Сибирский математический журнал
Июль—август, 2012. Том 53, № 4

УДК 517.51

ЗАМЕЧАНИЕ О СВОЙСТВАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ЕМКОСТИ В $\mathbb{R}^3$

А. С. Романов

Аннотация. Рассматривается соотношение между емкостями трех пар «противоположных граней» трехмерного криволинейного шестигранника.

Ключевые слова: пространство Соболева, емкость, модуль семейства поверхностей.

Емкость, связанная с пространствами Соболева, является более тонкой характеристикой по сравнению с мерой и весьма активно используется при изучении свойств соболевских функций и различных классов отображений. Многие свойства, выполняющиеся для суммируемых функций почти всюду, для функций из пространств Соболева $L^1_p(G)$ выполняются квазивсюду, т. е. вне некоторого множества нулевой $(1,p)$-емкости. Для всякой функции $u \in L^1_p(G)$ существует эквивалентная ей квазивсюду однозначно определенная квазинепрерывная функция $\tilde{u}$ такая, что для всякого $\varepsilon > 0$ функция $\tilde{u}$ непрерывна вне некоторого открытого множества U_ε, имеющего $(1,p)$-емкость, меньшую, чем ε. Информацию о свойствах нелинейной емкости и ее различных приложениях в теории функций можно найти в книгах [1–3]. Изучение различных новых емкостных соотношений и оценок представляется вполне естественной задачей. В данной статье нас будет интересовать соотношение специального вида для вариационной p-емкости в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим ограниченную область $G \subset \mathbb{R}^n$. Для пары непересекающихся компактов $K_0, K_1 \subset \overline{G}$ обозначим через $D(K_0, K_1, G)$ класс допустимых функций, состоящий из всех функций $u \in C^\infty(G) \cap L^1_p(G)$, принимающих значение i в некоторой окрестности компакта K_i.

При $1 \leq p < \infty$ соответствующую p-емкость определим равенством

$$\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) = \inf_{u \in D(K_0,K_1,G)} \int_G |\nabla u|^p \, dV_n.$$

Вообще говоря, при вычислении p-емкости могут быть использованы и более широкие классы допустимых функций, к примеру класс непрерывных функций $u \in L^1_p(G)$, которые равны нулю в некоторой окрестности K_0 и единице в некоторой окрестности K_1. В случае, когда $K_0, K_1 \subset G$, можно выбрать еще более широкий класс допустимых функций $D^*(K_0, K_1, G)$, состоящий из квазинепрерывных функций $u \in L^1_p(G)$ таких, что $u = 0$ квазивсюду на K_0 и $u = 1$ квазивсюду на K_1 [1, 2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00662–а), а также Интеграционного проекта СО РАН № 30, 2009 г.

Класс допустимых функций $D(K_0, K_1, G)$ является выпуклым подмножеством пространства Соболева $L_p^1(G)$, и при $p > 1$ существует единственная экстремальная функция $u_0 \in \overline{D(K_0, K_1, G)}$ такая, что

$$\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) = \int_G |\nabla u_0|^p \, dV_n.$$

Отметим, что экстремальные функции для p-емкости принадлежат пространству Соболева $L_p^1(G)$, в обобщенном смысле удовлетворяют p-уравнению Лапласа

$$\operatorname{div}(|\nabla f|^{p-2} \cdot \nabla f) = 0$$

и являются достаточно гладкими. Согласно [4] на всякой строго внутренней подобласти $D \subset G$ решение p-уравнения Лапласа является функцией класса $C^{1,\alpha}$ и $|\nabla f| \le K_D < \infty$.

Далее в обозначении емкости в случае, когда будем иметь дело с некоторой фиксированной областью, символ области будем опускать и писать $\operatorname{cap}_p(K_0, K_1)$.

Нам понадобится еще понятие p-модуля семейства поверхностей. Пусть Σ — семейство гиперповерхностей $S \subset G$. Класс допустимых борелевских метрик определим условием

$$N(\Sigma) = \left\{ \rho \in L_p(G) \mid \int_S \rho \, dH_{n-1} \ge 1 \text{ для всех } S \in \Sigma \right\},$$

а p-модуль семейства Σ — равенством

$$M_p(\Sigma) = \inf_{\rho \in N(\Sigma)} \int_G \rho^p \, dV_n.$$

Семейство поверхностей Σ_0 называют *исключительным*, если $M_p(\Sigma_0) = 0$. Говорят, что некоторое свойство *выполняется для почти всех* поверхностей семейства Σ, если подсемейство, на котором оно не выполняется, является исключительным. При вычислении модуля можно использовать более широкий класс метрик, которые допустимы для почти всех поверхностей семейства Σ. Отметим, что для ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$ семейство гиперповерхностей $S \subset G$, у которых $H_{n-1}(S) = \infty$, является исключительным, поскольку метрика $\rho \equiv \varepsilon$ допустима для такого семейства при любом $\varepsilon > 0$.

Как и в [5], ограниченную односвязную область $G \subset \mathbb{R}^2$ с жордановой границей Γ, на которой отмечены четыре различные последовательные точки $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \Gamma$, будем называть *четырехсторонником*, а замкнутые граничные дуги $F_0 = \Gamma_{a_1 a_4}$, $F_1 = \Gamma_{a_2 a_3}$, $E_0 = \Gamma_{a_1 a_2}$, $E_1 = \Gamma_{a_3 a_4}$ — его *сторонами*.

Пусть $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, u — экстремальная функция для p-емкости пары сторон F_0, F_1, а функция v пропорциональна экстремальной для p'-емкости пары сторон E_0, E_1.

Как показано в [5], при соответствующем коэффициенте пропорциональности функции u и v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial y}, \end{cases} \tag{1}$$

которая при $p = 2$ превращается в систему Коши — Римана. Возникающие при $p \ne 2$ экстремальные отображения $f = (u, v)$ обладают некоторыми свойствами конформных отображений.

При этом характеристическим свойством, связывающим соответствующие емкости, является равенство

$$[\operatorname{cap}_p(F_0, F_1)]^{1/p} \cdot [\operatorname{cap}_{p'}(E_0, E_1)]^{1/p'} = 1. \tag{2}$$

Замечание. При обсуждении в [5] равенства (2) автор, к сожалению, не был знаком с результатами В. А. Шлыка и Ю. В. Дымченко [6, 7], изучавших ранее в пространственном случае связь емкости и модуля разделяющих поверхностей. В частности, в [6] получено равенство

$$M_{p'}(\Sigma) = [\operatorname{cap}_p(K_0, K_1)]^{-p'/p}, \tag{3}$$

где Σ — семейство поверхностей, разделяющих K_0 и K_1. В силу совпадения в плоском случае p'-модуля разделяющих кривых и p'-емкости пары сторон E_0, E_1 соотношение (2) может быть получено как непосредственное следствие равенства (3).

Отметим, что для плоского четырехсторонника соотношение (2) является единственным возможным мультипликативным равенством такого типа, связывающим емкости двух пар «противоположных сторон», в том смысле, что из выполнения при некоторых $1 < p, q < \infty$ для произвольного четырехсторонника равенства

$$[\operatorname{cap}_p(F_0, F_1)]^{\alpha} \cdot [\operatorname{cap}_q(E_0, E_1)]^{\beta} = L = \mathrm{const}$$

следует, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$, $L = 1$.

Ю. Г. Решетняк высказал предположение, что в пространственном случае помимо равенства (3) должны быть и иные емкостные соотношения. К примеру, соотношение, связывающее между собой емкости трех пар «противоположных граней» криволинейного шестигранника.

Для начала проще всего проверить возможность такого соотношения для прямоугольного параллелепипеда, поскольку в этом случае емкость пары противоположных граней легко вычисляется в явном виде.

Фиксируем произвольную область $D \subset \mathbb{R}^2$ с площадью $S < \infty$ и рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ цилиндрическую область

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D,\ 0 < z < d\},$$

нижнее основание которой обозначим через D_0, а верхнее — через D_1. Для цилиндрической области значение p-емкости пары оснований известно давно и легко вычисляется в явном виде:

$$\operatorname{cap}_p(D_0, D_1) = \frac{S}{d^{p-1}}. \tag{4}$$

Равенство (4) является простым следствием оценки снизу, выполняющейся для произвольной допустимой функции u, $u|_{D_0} = 0$, $u|_{D_1} = 1$,

$$S = \int\limits_D\int dxdy \le \int\limits_D\int \left(\int\limits_0^d \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| dz\right)^p dxdy \le d^{p-1} \int\int\limits_{\Omega}\int |\nabla u|^p \, dxdydz.$$

Экстремалью в данном случае является линейная функция $u(x, y, z) = \frac{z}{d}$.

Рассмотрим произвольный прямоугольный параллелепипед Q с ребрами длины a, b и c. Противоположные параллельные грани, расстояние между которыми равно a, обозначим через A_0, A_1. Аналогичным образом определим пары противоположных граней B_0, B_1 и C_0, C_1. Предположим, что при некоторых значениях показателей суммируемости $1 < p, q, r < \infty$ и некоторых показателях степени α, β, γ независимо от размеров параллелепипеда выполняется равенство

$$[\operatorname{cap}_p(A_0, A_1)]^\alpha\,[\operatorname{cap}_q(B_0, B_1)]^\beta\,[\operatorname{cap}_r(C_0, C_1)]^\gamma = L = \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

Вычисляя по формуле (4) емкости соответствующих пар противоположных граней в равенстве (5) и учитывая выполнение равенства для произвольного набора значений a, b, c, получаем

$$\alpha p = \beta q = \gamma r = \alpha + \beta + \gamma, \quad L = 1. \tag{6}$$

Из этих равенств очевидным образом следует соотношение $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Поскольку $L = 1$, в равенстве (5) роль играют лишь соотношения показателей степени, а не их абсолютная величина. Поэтому, полагая $\alpha + \beta + \gamma = 1$, из равенств (6) получаем $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$, $\gamma = \frac{1}{r}$.

Таким образом, для произвольного прямоугольного параллелепипеда выполняется равенство

$$[\operatorname{cap}_p(A_0, A_1)]^{1/p}\,[\operatorname{cap}_q(B_0, B_1)]^{1/q}\,[\operatorname{cap}_r(C_0, C_1)]^{1/r} = 1, \tag{7}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

Проверим выполнение аналогичного равенства в более общей ситуации. Предпочитая максимальной общности наглядность модельной ситуации, рассмотрим ограниченную область $G \subset \mathbb{R}^3$, граница которой является связным кусочно гладким двумерным многообразием, гомеоморфным сфере и имеющим конечную площадь. Пусть γ_0 и γ_1 — непересекающиеся простые кусочно гладкие замкнутые контуры, лежащие на ∂G. Односвязные компоненты множества $\partial G \setminus (\gamma_0 \cup \gamma_1)$ обозначим через A_0 и A_1 соответственно. В множестве $\partial G \setminus (A_0 \cup A_1)$ проведем четыре непересекающиеся кусочно гладкие кривые, соединяющие контуры γ_0 и γ_1. В результате получим «криволинейный шестигранник», пары «противоположных граней» которого обозначим через A_0 и A_1, B_0 и B_1, C_0 и C_1.

Пусть $1 < p, q, r < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Обозначим через u экстремальную функцию для p-емкости «граней» A_0 и A_1, через v — экстремальную функцию для q-емкости «граней» B_0 и B_1, а через w — экстремальную функцию для r-емкости «граней» C_0 и C_1. Через Σ обозначим семейство поверхностей, разделяющих «грани» A_0 и A_1 в G.

Поскольку грани находятся на положительном расстоянии друг от друга и $H_2(A_i) > 0$, то $0 < \operatorname{cap}_p(A_0, A_1) < \infty$. Согласно равенству (3)

$$[\operatorname{cap}_p(A_0, A_1)]^{1/p}\,[M_{p'}(\Sigma)]^{1/p'} = 1. \tag{8}$$

Таким образом, нужно сравнить p'-модуль семейства разделяющих поверхностей Σ и соответствующие емкости пар «граней» B_0, B_1 и C_0, C_1.

Рассмотрим допустимую для пары «граней» B_0, B_1 функцию $\tilde{v} \in D(B_0, B_1, G)$, принимающую значение i в окрестности V_i «грани» B_i, и допустимую для пары «граней» C_0, C_1 функцию $\widetilde{w} \in D(C_0, C_1, G)$, принимающую значение i в окрестности W_i «грани» C_i. Без ограничения общности можно считать, что части границ всех четырех окрестностей, лежащие в области G, являются гладкими (полиэдральными) поверхностями. Покажем, что метрика $\tilde{\rho} = |\nabla \tilde{v}| \cdot |\nabla \widetilde{w}|$ допустима для семейства поверхностей Σ.

Рассмотрим подобласть $G' = G \setminus \overline{(V_0 \cup V_1 \cup W_0 \cup W_1)}$, полиэдральную поверхность $\sigma \in \Sigma$ и положим $\sigma' = \sigma \cap G'$. Поскольку σ отделяет A_0 от A_1 в области G, то σ' разделяет соответствующие части A_0 и A_1 в G'. Для пересечения множества уровня функции v с соответствующей частью поверхности σ введем обозначение $E_t = \sigma' \cap \{v = t\}$.

Так как $\tilde\rho = 0$ на множестве $G \setminus G'$, то

$$\iint\limits_{\sigma} \tilde\rho\, dH_2 = \iint\limits_{\sigma'} \tilde\rho\, dH_2.$$

Множество σ' находится на положительном расстоянии от границы области G, и допустимые функции $\tilde v, \widetilde w$ являются липшицевыми в некоторой окрестности σ'. Это позволяет нам воспользоваться формулой Кронрода — Федерера (формулой коплощади) [8, 9]. Поскольку $|\nabla \tilde v| \geq |\nabla_\sigma \tilde v|$, где $\nabla_\sigma \tilde v$ — проекция градиента функции $\tilde v$ на касательную плоскость к поверхности σ, а функция $\widetilde w$ принимает на каждом множестве E_t все значения от нуля до единицы, то

$$\iint\limits_{\sigma} \tilde\rho\, dH_2 = \iint\limits_{\sigma'} |\nabla \tilde v| \cdot |\nabla \widetilde w|\, dH_2 \geq \int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_{E_t} |\nabla \widetilde w|\, dH_1 \Bigg)\, dt \geq 1. \tag{9}$$

Теперь нужно распространить неравенство (9) на почти все поверхности $S \in \Sigma$. Для этого несколько модифицируем схему доказательств из [10], основанную на аппроксимации произвольных поверхностей полиэдральными и предельном переходе для поверхностных интегралов от непрерывной функции.

Поскольку семейство поверхностей, у которых $H_2(S) = \infty$, является исключительным, мы можем ограничиться рассмотрением поверхностей $S \in \Sigma$, у которых $H_2(S) < \infty$. Обозначим через G_0 ту часть множества $G \setminus S$, замыкание которой содержит A_0. Фиксируем положительное число d, которое одновременно меньше, чем расстояние от S до $A_0 \cup A_1$, и меньше, чем расстояние от G' до $B_0 \cup B_1 \cup C_0 \cup C_1$.

Пусть $G_2 = \{a \in G \mid \operatorname{dist}(a, \partial G) > d/2\}$, а область G_1 такова, что $\overline{G_2} \subset G_1, \overline{G_1} \subset G$. При этих условиях существует такая непрерывная функция h, что $h = 1$ на G_2 и $h = 0$ вне G_1. Определим в области G новую непрерывную метрику, полагая $\rho^* = \tilde\rho \cdot h$, и продолжим ее нулем на $\mathbb{R}^3 \setminus G$. Метрика ρ^* непрерывна и равна нулю вне множества $G_1 \cap G'$, в частности, в окрестности границы области G и на множестве $S \setminus G_2$. Поэтому

$$\iint\limits_{\partial G_0} \rho^*\, dH_2 = \iint\limits_{S} \rho^*\, dH_2 = \iint\limits_{S \cap G_2} \tilde\rho\, dH_2.$$

Согласно теореме 2.4.2 из [10] существует последовательность полиэдральных множеств P_k, границы которых ∂P_k равномерно сходятся к регуляризованной границе области G, обозначаемой $\beta(G_0) \subset \partial G_0$, при этом

$$\iint\limits_{\partial P_k} \rho^*\, dH_2 \to \iint\limits_{\beta(G_0)} \rho^*\, dH_2.$$

Начиная с некоторого номера k_0 участки полиэдральных поверхностей ∂P_k, расположенные в окрестности множества $S \cap G_2$, будут разделять $A_0 \cap \partial G'$ и $A_1 \cap \partial G'$ в G', и согласно оценке (9)

$$\iint\limits_{\partial P_k} \rho^*\, dH_2 \geq \iint\limits_{\partial P_k \cap G_2} \tilde\rho\, dH_2 \geq 1.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{S} \tilde\rho\, dH_2 \geq \iint\limits_{S\cap G_2} \tilde\rho\, dH_2 = \iint\limits_{\partial G_0} \rho^*\, dH_2 \geq \iint\limits_{\beta(G_0)} \rho^*\, dH_2 = \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{\partial P_k} \rho^*\, dH_2 \geq 1. \tag{10}$$

Это означает, что метрика $\tilde\rho$ допустима для семейства Σ и, следовательно,

$$M_{p'}(\Sigma) \leq \iiint\limits_{G} \tilde\rho^{p'}\, dV_3.$$

Рассмотрим последовательность допустимых функций $\tilde v_k \in D(B_0, B_1, G)$, сходящуюся в $L^1_q(G)$ к экстремальной функции v, и последовательность допустимых функций $\widetilde w_k \in D(C_0, C_1, G)$, сходящуюся в $L^1_r(G)$ к экстремальной функции w. Несложно заметить, что при этом допустимые метрики $\tilde\rho_k = |\nabla\tilde v_k|\cdot|\nabla\widetilde w_k|$ сходятся к метрике $\rho = |\nabla v|\cdot|\nabla w|$ в пространстве $L_{p'}(G)$.

Поскольку $\frac{p'}{q} + \frac{p'}{r} = 1$, используя стандартные преобразования и неравенство Гёльдера, получаем

$$\Bigl(\iiint\limits_{G} |\tilde\rho_k - \rho|^{p'}\, dV_3\Bigr)^{1/p'}$$
$$\leq \Bigl(\iiint\limits_{G} |\nabla(\tilde v_k - v)|^{p'}\cdot|\nabla\widetilde w_k|^{p'}\, dV_3\Bigr)^{1/p'} + \Bigl(\iiint\limits_{G} |\nabla v|^{p'}\cdot|\nabla(\widetilde w_k - w)|^{p'}\, dV_3\Bigr)^{1/p'}$$
$$\leq \bigl\|\tilde v_k - v \mid L^1_q(G)\bigr\|\,\bigl\|\widetilde w_k \mid L^1_r(G)\bigr\| + \bigl\|v \mid L^1_q(G)\bigr\|\,\bigl\|\widetilde w_k - w \mid L^1_r(G)\bigr\| \to 0.$$

Согласно неравенству (10) и п. 2.5(v) из [10] неравенство

$$\iint\limits_{S} \rho\, dH_2 \geq 1$$

будет выполняться для почти всех $S \in \Sigma$. Поэтому метрика ρ оказывается допустимой для семейства Σ и, следовательно,

$$M_{p'}(\Sigma) \leq \iiint\limits_{G} \rho^{p'}\, dV_3 \leq \bigl\|v \mid L^1_q(G)\bigr\|^{p'}\,\bigl\|w \mid L^1_r(G)\bigr\|^{p'}$$
$$= [\operatorname{cap}_q(B_0, B_1)]^{p'/q}\,[\operatorname{cap}_r(C_0, C_1)]^{p'/r}. \tag{11}$$

Из неравенства (11) и равенства (8) следует оценка

$$[\operatorname{cap}_p(A_0, A_1)]^{1/p}\,[\operatorname{cap}_q(B_0, B_1)]^{1/q}\,[\operatorname{cap}_r(C_0, C_1)]^{1/r} \geq 1. \tag{12}$$

Это основное соотношение, связывающее три емкости указанного типа. Несложно показать, что равенство (7) будет выполняться лишь в исключительных ситуациях, а в общем случае можно гарантировать лишь выполнение неравенства (12).

Рассмотрим область $D \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно гладкой границей и цилиндрическую область $\Omega = D \times (0, d) \subset \mathbb{R}^3$. Отметим на границе плоской области D четыре различные точки и восстановим из каждой перпендикуляр до пересечения с плоскостью верхнего основания. В полученном цилиндрическом «криволинейном шестиграннике» обозначим через A_0 и A_1 нижнее и верхнее основания, а пары противоположных боковых «граней» — соответственно через B_0, B_1 и C_0, C_1. Покажем, что равенство (7) для цилиндрического «шестигранника» Ω возможно лишь в том случае, когда он является прямоугольным параллелепипедом.

Как и ранее, обозначим через v экстремальную функцию для q-емкости «граней» B_0 и B_1, через w — экстремальную функцию для r-емкости «граней» C_0 и C_1, через Σ — семейство поверхностей, разделяющих «грани» A_0 и A_1, а через Σ_1 — семейство сечений области Ω плоскостями $z = \mathrm{const}$.

Если площадь области D равна S, то из равенств (3) и (4) следует, что

$$M_{p'}(\Sigma) = \frac{d}{S^{p'-1}}.$$

При этом вполне очевидно, что в данном случае $M_{p'}(\Sigma) = M_{p'}(\Sigma_1)$, а экстремальной метрикой для этих семейств поверхностей является постоянная функция $\rho_0 = 1/S$.

Как и в общем случае, метрика $\rho = |\nabla v|\,|\nabla w|$ допустима для семейства поверхностей Σ_1. Предполагая выполнение равенства (7), из оценки (11) и равенства (8) получаем

$$\begin{aligned} M_{p'}(\Sigma_1) = M_{p'}(\Sigma) &\le \iiint\limits_{\Omega} |\nabla v|^{p'}\,|\nabla w|^{p'}\,dV_3 \\ &\le \Big(\iiint\limits_{\Omega} |\nabla v|^{q}\,dV_3\Big)^{p'/q} \Big(\iiint\limits_{\Omega} |\nabla w|^{r}\,dV_3\Big)^{p'/r} \\ &= [\mathrm{cap}_p(A_0, A_1)]^{-p'/p} = M_{p'}(\Sigma) = M_{p'}(\Sigma_1). \end{aligned}$$

С одной стороны, из этого соотношения вытекает, что метрика $\rho = |\nabla v|\,|\nabla w|$ экстремальна, с другой стороны, выполнение этого соотношения возможно лишь в случае, когда используемое на втором шаге неравенство Гёльдера превращается в равенство, т. е. при условии выполнения почти всюду в Ω равенства

$$|\nabla v|^q = C\,|\nabla w|^r. \tag{13}$$

Из единственности экстремальной метрики и равенства (13) следует, что модули градиентов функций v и w почти всюду в Ω постоянны. Из принадлежности экстремальных функций классу $C^{1,\alpha}$ выводим, что $|\nabla v| = C_1, |\nabla w| = C_2$ всюду в Ω, т. е. экстремальные функции v и w липшицевы в Ω и имеют постоянные граничные значения всюду на соответствующих «боковых гранях».

С учетом строения рассматриваемого «шестигранника» интуитивно понятно, что экстремальные функции v и w не должны зависеть от переменной z. Доказывается это предположение довольно просто.

Обозначим через D_a сечение области Ω плоскостью $z = a$ и через $E_{a,t}$ — линию уровня функции v, лежащую в D_a, т. е. $E_{a,t} = D_a \cap \{v = t\}$. Через $\nabla_a v$ обозначим проекцию градиента функции v на D_a, а символом $\vec{\tau}_t$ — единичный касательный вектор к $E_{a,t}$. Используя формулу Кронрода — Федерера [8, 9] и учитывая, что на множестве $E_{a,t}$ функция w меняется от 0 до 1, получаем

$$\begin{aligned} 1 = \iint\limits_{D_a} \frac{1}{S}\,dH_2 = \iint\limits_{D_a} |\nabla v|\,|\nabla w|\,dH_2 \ge \iint\limits_{D_a} |\nabla_a v|\,|\nabla w|\,dH_2 \\ \ge \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{E_{a,t}} |\nabla w|\,dH_1\Big)\,dt \ge \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{E_{a,t}} (\nabla w, \vec{\tau}_t)\,dH_1\Big)\,dt = 1. \end{aligned}$$

Из этого соотношения следует $|\nabla v| = |\nabla_a v|$, т. е. функция v (а по симметрии и функция w) не зависит от переменной z. Из последней части соотношения вытекает $|\nabla w| = (\nabla w, \vec{\tau}_t)$, это означает, что градиенты функций v и w ортогональны, $(\nabla v, \nabla w) = 0$.

Поскольку функции v и w не зависят от переменной z, мы можем считать, что они естественным образом определены и на нижнем основании $A_0 = D \subset \mathbb{R}^2$, и при изучении их свойств можно ограничиться рассмотрением сужений экстремальных функций на плоскую область D, полагая $v_0 = v|_D$ и $w_0 = w|_D$.

Из условий $(\nabla v, \nabla w) = 0, |\nabla v| = C_1, |\nabla w| = C_2$ следует, что одна из пар функций $\left(\frac{v_0}{C_1}, \frac{w_0}{C_2}\right)$ или $\left(\frac{v_0}{C_1}, -\frac{w_0}{C_2}\right)$ удовлетворяет условиям Коши — Римана, поэтому одна из функций $f_1 = \frac{v_0}{C_1} + i\frac{w_0}{C_2}$ или $f_2 = \frac{v_0}{C_1} - i\frac{w_0}{C_2}$ аналитична в области D с постоянным модулем производной. Следовательно, одна из функций f_k — линейная функция комплексного переменного, а функции v_0 и w_0 являются линейными функциями двух действительных переменных. Поэтому и функции v и w, не зависящие от переменной z, линейны в $\mathbb{R}^3$.

«Грани» B_0 и B_1 являются множествами уровня функции v и в силу линейности экстремальной функции лежат в параллельных плоскостях. Аналогичным образом устроены и «грани» C_0 и C_1. Поскольку градиенты функций v и w ортогональны, «грани» B_i ортогональны «граням» C_j. Учитывая, что боковые грани ортогональны основаниям A_0 и A_1, получаем, что область Ω является прямоугольным параллелепипедом.

Таким образом, в отличие от равенства (2), которое верно для произвольного плоского четырехсторонника, равенство (7) выполняется лишь для прямоугольных параллелепипедов. Выполнение в плоском случае равенства (2) связано с существованием для произвольной ограниченной односвязной области $G \subset \mathbb{R}^2$ экстремального отображения на некоторый прямоугольник $P \subset \mathbb{R}^2$. В пространственном случае выполнение равенства (7) можно связать с экстремальными отображениями на прямоугольные параллелепипеды, однако класс таких отображений оказывается очень узким. Возникающая при этом ситуация в некотором смысле вполне аналогична ситуации с конформными отображениями: на плоскости класс конформных отображений настолько широк, что согласно теореме Римана произвольные ограниченные односвязные области являются конформно эквивалентными, в то время как в пространстве согласно теореме Лиувилля класс конформных отображений совпадает с весьма узким классом мёбиусовых отображений.

Отметим, что неравенство (12) может оказаться полезным при получении различных емкостных оценок, а неравенство (11), связывающее модуль семейства поверхностей и емкости соответствующих «граней», является несколько неожиданным и, на наш взгляд, представляет самостоятельный интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
2. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
3. *Эванс Л. К., Гариепи Р. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научн. кн., 2002.
4. *Lewis J.* Regularity of the derivatives of solutions to certain elliptic equations // Indiana Univ. Math. J. 1983. V. 32, N 6. P. 849–858.
5. *Романов А. С.* Емкостные соотношения в плоском четырехсторонике // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 886–897.

6. *Шлык В. А.* Емкость конденсатора и модуль семейства разделяющих поверхностей // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1990. Т. 185. С. 168–182.
7. *Дымченко Ю. В., Шлык В. А.* Соотношение между весовой емкостью конденсатора и весовым модулем семейства разделяющих поверхностей // Дальневосточный мат. сб. 1996. № 2. С. 72–80.
8. *Бураго Д. М., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. Л.: Наука, 1980.
9. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
10. *Ziemer W. P.* Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 126, N 3. P. 460–473.

Статья поступила 11 июля 2011 г.

Романов Александр Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
asrom@math.nsc.ru