая с целью изучить некоторые численные схемы. Ю. Г. Решетняк показал, что это свойство выполнено для интеграндов, строго выпуклых по Du [9]. В [10–14] этот вопрос был сформулирован в поточечной постановке, т. е. когда данное свойство выполнено на конкретной функции. Эванс и Гарипи [15] использовали это свойство, чтобы получить интегральные оценки для минимайзеров интегральных функционалов с интеграндами, строго квазивыпуклыми по Эвансу (см. недавнюю работу Кристенсена и Тахери [16] для переноса этой техники в более общую ситуацию). Затем Эванс и Гарипи [17] доказали теорему о сходимости с функционалом для более слабой версии строгой квазивыпуклости, имея в виду получить общую теорему для изучения численным схем. Кристенсен [18] показал, что строгая квазивыпуклость (которая используется в данной работе) влечет эту теорему для интеграндов с p-ростом. Необходимость данного условия для справедливости теоремы была одной из причин развить технику мер Янга в наших работах [19, 20].

В разд. 2 доказана теорема о сходимости с функционалом в общей ситуации (1.2). В случае, когда L удовлетворяет условиям (1.1) с гёльдеревой функцией $p(\cdot)$ и $L = L(x, Du)$, доказано, что выполнение теоремы о сходимости с функционалом всюду влечет строгую квазивыпуклость L по Du для п. в. $x \in \Omega$. В разд. 3 рассмотрено абстрактное свойство взаимоотношения интегрального функционала и его полунепрерывной снизу оболочки, которая в общем случае может не быть интегральным функционалом. Всюду в данной работе использована техника мер Янга, как она представлена в [1, разд. 2, 3]. Поэтому предполагается знакомство читателя с указанным материалом.

Результаты данной работы и ее первой части анонсированы в [21].

Всюду в работе полагаем, что Ω — липшицева ограниченная область, если не оговорено противное. Замыкание Ω будем обозначать через $\operatorname{cl}\Omega$. Для $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ через $J(u; \widetilde{\Omega})$ обозначается интеграл в (1.3) по множеству $\widetilde{\Omega}$, $B(x, \epsilon)$ — шар с центром в x и радиусом $\epsilon > 0$, l_A — аффинная функция с градиентом, равным A, и $\langle L;\nu\rangle$ — действие меры ν на непрерывную функцию L. Используем обозначения $\rightharpoonup$ и $\to$ для слабой и сильной сходимостей соответственно.

2. Сходимость с функционалом

В этом разделе изучим свойство сходимости с функционалом.

Определение 2.1. Будем говорить, что $L(\cdot)$ является *строго квазивыпуклой* в точке $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, если она квазивыпукла в A и для каждой последовательности $\phi_k \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ с $J(l_A+\phi_k) \to J(l_A)$ при $k\to\infty$ выполнена сходимость $D\phi_k \to 0$ по мере.

Напомним, что *квазивыпуклость* L в A означает выполнение неравенств

$$\int\limits_\Omega L(A+D\phi(x))\,dx \ge L(A)\operatorname{meas}\Omega \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m).$$

Теорема 2.2. *Пусть L — интегранд Каратеодори, который удовлетворяет условию $p(x,u)$-роста (1.2), и пусть $u \in W^{1,p_1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ такая, что $J(u) < \infty$. Предположим, что $L(x,u(x),\cdot)$ является строго квазивыпуклой в $Du(x)$ для п. в. $x\in\Omega$.*

Тогда сходимости

$$u_k \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,p_1}, \quad J(u_k)\to J(u) \tag{2.1}$$

влекут сходимости

$$u_k \to u \text{ в } W^{1,p_1}, \quad L(\cdot,u_k(\cdot),Du_k(\cdot)) \to L(\cdot,u(\cdot),Du(\cdot)) \text{ в } L^1. \tag{2.2}$$

В случае, когда u удовлетворяет дополнительному свойству (C), сходимости (2.1) влекут сходимости (2.2), только если для п. в. $x\in\Omega$ функция $L(x,u(x),\cdot)$ строго квазивыпукла в $Du(x)$.

Следствие 2.3. *Пусть $L:\Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ — интегранд Каратеодори, который удовлетворяет условию (1.1) с гёльдеровой функцией $p(\cdot)$. Пусть $u\in W^{1,p_1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ с $J(u)<\infty$. Тогда сходимости (2.1) влекут сходимости (2.2), если и только если $L(x,u(x),\cdot)$ строго квазивыпукла в $Du(x)$ для п. в. $x\in\Omega$.*

Опишем строгую квазивыпуклость в терминах мер Янга.

Лемма 2.4. *Пусть $L:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ — непрерывный интегранд, удовлетворяющий условиям p-роста, $p>1$, и пусть $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.*

Тогда L строго квазивыпукла в точке A, если и только если

$$\langle L;\nu\rangle > L(A) \tag{2.3}$$

для каждой нетривиальной однородной p-градиентной меры Янга ν с центром масс A.

Доказательство. Предположим, что (2.3) выполнено. Тогда нестрогое неравенство выполнено для каждой однородной p-градиентной меры Янга ν, что означает квазивыпуклость L в A по лемме 4.6 из [1].

Рассмотрим последовательность $\phi_k\in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ такую, что

$$J(l_A+\phi_k)\to J(l_A), \quad k\to\infty, \tag{2.4}$$

и $D\phi_k$ не сходится к нулю по мере. Тогда существуют подпоследовательность ϕ_k (обозначения не меняем) и $\epsilon > 0$ такие, что

$$\operatorname{Av}(A + D\phi_k)_\Omega(\mathbb{R}^{m\times n} \setminus B(A,\epsilon)) \geq \epsilon, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Так как $\nu_k := \operatorname{Av}(A + D\phi_k)_\Omega$ — однородные градиентные меры Янга (см. [1, предложение 3.2]), равномерно ограниченные в энергии (в силу (2.4)), существует подпоследовательность ν_k такая, что $\nu_k \rightharpoonup^* \nu$. По теореме 3.5 из [1] ν является однородной p-градиентной мерой Янга с центром масс в A. В силу квазивыпуклости L в A выполнено $\langle L;\nu\rangle \geq L(A)$ (см. [1, лемма 4.6]). В то же время (2.4) и предложение 5.3 из [1] влекут $\langle L;\nu\rangle \leq L(A)$. Из этих неравенств вытекает, что $\langle L;\nu\rangle = L(A)$. Так как $\nu(\mathbb{R}^{m\times n} \setminus B(A,\epsilon)) \geq \epsilon$ (см. (2.5)), ν является нетривиальной мерой; противоречие с (2.3). Таким образом, из (2.3) следует строгая квазивыпуклость L в A.

Чтобы доказать обратное, используем определение однородной p-градиентной меры Янга. Для каждой такой меры ν с центром масс в A существует последовательность $\phi_k \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{N}$, такая, что $A + D\phi_k$ порождает ν как меру Янга и

$$L(A + D\phi_k(\cdot)) \rightharpoonup \langle L;\nu\rangle \quad \text{в } L^1. \tag{2.6}$$

Если ν нетривиальна, то существует $\epsilon > 0$ такое, что

$$\operatorname{meas}\{x \in \Omega : |D\phi_k(x)| \geq \epsilon\} \geq \epsilon, \quad k \in \mathbb{N}$$

(см. [1, предложение 2.10]). Тогда ввиду строгой квазивыпуклости в A имеем

$$J(\phi_k) \geq J(l_A) + \delta, \quad k \in \mathbb{N},$$

для некоторого $\delta > 0$ и, следовательно, (2.6) влечет

$$\langle L;\nu\rangle > L(A) + \delta,$$

т. е. (2.3) выполнено. $\square$

Доказательство теоремы 2.2. Пусть подпоследовательность u_k (обозначения не меняем) порождает L-градиентную меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$, и предположим, что эта мера нетривиальна, т. е. $\nu_x \neq \delta_{Du(x)}$ в множестве положительной меры. По теореме 3.5 из [1] ν_x является однородной $p(x,u(x))$-градиентной мерой Янга для п. в. $x \in \Omega$, т. е. для п. в. $x \in \Omega$ существуют $\phi_j \in l_{Du(x)} + C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ такие, что $D\phi_j$ порождает ν_x как однородную $p(x,u(x))$-градиентную меру Янга. Тогда строгая квазивыпуклость $L(x,u(x),\cdot)$ в $Du(x)$ влечет

$$\langle L(x,u(x),\cdot);\nu_x\rangle > L(x,u(x),Du(x)), \tag{2.7}$$

если мера ν_x нетривиальна (см. лемму 2.4).

Таким образом, строгое неравенство в (2.7) выполнено в множестве положительной меры, когда неравенство имеет место п. в. в Ω ввиду квазивыпуклости $L(x,u(x),\cdot)$ в $Du(x)$ для п. в. $x \in \Omega$ (см. [1, предложение 4.6]). Вместе эти неравенства и теорема 2.8 из [1] влекут

$$\liminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq \int_\Omega \langle L(x,u(x),\cdot);\nu_x\rangle\,dx > \int_\Omega L(x,u(x),Du(x))\,dx = J(u);$$

противоречие.

Таким образом, $\nu_x = \delta_{Du(x)}$ п. в. в Ω, и тогда $u_k \to u$ в W^{1,p_1} (см. [1, предложение 2.10]). Согласно теореме 2.8 из [1] также выполнено

$$L(\cdot, u_k(\cdot), Du_k(\cdot)) \to L(\cdot, u(\cdot), Du(\cdot)) \quad \text{в } L^1.$$

Чтобы доказать обратное, вновь используем средства, предложенные в [1, разд. 2, 3]. Для данного $k \in \mathbb{N}$ пусть Ω_k — компактное подмножество Ω такое, что $L : \Omega_k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ непрерывно, $u : \Omega_k \to \mathbb{R}^m$, $Du : \Omega_k \to \mathbb{R}^{m\times n}$ также непрерывны. Тогда не существует двух лебеговских точек $x_1, x_2 \in \Omega_k$ таких, что

$$\langle L(x_1, u(x_1), \cdot); \nu_{x_1}\rangle < L(x_1, u(x_1), Du(x_1)), \tag{2.8}$$

$$\langle L(x_2, u(x_2), \cdot); \nu_{x_2}\rangle > L(x_2, u(x_2), Du(x_2)), \tag{2.9}$$

с однородными $p(x_i, u(x_i))$-градиентными мерами Янга ν_i с центром масс в $Du(x_i)$, $i = 1, 2$. Покажем это.

Действительно, ввиду (2.8), (2.9) те же неравенства выполнены для некоторых мер $\nu_i = \mathrm{Av}(Du(x_i) + D\phi_i)_\Omega$, $\phi_i \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $i = 1, 2$, и можно взять $x_1 \neq x_2$. Тогда существуют достаточно малые окрестности $\widetilde{B}(x_i, \delta_i) := B(x_i, \delta_i) \cap \Omega_k$ точек x_i в Ω_k, $i = 1, 2$, такие, что если ν_x является мерой, полученной из ν_{x_i} переносом центра масс в $Du(x)$ для $x \in \widetilde{B}(x_i, \delta_i)$, $i = 1, 2$, то (2.8), (2.9) все еще выполнены для таких x и $\delta_i > 0$, $i = 1, 2$, могут быть выбраны удовлетворяющими требованию $B(x_1, \delta_1) \cap B(x_2, \delta_2) = \varnothing$ и равенству

$$\int\limits_{\widetilde{B}(x_1,\delta_1)\cup\widetilde{B}(x_2,\delta_2)} \langle L(x, u(x), \cdot); \nu_x\rangle = \int\limits_{\widetilde{B}(x_1,\delta_1)\cup\widetilde{B}(x_2,\delta_2)} L(x, u(x), Du(x))\, dx. \tag{2.10}$$

Полагая $\nu_x = \delta_{Du(x)}$ для остальных $x \in \Omega$, получаем, что $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ является L-градиентной мерой Янга в силу теоремы 3.9 из [1].

Так как ввиду (2.10) выполнено

$$\int\limits_\Omega \langle L(x, u(x), \cdot); \nu_x\rangle\, dx = J(u) \tag{2.11}$$

и существует последовательность $u_k \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ такая, что $u_k \rightharpoonup u$ в W^{1,p_1}, Du_k порождают меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ и

$$L(\cdot, u_k(\cdot), Du_k(\cdot)) \rightharpoonup \langle L(\cdot, u(\cdot), v); \nu_{(\cdot)}\rangle \quad \text{в } L^1, \tag{2.12}$$

то $J(u_k) \to J(u)$, $k \to \infty$. Поскольку Du_k не сходится по мере (см. [1, предложение 2.10]), получаем противоречие с (2.2).

Таким образом, (2.8), (2.9) не могут иметь место.

Ситуация

$$\langle L(x, u(x), \cdot); \nu\rangle \le L(x, u(x), Du(x))$$

для всех однородных $p(x, u(x))$-градиентных мер Янга с центром масс $Du(x)$ невозможна ввиду условий на рост (1.2). Возможен только случай

$$\langle L(x, u(x), \cdot); \nu\rangle \ge L(x, u(x), Du(x))$$

для всех однородных $p(x, u(x))$-градиентных мер Янга с центром масс в $Du(x)$ для п. в. $x \in \Omega$. Тогда $L(x, u(x), \cdot)$ является квазивыпуклой в $Du(x)$ для п. в. $x \in \Omega$ (см. [1, лемма 4.6]).

Докажем, что (2.1) $\Rightarrow$ (2.2) влечет более сильное свойство — строгую квазивыпуклость $L(x,u(x),\cdot)$ в $Du(x)$ п. в. в Ω.

Предположим противное. Тогда для некоторого $k\in\mathbb{N}$ множество тех $x\in\Omega_k$, для которых существует нетривиальная однородная $p(x,u(x))$-градиентная мера Янга ν с центром масс в $Du(x)$ и такая, что

$$\langle L(x,u(x),\cdot);\nu\rangle = L(x,u(x),Du(x)), \tag{2.13}$$

$$\nu(\mathbb{R}^{m\times n}\setminus B(Du(x),1/k))\geq 1/k, \tag{2.14}$$

имеет положительную меру (см. лемму 2.4). Обозначим это множество через $\widetilde{\Omega}_k$. Покажем, что оно компактно. Действительно, если $x_n\to x$, $x_n\in\widetilde{\Omega}_k$, то существуют ν_{x_n}, для которых (2.13), (2.14) выполнены. Существует подпоследовательность (обозначения не меняем) такая, что $\nu_{x_n}\rightharpoonup^*\nu$. Тогда (2.14) выполнено. Ввиду непрерывности L, u и Du, а также согласно предложению 5.3 из [1] выполнено неравенство

$$\langle L(x,u(x),\cdot);\nu\rangle \leq L(x,u(x),Du(x)). \tag{2.15}$$

Однако ν — однородная $p(x,u(x))$-градиентная мера Янга по теореме 3.5 из [1], следовательно, лемма 4.6 из [1] влечет обратное неравенство в (2.15), т. е. (2.13) выполнено.

Те же рассуждения можно применить для доказательства того, что многозначное отображение $x\in\widetilde{\Omega}_k\to(M_1,\rho)$, сопоставляющее каждому $x\in\widetilde{\Omega}_k$ множество $V(x)$ всех однородных $p(x,u(x))$-градиентных мер Янга с центром масс в $Du(x)$, удовлетворяющих (2.13), (2.14), замкнуто и, более того, полунепрерывно сверху. Последнее означает, что для $x_n\to x$, $\nu_n\rightharpoonup^*\nu$ с $x_n\in\widetilde{\Omega}$, $\nu_n\in V(x_n)$, выполнено $\nu\in V(x)$. По теореме 2.5 из [1] существует измеримый селектор $(\nu_x)_{x\in\widetilde{\Omega}_k}$. Полагая $\nu_x=\delta_{Du(x)}$ для $x\in(\Omega\setminus\widetilde{\Omega}_k)$, получаем, что $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ является L-градиентной мерой Янга по теоремам 2.2, 3.9 из [1]. Тем самым для некоторой последовательности $u_k\in W^{1,p_1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ выполнено $u_k\rightharpoonup u$ в $W^{1,p_1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ и

$$J(u_k)\to\int\limits_\Omega\langle L(x,u(x),\cdot);\nu_x\rangle\,dx=\int\limits_\Omega L(x,u(x),Du(x))\,dx,$$

где Du_k порождают меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$, которая нетривиальна в силу (2.14). Тогда предложение 2.10 из [1] влечет противоречие с первой сходимостью в (2.2).

Таким образом, $L(x,u(x),\cdot)$ строго квазивыпукла в $Du(x)$ для п. в. $x\in\Omega$ в силу произвольности $k\in\mathbb{N}$. $\square$

Результат следствия 2.3 вытекает из теоремы 2.2, так как в его условиях каждая функция $u\in W^{1,p_1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ с $J(u)<\infty$ удовлетворяет условию (C) (см. [1, лемма 4.7]). $\square$

Справедливость свойства сходимости с функционалом в общем случае не влечет строгую квазивыпуклость $L(x,u,v)$ по v для п. в. $x\in\Omega$ и всех $u\in\mathbb{R}^m$ ввиду зависимости от u (см. [19, пример 4.3]). Однако, когда этой зависимости нет, результат справедлив.

Теорема 2.5. *Пусть* $L(x, v) : \Omega \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ *является интеграндом Каратеодори, который удовлетворяет условию* $p(x)$*-роста* (1.1) *с непрерывной по Гёльдеру функцией* $p(\cdot)$.

Предположим, что для каждой функции $u \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ *с* $J(u) < \infty$ *сходимости*

$$u_k \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,p_1}(\Omega; \mathbb{R}^m), \quad J(u_k) \to J(u) \tag{2.16}$$

влекут сходимость

$$u_k \to u \text{ в } W^{1,p_1}(\Omega; \mathbb{R}^m). \tag{2.17}$$

Тогда для п. в. $x \in \Omega$ *функция* $L(x, \cdot)$ *строго квазивыпукла.*

Доказательство основано на рассуждениях, аналогичных использованным при доказательстве теоремы 2.2.

Достаточно рассмотреть случай компактного подмножества Ω_k множества Ω с непрерывной $L : \Omega_k \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \Omega_k) \le 1/k$.

Сначала установим, что $L(x, \cdot)$ квазивыпукла для п. в. $x \in \Omega_k$. Достаточно показать это в случае, когда x является лебеговой точкой Ω_k. Допустим противное. Тогда по лемме 4.6 из [1] существуют x_0 указанного типа, $v_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и однородная $p(x_0)$-градиентная мера Янга ν_{x_0} с центром масс в v_0 такие, что

$$\langle L(x_0, \cdot); \nu_{x_0}\rangle < L(x_0, v_0). \tag{2.18}$$

Мера ν_{x_0} может быть взята в виде $\operatorname{Av}(v_0 + D\phi)_\Omega$ для $\phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Рассмотрим аффинную функцию l_{v_0} с градиентом, равным v_0. Определим градиентную меру Янга, ассоциируемую с l_{v_0}. Для $x \in (B(x_0, \epsilon_0) \cap \Omega_k)$ с достаточно малым $\epsilon_0 > 0$ полагаем $\nu_x = \nu_{x_0}$, где ϵ_0 настолько мало, что (2.18) выполнено также для ν_x (в этом случае x_0 заменяется на x). Возьмем другую лебегову точку x_1 множества Ω_k и матрицу A с $\operatorname{rank} A = 1$. Каждая мера $\nu_t = \frac{1}{2}(\delta_{(v_0+tA)} + \delta_{(v_0-tA)})$ является однородной градиентной мерой Янга (см. например, [22, лемма 3.1]). Заметим, что (1.1) влечет

$$\langle L(x_1, \cdot); \nu_t\rangle \to \infty, \quad t \to \infty,$$

в частности, для некоторого $t > 0$ выполнено

$$\langle L(x_1, \cdot); \nu_t\rangle > L(x_1, v_0). \tag{2.19}$$

Полагаем $\nu_x = \nu_t$ для $x \in (B(x_1, \epsilon_1) \cap \Omega_k)$. Тогда $\epsilon_0, \epsilon_1 > 0$ могут быть выбраны удовлетворяющими равенству

$$\int\limits_{\{B(x_0,\epsilon_0)\cup B(x_1,\epsilon_1)\}\cap\Omega_k} \langle L(x, \cdot); \nu_x\rangle\, dx = \int\limits_{\{B(x_0,\epsilon_0)\cup B(x_1,\epsilon_1)\}\cap\Omega_k} L(x, v_0)\, dx. \tag{2.20}$$

Для остальных $x \in \Omega$ полагаем $\nu_x = \delta_{v_0}$. Тогда $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ — градиентная мера Янга (см. [1, следствие 3.7]) и для последовательности $u_k \in l_{v_0} + C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$, порождающей эту меру, выполнено $u_k \rightharpoonup^* l_{v_0}$ в $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $J(u_k) \to J(l_{v_0})$ (см. (2.20)).

Так как мера $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ нетривиальна, последовательность Du_k сходится только слабо (см. [1, предложение 2.10]). Тогда (2.17) не выполнено, и это противоречие показывает, что $L(x, \cdot)$ квазивыпукла для п. в. $x \in \Omega_k$.

Пусть $\epsilon > 0$. Рассмотрим множество всех (x_0, u_0, ν), удовлетворяющих требованиям:

$$x_0 \in \Omega_k,\ v_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad |v_0| \le 1/\epsilon, \tag{2.21}$$

где ν — однородная $p(x)$-градиентная мера Янга с центром масс в v_0 такая, что

$$\langle L(x_0,\cdot);\nu\rangle = L(x_0,v_0), \tag{2.22}$$

$$\langle|\cdot|^{p(x_0)};\nu\rangle \le 1/\epsilon, \tag{2.23}$$

$$\nu(B(v_0,\epsilon)) \le 1-\epsilon. \tag{2.24}$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$V : x_0 \in \Omega_k \to \{(v_0,\nu) \in B(0,1/\epsilon)\times(M_1,\rho);\ (2.21)\text{–}(2.24) \text{ выполнены}\}.$$

Множество $\widetilde{\Omega}_k$, на котором это отображение определено, компактно, и само отображение замкнуто и полунепрерывно сверху. Действительно, если $x_n \in \widetilde{\Omega}_k$, то существуют (v_n,ν_n), удовлетворяющие (2.21)–(2.24). В случае $x_n \to x_0$ можно взять подходящую подпоследовательность (обозначения не меняем) и (v_n,ν_n) такие, что $v_n \to v_0$, $\nu_n \rightharpoonup^* \nu_0$. Тогда все требования (2.21)–(2.24) выполнены и для (x_0,v_0,ν_0). Действительно, (2.21), (2.24) выполнены ввиду сходимостей. Неравенство (2.23) следует из предложения 5.3 в [1]. По теореме 3.5 из [1] ν_0 является однородной $p(x_0)$-градиентной мерой Янга с центром масс в v_0. Тогда $\langle L(x_0,\cdot);\nu_0\rangle \ge L(x_0,v_0)$ ввиду квазивыпуклости $L(x_0,\cdot)$ в v_0, здесь применяем предложение 4.6 из [1]. Обратное неравенство $\langle L(x_0,\cdot);\nu_0\rangle \le L(x_0,v_0)$ следует из предложения 5.3 в [1]. Тем самым (2.22) выполнено. Таким образом, $\widetilde{\Omega}_k$ является компактным множеством, и многозначное отображение V, определенное в $\widetilde{\Omega}_k$, замкнуто и полунепрерывно сверху. Следовательно, можно выделить измеримый селектор $(v(\cdot),\nu(\cdot))$, определенный в $\widetilde{\Omega}_k$ (см. [1, теорема 2.5]).

Результат Альберти [23] утверждает, что существуют компактное подмножество Ω' множества $\widetilde{\Omega}_k$ положительной меры и функция $u \in W^{1,p_2}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ с $p_2 \ge \max\{p(x) : x \in \operatorname{cl}\Omega\}$ такие, что $Du(x) = v(x)$ в Ω'. Полагаем $\nu_x = \nu(x)$ в Ω', $\nu_x = \delta_{Du(x)}$ в $\Omega\setminus\Omega'$. По теореме 3.9 из [1] мера $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ является L-градиентной мерой Янга. В частности, существует последовательность $u_k \in W^{1,p_1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ такая, что $u_k \rightharpoonup u$ в W^{1,p_1}, Du_k порождают меру $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ и

$$J(u_k) \to \int\limits_\Omega \langle L(x,u(x),\cdot);\nu_x\rangle\,dx = J(u). \tag{2.25}$$

Однако Du_k сходится только слабо к Du ввиду нетривиальности $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ (см. [1, предложение 2.10]). Это противоречие показывает, что $\operatorname{meas}\widetilde{\Omega}_k = 0$. Так как $\epsilon > 0$ в (2.21)–(2.24) произвольно, выводим, что функция $L(x,\cdot)$ строго квазивыпукла для п. в. $x \in \Omega_k$. Это доказывает теорему в силу произвольности $k \in \mathbb{N}$. $\square$

3. Общий результат о формальной полунепрерывной снизу оболочке

В этом разделе установим несколько общих фактов об интегральных функционалах с $p(x)$- и $p(x,u)$-ростом (см. (1.1), (1.2)). Они основаны на результатах, полученных в [24], где применен наш анализ теории дифференциальных включений, проведенный в [25, 26], к вариационным задачам. Сама теория дифференциальных включений предложена Швераком как новое направление изучения уравнений в частных производных на Международном конгрессе математиков в Цюрихе в 1994 г. (см. [27]).

Будем говорить, что функционал J *устойчив* на u, если свойство сходимости с функционалом (2.1) $\Rightarrow$ (2.2) выполнено на этой функции в области определения функционала.

Теорема 3.1. *Пусть $L : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ является интеграндом Каратеодори, который удовлетворяет условию $p(x,u)$-роста (см. (1.2)). Предположим, что существует хотя бы одна функция $u \in W^{1,p_1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ такая, что*

$$J(u) < \infty, \quad u|_{\partial\Omega} = f, \tag{3.1}$$

и обозначим множество всех таких функций через S_1. Пусть $\overline{S}_1$ является пополнением S_1 в слабой топологии W^{1,p_1}.

Тогда функционал $\widetilde{J} : \overline{S}_1 \to \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, определенный как

$$\widetilde{J}(u) = \inf\{\liminf_{k\to\infty} J(u_k) : u_k \in S_1,\ u_k \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,p_1}\},$$

полунепрерывен снизу в слабой топологии W^{1,p_1}. Множество $V \subset S_1$, где функционалы $J : S_1 \to \mathbb{R}^+$, $\widetilde{J} : \overline{S}_1 \to \mathbb{R}^+$ одновременно полунепрерывны снизу и устойчивы, плотно в множестве S_1 в слабой топологии W^{1,p_1}. Для любого $u \in \overline{S}_1$ с $\widetilde{J}(u) < \infty$ существует последовательность $u_k \in V$ такая, что $u_k \rightharpoonup u$ в W^{1,p_1} и $J(u_k) \to \widetilde{J}(u)$ при $k \to \infty$.

Теорема 3.1, в которой нет ничего о связи свойств элементов множества V со свойствами интеграндов на них, получена абстрактным способом как следствие более общего результата, которым является теорема 3.3, приводимая ниже. Покажем, как теорема 3.1 следует из теоремы 3.3. Однако заметим, что означает результат теоремы 3.1 в случае интеграндов с $p(x)$-ростом, где $p(\cdot)$ непрерывна по Гёльдеру. В этом случае полунепрерывность снизу и устойчивость на функции могут быть характеризованы в терминах квазивыпуклости и строгой квазивыпуклости интеграндов (см. лемму 4.6 из [1] и лемму 2.4 данной работы).

Теорема 3.2. *Пусть $L : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ является интеграндом Каратеодори, который удовлетворяет условию (1.1) с $p(x) : \operatorname{cl}\Omega \to \mathbb{R}$, непрерывной по Гёльдеру. Пусть S_1 является множеством, определенным в теореме 3.1, и $\overline{S}_1$ — его пополнением в слабой топологии $W^{1,p_1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.*

Тогда множество V элементов $u \in S_1$ таких, что $L(x,u(x),\cdot)$ и $L^{qc}(x,u(x),\cdot)$ строго квазивыпуклые и совпадающие в $Du(x)$ для п. в. $x \in \Omega$, является плотным в $\overline{S}_1$ в слабой топологии W^{1,p_1}. Более того, для любого $u \in \overline{S}_1$ с $\widetilde{J}(u) < \infty$ ($\widetilde{J}$ соответствует интегранду L^{qc}) существует последовательность $u_k \in V$ такая, что $u_k \rightharpoonup u$ в W^{1,p_1}, $J(u_k) \to \widetilde{J}(u)$ при $k \to \infty$.

Напомним, что L^{qc} определяется формулой

$$L^{qc}(x,u,v) := \frac{1}{\operatorname{meas}\Omega} \inf_{\phi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)} \int\limits_\Omega L(x,u,v + D\phi(y))\,dy$$

и является интеграндом функционала $\widetilde{J} = J^{qc}$, который в этом случае интегральный (см. [1, следствие 5.2]).

Результат теоремы 3.2 вытекает из теоремы 3.1. Достаточно показать, что для каждого $u \in V$ функции $L(x,u(x),\cdot)$ и $L^{qc}(x,u(x),\cdot)$ строго квазивыпуклы в $Du(x)$ п. в. Однако это выполнено ввиду теоремы 2.2, если ее применить к функционалам J и $\widetilde{J}$, так как эти функционалы обладают свойством сходимости с функционалом на элементах $u \in V$. $\square$

Теорема 3.2 уточняет стандартную теорему о релаксации, указывая множества, где изначальный функционал и его полунепрерывная оболочка совпадают.

Чтобы доказать теорему 3.1, используем главный результат из [24].

Теорема 3.3 [24, теорема 1.1]. *Пусть L — интегранд Каратеодори такой, что*

$$L(x,u,Du) \geq -\alpha|Du| + \beta, \quad \alpha > 0.$$

Пусть S является подмножеством $W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, которое слабо предкомпактно в $W^{1,1}$ и содержит пределы всех последовательностей $u_k \in S$ таких, что u_k сходятся сильно $W^{1,1}$ и $\limsup\limits_{k\to\infty} J(u_k) < \infty$. Пусть также ρ является метрикой, эквивалентной слабой топологии в S. Тогда функционал $\widetilde{J} : (\overline{S},\rho) \to \mathbb{R}^+$, определенный как

$$\widetilde{J}(u) = \inf\{\liminf_{k\to\infty} J(u_k) : \rho(u_k,u) \to 0,\ u_k \in S\},$$

полунепрерывен снизу. Более того, существует подмножество V множества $\{u \in S : J(u) < \infty\}$ такое, что $J : (S,\rho) \to \mathbb{R}^+$ одновременно полунепрерывен снизу и устойчив на элементах V. Функционал $\widetilde{J} : (\overline{S},\rho) \to \mathbb{R}^+$ также устойчив на элементах V, и для любого $u \in \overline{S}$ с $\widetilde{J}(u) < \infty$ существует последовательность $u_k \in V$ такая, что $\rho(u_k,u) \to 0$ и $J(u_k) \to \widetilde{J}(u)$ при $k \to \infty$.

Доказательство теоремы 3.1. Возьмем $c > 1$. Рассмотрим подмножество S_c множества S_1, которое определено как

$$S_c := \{u \in S_1 : J(u) \leq c\}.$$

Можно применить теорему 3.1 к ситуации $S := S_c$, так как в случае $u_k \in S_c$ и $u_k \to u$ в $W^{1,1}$ выполнено $J(u) \leq c$ (см. [1, теорема 2.8]). Тогда существует подмножество V_c множества S_c такое, что функционал $J_c : S_c \to \mathbb{R}^+$ одновременно полунепрерывен снизу и устойчив на элементах V_c и V_c плотно в S_c в слабой топологии W^{1,p_1}. Более того, функционал $\widetilde{J}_c : \overline{S}_c \to \mathbb{R}^+$, где

$$\widetilde{J}_c(u) := \inf\{\liminf_{k\to\infty} J(u_k) : u_k \in S_c,\ u_k \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,p_1}\},$$

также устойчив на элементах V_c, и для любого $u \in \overline{S}_c$ существует последовательность $u_k \in V_c$ такая, что $u_k \rightharpoonup u$ в W^{1,p_1}, $J(u_k) \to \widetilde{J}_c(u)$ при $k \to \infty$.

Определим

$$\widetilde{V}_c := \{u \in V_c : J_c(u) = J(u) < c\}, \quad V := \cup_c \widetilde{V}_c.$$

Покажем, что множество V обладает всеми нужными свойствами.

Сначала заметим, что функционал J полунепрерывен снизу на $u \in \widetilde{V}_c$. Действительно, если $u_k \in S_1$, $u_k \rightharpoonup u$ в W^{1,p_1} и $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) < J(u)$, то все u_k принадлежат S_c, что противоречит полунепрерывности снизу функционала $J_c : S_c \to \mathbb{R}$ в u, так как $u \in V_c$. Те же рассуждения показывают, что J устойчив на u, как и $\widetilde{J}$.

Чтобы завершить доказательство, мы должны показать, что множество V плотно в множестве допустимых u с $J(u) < \infty$ и что для любого допустимого u с $\widetilde{J}(u) < \infty$ существует последовательность $u_k \in V$ такая, что $u_k \rightharpoonup u$ в W^{1,p_1} и $J(u_k) \to \widetilde{J}(u)$ при $k \to \infty$.

Для доказательства первого факта допустим, что $J(u) < \infty$. Тогда $J(u) < c$ для некоторого $c > 0$ и, следовательно, $\widetilde{J}_c(u) < c$. В этом случае существуют $u_k \in V_c$ такие, что $u_k \rightharpoonup u$ в W^{1,p_1} и $J(u_k) \to \widetilde{J}(u)$ при $k \to \infty$. Тогда $u_k \in \widetilde{V}_c$ для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ и $u_k \in V$ для тех же k.

Чтобы установить второй факт, предположим, что $\widetilde{J}(u) < \infty$. Тогда $\widetilde{J}(u) < c$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$ и, следовательно, $u \in \overline{S}_c$. Поэтому существуют $u_k \in V_c$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что $u_k \rightharpoonup u$ в W^{1,p_1} и $J(u_k) \to \widetilde{J}(u)$. Так как $J(u_k) < c$ для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$, выводим, что u_k принадлежат $\widetilde{V}_c$, а следовательно, и множеству V. $\square$

Благодарность. Выражаю признательность академику РАН Ю. Г. Решетняку за интерес к данным исследованиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сычев М.* Полунепрерывность снизу и релаксация для интегральных функционалов с $p(x)$-, $p(x,u)$-ростом // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 6. С. 1394–1413.

2. *Coscia A., Mucci D.* Integral representation and Γ-convergence of variational integrals with $P(X)$-growth // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2002. V. 7. P. 495–519.

3. *Mucci D.* Relaxation of variational functionals with piecewise constant growth conditions // J. Convex Anal. 2003. V. 10. P. 295–329.

4. *Mingione G., Mucci D.* Integral functionals and the gap problem: sharp bounds for relaxation and energy concentration // SIAM J. Math. Anal. 2005. V. 36, N 5. P. 1540–1579.

5. *Acerbi E., Bouchitte G., Fonseca I.* Relaxation of convex functionals. The gap phenomenon // Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire. 2003. V. 20. P. 359–390.

6. *Sychev M.* Characterization of homogeneous gradient Young measures in case of arbitrary integrands // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. 2000. V. XXIX, N 4. P. 531–548.

7. *Kristensen J., Rindler F.* Characterization of generalized gradient Young measures generated by sequences in $W^{1,1}$ and BV // Arch. Ration. Mech. Anal. 2010. V. 197. P. 539–598.

8. *Bogolubov N.* Sur quelques méthodes nouvelles dans le calcul des variations // Ann. Math. Pura Appl. 1930. V. 7. P. 149–271.

9. *Решетняк Ю. Г.* Общие теоремы о полунепрерывности и сходимости с функционалом // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 5. С. 1051–1069.

10. *Cellina A., Zagatti S.* A version of Olech's lemma in a problem of the calculus of variations // SIAM J. Control Optimization. 1994. V. 32. P. 1114–1127.

11. *Василенко Г. Н.* О сходимости с функционалом // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 1. С. 26–34.

12. *Visintin A.* Strong convergence results related to strict convexity // Comm. PDE. 1984. V. 9. P. 439–466.

13. *Сычев М. А.* Необходимые и достаточные условия в теоремах полунепрерывности снизу и сходимости с функционалом // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 6. С. 77–108.

14. *Sychev M.* Attainment and relaxation results in special classes of deformations // Calc. Var. 2004. V. 19. P. 183–210.

15. *Evans L.C., Gariepy R.F.* Blowup, compactness and partial regularity in the calculus of variations // Indiana Univ. Math. J. 1987. V. 36. P. 361–371.

16. *Kristensen J., Taheri A.* Partial regularity of strong local minimizers in the multi-dimensional calculus of variations // Arch. Ration. Mech. Anal. 2003. V. 170. P. 63–89.

17. *Evans L. C., Gariepy R. F.* Some remarks concerning quasiconvexity and strong convergence // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1987. V. 106. P. 53–61.

18. *Kristensen J.* Finite functionals and Young measures generated by gradients of Sobolev functions: Thes. … doct. phylosophy (mathematics). Technical Univ. Denmark, Lyngby, 1994.

19. *Sychev M.* Young measure approach to characterization of behaviour of integral functionals on weakly convergent sequences by means of their integrands // Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire. 1998. V. 15, N 6. P. 755–783.

20. *Sychev M.* A new approach to Young measure theory, relaxation and convergence in energy // Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Non Linéaire. 1999. V. 16. P. 773–812.

21. *Сычев М.* Интегральные функционалы с $p(x)$-, $p(x,u)$-ростом // Докл. РАН. 2010. Т. 431. С. 587–588.

22. *Sychev M.* Comparing two methods of resolving homogeneous differential inclusions // Calc. Var. 2001. V. 13. P. 213–229.

23. *Alberti G.* A Lusin property for gradients // J. Funct. Anal. 1991. V. 100. P. 110–118.

24. *Sychev M.* Sets of lower semicontinuity and stability of integral functionals // J. Math. Pures Appl. 2005. V. 84, N 9. P. 985–1014.

25. *Sychev M.* A few remarks on differential inclusions // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. 2006. V. 136. P. 649–668.

26. *Muller S., Sychev M.* Optimal existence results for nonhomogeneous differential inclusions // J. Funct. Anal. 2001. V. 181. P. 447–475.

27. *Šverák V.* Lower-semicontinuity of variational integrals and compensated compactness // Proc. Int. Congr. Mathematicians (Zurich, 1994). Basel: Birkhauser, 1995. V. 1, 2. P. 1153–1158.

Статья поступила 31 июля 2011 г.

Сычев Михаил Андреевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`masychev@math.nsc.ru`