Сибирский математический журнал
Июль—август, 2012. Том 53, № 4

УДК 512.667.7

КОЛЬЦА МАРТИНДЕЙЛА И H–МОДУЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ, ОБЛАДАЮЩИЕ ИНВАРИАНТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

М. С. Еряшкин

Аннотация. Рассматривается категория $\mathscr{A}$ не обязательно коммутативных H-модульных алгебр, гомоморфно отображающихся на коммутативные алгебры. Показано, что H-эквивариантное кольцо частных Мартиндейла $Q_H(A)$ является конечномерной фробениусовой алгеброй над подполем инвариантных элементов $Q_H(A)^H$, а также классическим кольцом частных алгебры A. Введена полная подкатегория $\widetilde{\mathscr{A}}$ категории $\mathscr{A}$, алгебры из которой целы над своими подалгебрами инвариантов. Построен функтор $\mathscr{A} \to \widetilde{\mathscr{A}}$, сопряженный слева к включению $\widetilde{\mathscr{A}} \to \mathscr{A}$.

Ключевые слова: алгебры Хопфа, теория инвариантов, кольцо частных Мартиндейла.

§ 1. Введение

Работа продолжает начатое в [1] исследование подалгебр инвариантных элементов некоммутативных H-модульных алгебр специального вида.

Все рассматриваемые алгебры и алгебры Хопфа, если не оговорено противное, определены над полем $\mathbf{k}$. Алгебры предполагаются ассоциативными с единицей. Через $\Delta : H \to H \otimes H$ будем обозначать коумножение, а через $\varepsilon : H \to \mathbf{k}$ — коединицу алгебры Хопфа H. Далее всюду H — алгебра Хопфа и A — ассоциативная $\mathbf{k}$-алгебра. Все необходимые факты, касающиеся алгебр Хопфа, можно найти в [2]. Все тензорные произведения, если не оговорено противное, берутся над $\mathbf{k}$, а Hom — это $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}$.

Напомним, что *H-модульной алгеброй* называется ассоциативная алгебра A, которая наделена структурой левого H-модуля, и для любых $h \in H$, $a, b \in A$

$$h \cdot (ab) = \sum_h (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b), \quad h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A.$$

Элемент $a \in A$ называется *инвариантом*, если $h \cdot a = \varepsilon(h) a$ для всех $h \in H$. Непосредственная проверка показывает, что множество инвариантов A^H является подалгеброй в A.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00431), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракты П267, 14.740.11.1142), а также гранта Президента Российской Федерации (№ МК–6106.2012.1).

Как обобщение классического результата в случае действия конечной группы на коммутативной алгебре в [3] поставлен вопрос о том, будет ли коммутативная H-модульная A целым расширением подалгебры инвариантов A^H в случае, если H конечномерна [3, 4.2.6]. В [4, 5] получен положительный ответ при дополнительных предположениях. Контрпримеры, построенные в [6, 7], обусловлены наличием в A ненулевых нильпотентных H-инвариантных идеалов. Если A конечно порождена как алгебра, то свойство A быть целой над A^H равносильно тому, что A конечно порождена как модуль над A^H, и в этом случае A^H конечно порождена как алгебра.

В предшествующей работе [1] автор ввел в рассмотрение некоторый класс $\mathscr{A}$ не обязательно коммутативных H-модульных алгебр. Было установлено, что свойства конечности остаются верными для алгебр A из класса $\mathscr{A}$ в случае, когда H полупроста, но нарушаются в случае, когда H неполупроста, несмотря на отсутствие в A ненулевых нильпотентных H-инвариантных идеалов. Таким образом, требуется видоизменить первоначальную постановку вопроса. В данной статье показано, что вопрос о том, цела ли A над A^H, решается положительно при переходе от алгебры A к некоторому ее расширению $\widetilde{A}$, полученному присоединением набора инвариантных элементов. Для выявления функториальности $\widetilde{A}$ нужно понимать $\mathscr{A}$ как категорию.

Определение 1. Обозначим через $\mathscr{A}$ (или, более точно, $\mathscr{A}_H$) *категорию*, объектами которой являются пары $(A,\, \mathfrak{I}_A)$, где A — некоторая H-модульная алгебра, $\mathfrak{I}_A$ — идеал в A такой, что фактор-алгебра $S_A = A/\mathfrak{I}_A$ коммутативна, и $\mathfrak{I}_A$ не содержит ненулевых устойчивых относительно действия H идеалов алгебры A.

Морфизмы в категории $\mathscr{A}$ — это гомоморфизмы H-модульных алгебр $\phi : A \to B$ с условием $\phi(\mathfrak{I}_A) \subseteq \mathfrak{I}_B$.

Для краткости будем говорить об алгебрах из категории $\mathscr{A}$ без явного упоминания идеалов $\mathfrak{I}_A$. Обозначим через $\pi_A : A \to S_A$ каноническую проекцию.

Важную роль будет играть H-эквивариантное кольцо частных Мартиндейла $Q_H(A)$, введенное в обиход Коэн [8]. В предположении, что S_A целостно, обнаруживается ряд замечательных свойств H-модульной алгебры $Q_H(A)$. Во-первых, $Q_H(A)$ также принадлежит $\mathscr{A}$. Подалгебра инвариантных элементов $Q_H(A)^H$ является полем, над которым алгебра $Q_H(A)$ конечномерна. Более того, $Q_H(A)$ фробениусова и не содержит нетривиальных H-инвариантных идеалов. Наконец, $Q_H(A)$ в действительности является классическим кольцом частных алгебры A. Перечисленные факты доказываются в § 2–4.

В § 5 строится расширение $\widetilde{A}$ произвольной алгебры A из $\mathscr{A}$. Алгебра $\widetilde{A}$ принадлежит полной подкатегории $\widetilde{\mathscr{A}}$ в $\mathscr{A}$, состоящей из алгебр с инвариантными характеристическими многочленами. Фактор-кольцо S_A не изменяется при переходе от A к $\widetilde{A}$. Основной результат, сформулированный в теореме 5.4, означает, что конструкция $\widetilde{A}$ дает функтор $\mathscr{A} \to \widetilde{\mathscr{A}}$, сопряженный слева к включению $\widetilde{\mathscr{A}} \to \mathscr{A}$. Если S_A целостно, то $\widetilde{A}$ является подалгеброй в $Q_H(A)$.

В § 6 исследуется связь между инвариантами действия точечной алгебры Хопфа H и инвариантами группы $G(H)$ ее группоподобных элементов.

§ 2. Предварительные результаты

Приведем некоторые полезные свойства H-модульных алгебр из категории $\mathscr{A}$, которые получены в статье [1]. Пусть A — H-модульная алгебра из категории $\mathscr{A}$.

(1) Отображение $\pi_A|_{A^H} : A^H \to S_A$ инъективно. При этом A^H содержится в центре A.

(2) Если S_A конечно порождена как A^H-модуль и является конечно порожденной $\mathbf{k}$-алгеброй и алгебра Хопфа H конечномерна, то A конечно порождена как A^H-модуль и A^H — конечно порожденная $\mathbf{k}$-алгебра.

Заметим, что $\mathfrak{I}_A$ не содержит ненулевых H-подмодулей, так как любой H-подмодуль $U \subseteq \mathfrak{I}_A$ порождает идеал AUA алгебры A, устойчивый относительно действия H и содержащийся в $\mathfrak{I}_A$.

В [3, 6.4.2] определено двустороннее кольцо частных Мартиндейла $Q_{\mathscr{F}}(R)$ по отношению к произвольному фильтру идеалов $\mathscr{F}$ кольца R с условием, что $\mathrm{l.ann}(I) = \mathrm{r.ann}(I) = 0$ для всех $I \in \mathscr{F}$ и для любых $I, J \in \mathscr{F}$ существует $K \in \mathscr{F}$ такой, что $K \subseteq IJ$, где через $\mathrm{l.ann}(I)$, $\mathrm{r.ann}(I)$ обозначены левый и правый аннуляторы идеала I. Это кольцо строится как прямой предел

$$Q_{\mathscr{F}}(R) = \varinjlim_{I \in \mathscr{F}} \{(f, g) \mid f \in \mathrm{Hom}_R({}_R I, R),\ g \in \mathrm{Hom}_R(I_R, R)\ (af)b{=}a(gb)\ \forall a, b \in I\},$$

где $af = f(a)$ и $gb = g(b)$. Сумма и произведение двух его элементов $q_i = (f_i, g_i)$, где $f_i \in \mathrm{Hom}_R({}_R I_i, R)$, $g_i \in \mathrm{Hom}_R({I_i}_R, R)$, $i \in \overline{1,2}$, задаются по формулам $q_1 + q_2 = (f_1 + f_2, g_1 + g_2)$ и $q_1 q_2 = (f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2)$, где правые и левые отображения определены на некотором $K \in \mathscr{F}$ таком, что $K \subseteq I_1 \cap I_2$ для суммы и $K \subseteq I_2 I_1$ для произведения.

Кольцо R вкладывается в $Q_{\mathscr{F}}(R)$ с помощью отображения $a \mapsto (r_a, l_a)$, где r_a, l_a — правое и левое умножения на a. Гомоморфизмы f и g в любой паре (f, g), задающей элемент $q \in Q_{\mathscr{F}}(R)$, сводятся к правому и левому умножению на q в кольце $Q_{\mathscr{F}}(R)$. Таким образом, $Iq \subseteq R$ и $qI \subseteq R$, где I — идеал из $\mathscr{F}$, на котором f и g определены. Заметим, что $\mathrm{l.ann}_{Q_{\mathscr{F}}(R)}(J) = 0$ и $\mathrm{r.ann}_{Q_{\mathscr{F}}(R)}(J) = 0$ для любого идеала $J \in \mathscr{F}$. Также заметим, что если R коммутативно, то и $Q_{\mathscr{F}}(R)$ коммутативно, причем

$$Q_{\mathscr{F}}(R) \cong \varinjlim_{I \in \mathscr{F}} \mathrm{Hom}_R(I, R),$$

так как в этом случае $f = g$ для любой пары (f, g), задающей элемент из $Q_{\mathscr{F}}(R)$. Известно, что если R — коммутативная область целостности, $\mathscr{F}$ — множество всех ненулевых идеалов в R, то $Q_{\mathscr{F}}(R)$ отождествляется с полем частных $Q(R)$ кольца R.

Предположим, что R — некоторая H-модульная алгебра. Если H имеет биективный антипод и фильтр $\mathscr{F}$ состоит из H-инвариантных идеалов, то на $Q(R)$ задается действие алгебры Хопфа H [3, 6.4.3]. Пусть $q = (f, g)$, где $f \in \mathrm{Hom}_R({}_R I, R)$, $g \in \mathrm{Hom}_R(I_R, R)$, $I \in \mathscr{F}$. Тогда $h \cdot q = (h \cdot f, h \cdot g)$, где $h \cdot f \in \mathrm{Hom}_R({}_R I, R)$, $h \cdot g \in \mathrm{Hom}_R(I_R, R)$ определяются по правилам

$$a(h \cdot f) = \sum_{(h)} h_{(2)} \cdot [(S^{-1}(h_{(1)}) \cdot a)f], \quad (h \cdot g)a = \sum_{(h)} h_{(1)} \cdot [g(S(h_{(2)}) \cdot a)].$$

Предположим, что A — алгебра из категории $\mathscr{A}$, для которой фактор-алгебра S_A является областью целостности. Рассмотрим двустороннее H-эквивариантное кольцо частных Мартиндейла $Q_H(A)$, построенное по фильтру $\mathscr{F} = \{J \mid J$ — ненулевой H-инвариантный идеал в $A\}$. Если J — H-инвариантный идеал в A, то $\mathrm{r.ann}(J)$ и $\mathrm{l.ann}(J)$ также H-инвариантные идеалы в A. Так как $\pi_A(J) \neq 0$ для любого $J \in \mathscr{F}$, из целостности S_A следует, что $\mathrm{l.ann}(J) =$

$\mathrm{r.ann}(J) = 0$. Для краткости будем называть $Q_H(A)$ *кольцом Мартиндейла* для алгебры A. Отождествим алгебру A с подалгеброй в $Q_H(A)$.

В § 2–4 алгебра A фиксирована и используются краткие обозначения $Q = Q_H(A)$, $\overline{Q} = Q(S_A)$.

Предложение 2.1. *Пусть H — алгебра Хопфа с биективным антиподом. Тогда кольцо Мартиндейла Q принадлежит категории $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть $q \in Q$. Найдется ненулевой H-инвариантный идеал J в A такой, что $qJ \subset A$ и $Jq \subset A$. Так как

$$\pi_A(J)\pi_A(q(J \cap \mathfrak{I}_A)) = \pi_A(J(q(J \cap \mathfrak{I}_A))) = \pi_A((Jq)(J \cap \mathfrak{I}_A)) = 0,$$

$\pi_A(J) \neq 0$ и S_A — область целостности, то $\pi_A(q(J \cap \mathfrak{I}_A)) = 0$. Следовательно, $q(J \cap \mathfrak{I}_A) \subset \mathfrak{I}_A$.

Обозначим через $\hat{q}$ морфизм S_A-модулей из $\pi_A(J)$ в S_A, определенный по правилу: $\hat{q}(\pi_A(a)) = \pi_A(qa)$ для $a \in J$ (корректность определения вытекает из приведенного выше включения). Пара $(\hat{q}, \hat{q})$ определяет элемент $\bar{q}$ кольца частных Мартиндейла $Q_{\mathscr{F}}(S_A)$, где $\mathscr{F}$ — фильтр всех ненулевых идеалов в S_A, которое изоморфно полю частных $\overline{Q}$ кольца S_A. Определим отображение $\pi : Q \to \overline{Q}$ по правилу $\pi(q) = \bar{q}$. Тогда $\pi|_A = \pi_A$. Покажем, что π — гомоморфизм $\mathbf{k}$-алгебр. Пусть $q_1, q_2 \in Q$ и J_1, J_2 — H-инвариантные идеалы в A такие, что $q_iJ_i \subset A$, $J_iq_i \subset A$ и $J_i \neq 0$. Тогда для любого $a \in J_2J_1$

$$\widehat{q_1q_2}(\pi_A(a)) = \pi_A(q_1(q_2a)) = \hat{q}_1(\pi_A(q_2a)) = \hat{q}_1\hat{q}_2(\pi_A(a)).$$

Значит, $\pi(q_1q_2) = \pi(q_1)\pi(q_2)$. Линейность π доказывается аналогично.

Покажем, что $\ker(\pi) = \{q \in Q \mid qJ \subset \mathfrak{I}_A,\ Jq \subset \mathfrak{I}_A$ для некоторого ненулевого H-инвариантного идеала $J \subseteq A\}$. Пусть $q \in Q$. Найдется ненулевой H-инвариантный идеал J в A такой, что $qJ \subset A$ и $Jq \subset A$. Тогда $\pi_A(Jq) = \pi_A(J)\pi(q) = \pi_A(qJ)$. Так как $\pi_A(J) \neq 0$, то $qJ \subseteq \mathfrak{I}_A$, $Jq \subseteq \mathfrak{I}_A$ тогда и только тогда, когда $\pi(q) = 0$.

Покажем, что $\ker(\pi)$ не содержит ненулевых H-подмодулей. Пусть V — H-модуль, содержащийся в $\ker(\pi)$, и $q \in V$. Тогда существует некоторый ненулевой H-инвариантный идеал J кольца A такой, что $qJ \subset \mathfrak{I}_A$ и $Jq \subset \mathfrak{I}_A$. Так как $(Hq)J \subset A$ и $Hq \subseteq \ker(\pi)$, то $(Hq)J$ — H-модуль, содержащийся в $\mathfrak{I}_A$. Следовательно, $(Hq)J = 0$. Из свойства $\mathrm{l.ann}_Q(J) = 0$ выводим, что $Hq = 0$. Значит, $V = 0$.

Таким образом, $Q/\ker(\pi)$ вкладывается в $\overline{Q}$, значит, $Q/\ker(\pi)$ является коммутативной областью целостности, и $\ker(\pi)$ не содержит ненулевых H-инвариантных идеалов. Другими словами, алгебра Q, рассматриваемая с идеалом $\mathfrak{I}_Q = \ker(\pi)$, принадлежит категории $\mathscr{A}$. □

Далее будем отождествлять $S_Q = Q/\mathfrak{I}_Q$ с $\mathrm{Im}(\pi) \subseteq \overline{Q}$.

Предложение 2.2. *Пусть H — алгебра Хопфа с биективным антиподом. Тогда алгебра инвариантов Q^H является полем, причем*

$$Q^H \cong \varinjlim_{J \in \mathscr{F}} \mathrm{Hom}_H(J, A) \cap \mathrm{Hom}_{A,A}(J, A),$$

где $\mathscr{F}$ состоит из всех ненулевых H-инвариантных идеалов в A и $\mathrm{Hom}_{A,A}(J, A)$ — множество гомоморфизмов A-бимодулей из J в A.

Ненулевые элементы Q^H представляются тройками (f, J, J'), где $J, J' \in \mathscr{F}$, а $f : J \to J'$ — изоморфизм H-модулей и A-бимодулей, и каждая такая тройка задает некоторый ненулевой элемент из Q^H.

Доказательство. Любой элемент $q \in Q$ представляется тройкой (f, g, J), где $J \in \mathscr{F}$ и f (соответственно g) : $J \to A$ — гомоморфизм левых (соответственно правых) A-модулей. Нужно показать, что $q \in Q^H$ тогда и только тогда, когда $f = g$ и g является также гомоморфизмом H-модулей.

Пусть $q \in Q^H$. Так как Q принадлежит категории $\mathscr{A}$, то q содержится в центре Q. Значит, $g(a) = qa = aq = f(a)$ для любого $a \in J$. Поскольку $g(ha) = q(ha) = h(qa) = hg(a)$ для всех $h \in H$ и $a \in J$, то g — морфизм H-модулей. Обратно, предположим, что $f = g$ и g является гомоморфизмом H-модулей. Тогда

$$(h \cdot g)(a) = \sum_{(h)} h_{(1)} \cdot [g(S(h_{(2)}) \cdot a)] = \sum_{(h)} g(h_{(1)} S(h_{(2)}) \cdot a) = \varepsilon(h) g(a).$$

Пусть $q \in Q^H$. Тогда $\ker(g)$ и $\operatorname{Im}(g)$ — H-инвариантные идеалы кольца A. Если $\ker(g) \neq 0$, то $q = 0$. Предположим, что $q \neq 0$. Тогда $\ker(g) = 0$, т. е. g — изоморфизм J на $J' = \operatorname{Im}(g)$ как H-модулей и A-бимодулей. Из конструкции кольца частных Мартиндейла следует, что любой изоморфизм некоторых H-инвариантных идеалов как H-модулей и A-бимодулей определяет некоторый элемент кольца частных Мартиндейла Q. Таким образом, обратное отображение к g определит обратный элемент для q в Q, причем $q^{-1} \in Q^H$. Итак, кольцо Q^H коммутативно с обратимыми ненулевыми элементами.

§ 3. Конечномерность кольца Мартиндейла над подалгеброй инвариантов

В этом и следующих параграфах будем считать, что алгебра Хопфа H конечномерна. По-прежнему $Q = Q_H(A)$, $\overline{Q} = Q(S_A)$. Определим отображение $\beta : \overline{Q} \otimes_{Q^H} Q \to \operatorname{Hom}(H, \overline{Q})$ по правилу

$$\beta(q \otimes a)(h) = q\pi_Q(ha),$$

где $q \in \overline{Q}$, $a \in Q$, $h \in H$. Заметим, что $\operatorname{Hom}(H, \overline{Q}) \cong \overline{Q} \otimes H^*$ является алгеброй Хопфа над полем $\overline{Q}$ и левым H-модулем относительно действия $(h \cdot f)(e) = f(eh)$. На $\overline{Q} \otimes_{Q^H} Q$ зададим структуру левого H-модуля по формуле $h(\sum q_i \otimes b_i) = \sum q_i \otimes hb_i$.

Теорема 3.1. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — алгебра из категории $\mathscr{A}$ такая, что S_A является областью целостности. Тогда*

(1) $\dim_{Q^H} Q \leq \dim H$,

(2) $Q = Q^H A$,

(3) $S_Q = \overline{Q}$,

(4) *отображение β является вложением H-модульной алгебры $\overline{Q} \otimes_{Q^H} Q$ в алгебру Хопфа $\operatorname{Hom}(H, \overline{Q})$,*

(5) *алгебра Q является фробениусовым кольцом и не содержит нетривиальных H-инвариантных идеалов,*

(6) *для любого идеала J в A выполняется равенство $QJ = JQ$.*

Доказательство. Заметим, что $1 \otimes Q$ является H-модульной подалгеброй в алгебре $\overline{Q} \otimes_{Q^H} Q$ и порождает ее как векторное пространство над $\overline{Q}$, причем элементы из $\overline{Q}\otimes 1$ инвариантны относительно действия H. Покажем, что β является гомоморфизмом H-модульных $\overline{Q}$-алгебр. Пусть $a,b\in Q$ и $t,h\in H$. Тогда

$$\beta((1\otimes b)(1\otimes a))(t)=\beta(1\otimes ba)(t)=\pi_Q(t(ba))=\sum\pi_Q(t_{(1)}b)\pi_Q(t_{(2)}a)$$
$$=\sum\beta(1\otimes b)(t_{(1)})\beta(1\otimes a)(t_{(2)})=\{\beta(1\otimes b)\beta(1\otimes a)\}(t),$$
$$\beta(h(1\otimes b))(t)=\beta(1\otimes hb)(t)=\pi_Q(thb)=\beta(1\otimes b)(th)=(h\beta(1\otimes b))(t).$$

Стало быть, $\mathrm{Im}(\beta)$ является правой коидеальной подалгеброй в алгебре Хопфа $\overline{Q}\otimes H^*$.

Обозначим $A'=Q^HA$ и $\beta'=\beta|_{\overline{Q}\otimes_{Q^H}A'}$. Тогда A' принадлежит категории $\mathscr{A}$, в качестве $\mathfrak{I}_{A'}$ берем $\mathfrak{I}_Q\cap A'$. Покажем, что $\ker(\beta')=0$.

Предположим, что $\ker(\beta')\neq 0$. Выберем элемент $\sum\limits_{i=1}^{p}q_i\otimes a_i\neq 0$ из $\ker(\beta')$, в котором число слагаемых p минимально, $q_i\in\overline{Q}$, $a_i\in A$. Рассмотрим $\mathbf{k}$-модуль

$$V=\left\{\sum_{i=1}^{p}q_i\otimes b_i\in\ker(\beta')\mid b_i\in A\right\}\subseteq\overline{Q}\otimes_{Q^H}A'.$$

В силу выбора элементов $q_1,\dots,q_p$ имеем $V\neq 0$. Так как β является гомоморфизмом H-модульных алгебр, всякий раз, когда $\sum\limits_{i=1}^{p}q_i\otimes b_i\in V$, элементы $\sum\limits_{i=1}^{p}q_i\otimes ab_i$, $\sum\limits_{i=1}^{p}q_i\otimes b_ia$ и $\sum\limits_{i=1}^{p}q_i\otimes hb_i$ также лежат в V для любых $a\in A$ и $h\in H$.

Обозначим через J_k множество всех $b\in A$, для которых выполняется включение

$$q_k\otimes b+\sum_{i\neq k}q_i\otimes b_i\in V$$

при подходящем выборе элементов $b_i\in A$, $i\neq k$. Тогда $J_1,\dots,J_p$ являются H-инвариантными идеалами кольца A. Покажем, что для любого $b\in J_k$ указанные выше элементы b_i определены единственным образом. Пусть $c_i\in A$ такие, что $q_k\otimes b+\sum\limits_{i\neq k}q_i\otimes c_i\in V$, тогда $\sum\limits_{i\neq k}q_i\otimes(b_i-c_i)\in V$, а так как число слагаемых выбиралось минимальным образом, то $b_i=c_i$ для всех $i\neq k$. Ясно, что $b_i\in J_i$ для всех $i\neq k$. Соответствие $b\mapsto b_i$ задает отображение $J_k\to J_i$, являющееся гомоморфизмом H-модулей и A-бимодулей. Меняя роли индексов k и i, получим обратное отображение $J_i\to J_k$. Значит, идеалы $J_1,\dots,J_p$ попарно изоморфны как H-модули и A-бимодули. В силу предложения 2.2 существуют такие $r_i\in Q^H$ и H-инвариантный идеал J алгебры A (например, $J=J_1$), что $V=\sum q_i\otimes r_iJ=s\otimes J$, где $s=\sum q_i\pi_Q(r_i)$ (в частности, $p=1$). Равенство $\beta(V)=0$ расписывается в виде

$$\beta(s\otimes J)(H)=s\pi_{A'}(HJ)=s\pi_{A'}(J)=0.$$

Отсюда $s=0$ или $J=0$, в любом случае $V=0$, что противоречит первоначальному предположению. Тем самым равенство $\ker(\beta')=0$ проверено.

Из инъективности β' выводим

$$\dim_{Q^H}A'=\dim_{\overline{Q}}(\overline{Q}\otimes_{Q^H}A')\leq\dim_{\overline{Q}}\mathrm{Hom}(H,\overline{Q})=\dim H.$$

Заметим, что $\overline{Q}\otimes_{Q^H}A'$ является левым H-подмодулем и $\overline{Q}$-подалгеброй в $\overline{Q}\otimes_{Q^H}Q$. Поэтому $\beta(\overline{Q}\otimes_{Q^H}A')$ является правой коидеальной подалгеброй в алгебре Хопфа $\overline{Q} \otimes H^*$. Следовательно, в силу [9, теорема 6.1(i)] эта подалгебра и изоморфная ей H-модульная $\overline{Q}$-алгебра $\overline{Q} \otimes_{Q^H} A'$ фробениусовы и не содержат нетривиальных H-инвариантных идеалов. Значит, и A' не содержит нетривиальных H-инвариантных идеалов.

Покажем, что A' фробениусова. Так как $\overline{Q} \otimes_{Q^H} A'$ фробениусова, то

$$\overline{Q} \otimes_{Q^H} A' \cong \mathrm{Hom}_{\overline{Q}}(\overline{Q} \otimes_{Q^H} A', \overline{Q}) \cong \overline{Q} \otimes_{Q^H} \mathrm{Hom}_{Q^H}(A', Q^H)$$

как правые $\overline{Q} \otimes_{Q^H} A'$-модули. Следовательно, $A' \cong \mathrm{Hom}_{Q^H}(A', Q^H)$ как правые A'-модули в силу [10, 29.11]. Значит, A' фробениусова.

Пусть $q \in Q$, и пусть J — ненулевой H-инвариантный идеал в A такой, что $qJ \subset A$ и $Jq \subset A$. Тогда $J' = Q^H J$ — ненулевой H-инвариантный идеал в A', значит, $J' = A'$. Найдутся такие $q_i \in Q^H$ и $a_i \in J$, что $\sum q_i a_i = 1$. Тогда $q = q(\sum q_i a_i) = \sum q_i(q a_i) \in Q^H A = A'$. Это доказывает равенство $Q = A' = Q^H A$, а вместе с ним и утверждения 1, 4, 5.

Так как Q имеет конечную размерность над полем Q^H, то S_Q — конечномерная над полем Q^H область целостности. Следовательно, S_Q — простое коммутативное кольцо, т. е. поле. Поскольку $S_A \subset S_Q \subset \overline{Q}$, то $S_Q = \overline{Q}$.

Пусть J — произвольный идеал в A. Тогда $QJ = Q^H AJ = Q^H J = JQ^H = JQ$ в силу того, что Q^H содержится в центре Q. $\square$

Предложение 3.2. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, и пусть A', Q' — H-модульные алгебры из категории $\mathscr{A}$ такие, что $S_{A'}, S_{Q'}$ являются областями целостности и A' является подалгеброй в Q', причем $\mathfrak{I}_{A'} = A' \cap \mathfrak{I}_{Q'}$. Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *Q' не содержит нетривиальных H-инвариантных идеалов,*

(2) *для любого $q \in Q'$ существует ненулевой H-инвариантный идеал J в A' такой, что $qJ \subset A'$ и $Jq \subset A'$,*

(3) *$Q' = A' \cdot Z(Q')$, где $Z(Q')$ — центр алгебры Q'.*

Тогда $Q_H(A') \cong Q'$ в категории $\mathscr{A}$.

Доказательство. Пусть $q \in Q'$, и пусть J — ненулевой H-инвариантный идеал в A' такой, что $qJ \subset A'$ и $Jq \subset A'$. Обозначим через $\hat{q}$ и $\tilde{q}$ морфизмы A'-модулей из J в A', определенные по правилам: $\hat{q}(a) = qa$ и $\tilde{q}(a) = aq$ для $a \in J$. Морфизмы $\hat{q}$, $\tilde{q}$ определяют элемент $\bar{q}$ кольца Мартиндейла $Q_H(A')$. Определим отображение $\phi : Q' \to Q_H(A')$ по правилу $\phi(q) = \bar{q}$. Покажем, что ϕ — гомоморфизм H-модульных алгебр. Пусть $q_1, q_2 \in Q'$ и J_1, J_2 — H-инвариантные идеалы в A' такие, что $q_i J_i \subset A'$ и $J_i q_i \subset A'$. Тогда для любого $a \in J_2 J_1$

$$\widehat{q_1 q_2}(a) = q_1 q_2 a = \hat{q}_1(q_2 a) = \hat{q}_1 \hat{q}_2(a),$$

аналогично $\widetilde{q_1 q_2}(a) = \tilde{q}_2 \tilde{q}_1(a)$. Значит, $\phi(q_1 q_2) = \phi(q_1)\phi(q_2)$. Пусть $h \in H$, тогда

$$(h\hat{q})(a) = \sum h_{(1)}(\hat{q}[S(h_{(2)})(a)]) = \sum h_{(1)}(q(S(h_{(2)})a)) = (hq)a = \widehat{hq}(a)$$

для всех $a \in J$, т. е. $h\hat{q} = \widehat{hq}$. Аналогично $h\tilde{q} = \widetilde{hq}$, что доказывает равенство $h\phi(q) = \phi(hq)$. Линейность ϕ очевидна.

Покажем, что ϕ инъективен. Так как $\phi(a) = a$ для любого $a \in A'$, то $\phi \neq 0$. Поскольку $\ker(\phi)$ — H-инвариантный идеал в Q', то $\ker(\phi) = 0$ в силу условия (1). Проверим сюръективность ϕ. Пусть $q \in Q_H(A')$, тогда существует ненулевой H-инвариантный идеал в A' такой, что $qJ \subset A'$ и $Jq \subset A'$, поэтому

$$JQ' = JA'Z(Q') = JZ(Q') = Z(Q')J = Q'J.$$

Таким образом, JQ' является ненулевым H-инвариантным идеалом в Q'. Значит, $JQ' = Q'$, а это влечет

$$q \in q\phi(JQ') = q\phi(J)\phi(Q') = qJ\phi(Q') \subseteq A'\phi(Q') = \phi(A'Q') = \phi(Q').$$

Итак, ϕ — изоморфизм H-модульных алгебр. Пусть $q \in \mathfrak{I}_{Q'}$. Выбирая ненулевой H-инвариантный идеал J в A' такой, что $qJ \subseteq A'$, имеем $qJ \subseteq A' \cap \mathfrak{I}_{Q'} = \mathfrak{I}_{A'}$, откуда

$$q \in q(JQ') = (qJ)Q' \subseteq \mathfrak{I}_{A'}Q'.$$

Значит, $\mathfrak{I}_{Q'} \subseteq \mathfrak{I}_{A'}Q' \subseteq \mathfrak{I}_{Q'}Q' = \mathfrak{I}_{Q'}$, т. е. $\mathfrak{I}_{Q'} = \mathfrak{I}_{A'}Q'$. Аналогично проверяется равенство $\mathfrak{I}_{Q_H(A')} = \mathfrak{I}_{A'}Q_H(A')$. Следовательно, $\phi(\mathfrak{I}_{Q'}) = \mathfrak{I}_{Q_H(A')}$. $\square$

Замечание. Так как $A' \subseteq Q_H(A')$ и $A' \subseteq Q'$, можно считать, что $\pi_{Q'}(A') = \pi_{Q_H(A')}(A') = S_{A'}$ и $\pi_{Q'}|_{A'} = \pi_{Q_H(A')}|_{A'}$.

Предложение 3.3. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, и пусть A — H-модульная алгебра из категории $\mathscr{A}$ такая, что S_A является областью целостности. Если T — произвольная подалгебра в $Q_H(A)^H$, то $Q_H(T \cdot A) \cong Q_H(A)$ в категории $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Применим предложение 3.2, взяв $T \cdot A$ в качестве A' и $Q_H(A)$ в качестве Q'. Нужно проверить условие (2) предложения 3.2, так как условия (1) и (3) следуют из теоремы 3.1.

Пусть $q \in Q_H(A)$, и пусть J — ненулевой H-инвариантный идеал в A такой, что $qJ \subset A$ и $Jq \subset A$. Тогда $T \cdot J$ — ненулевой H-инвариантный идеал в $T \cdot A$ и $q(T \cdot J) = T(qJ) \subseteq T \cdot A$, а также $(T \cdot J)q = T(Jq) \subseteq T \cdot A$. $\square$

§ 4. Классическое кольцо частных

Предложение 4.1. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, и пусть A — H-модульная алгебра из категории $\mathscr{A}$ такая, что S_A является областью целостности. Тогда A — правое и левое кольцо Голди.*

Доказательство. Покажем, что $\mathrm{r.ann}_A(X) \subseteq \mathrm{r.ann}_A(Y)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{r.ann}_Q(X) \subseteq \mathrm{r.ann}_Q(Y)$ для любых подмножеств $X, Y \subseteq A$. Предположим, что $\mathrm{r.ann}_A(X) \subseteq \mathrm{r.ann}_A(Y)$ и $q \in \mathrm{r.ann}_Q(X)$. Существует ненулевой H-инвариантный идеал $J \subseteq A$ такой, что $qJ \subseteq A$. Тогда $qJ \subseteq \mathrm{r.ann}_A(X)$, что влечет $(Yq)J = Y(qJ) = 0$. Поскольку $\mathrm{l.ann}_Q(J) = 0$, имеем $Yq = 0$, т. е. $q \in \mathrm{r.ann}_Q(Y)$. Обратная импликация тривиальна.

Так как Q — конечномерная алгебра над полем, Q — правое и левое кольцо Голди. Таким образом, условие обрыва возрастающих цепей правых аннуляторов для A вытекает из аналогичного условия для Q.

Пусть $\bigoplus\limits_{i \in N} V_i \subseteq A$, где V_i — правые идеалы в A. Покажем, что сумма $\sum\limits_{i \in N} V_iQ$ прямая. Пусть $\sum v_i = 0$, где $v_i \in V_iQ$. Существует ненулевой H-инвариантный идеал $J \subseteq A$ такой, что $v_iJ \subseteq V_i$ для всех $i \in N$. Так как сумма $\sum\limits_{i \in N} V_i$ прямая, то $v_iJ = 0$. Значит, $v_i = 0$ для всех $i \in N$.

Поскольку $\mathrm{u.dim}_Q Q < \infty$, то $\mathrm{u.dim}_A A < \infty$, где через u.dim обозначается *размерность Голди* (*однородная размерность*) [11, 4.19]. $\square$

Обозначим через $\mathscr{E}_H$ множество всех правых идеалов I в A таких, что для любого $h \in H$ выполняется включение $hJ \subseteq I$ при подходящем выборе существенного правого идеала J в A. Для произвольного правого идеала I в A и подкоалгебры $C \subseteq H$ положим

$$I_C = \{x \in A \mid Cx \subseteq I\}.$$

Заметим, что I_C — правый идеал в A.

Предложение 4.2. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, и пусть A — H-модульная алгебра из категории $\mathscr{A}$ такая, что S_A является областью целостности. Тогда*

(1) *правый идеал I в A принадлежит $\mathscr{E}_H$ тогда и только тогда, когда I_H — существенный правый идеал в A,*

(2) *любой ненулевой H-инвариантный идеал J в A принадлежит $\mathscr{E}_H$,*

(3) $\mathrm{l.ann}_Q(I) = 0$ *для любого* $I \in \mathscr{E}_H$,

(4) $uA + \mathrm{r.ann}_A(u) \in \mathscr{E}_H$ *для любого* $u \in A$ *такого, что* $\mathrm{r.ann}_A(u) = \mathrm{r.ann}_A(u^2)$,

(5) *каждый правый идеал кольца Q порождается своим пересечением с A,*

(6) *для первичного радикала $\mathscr{N}$ алгебры A выполнено равенство* $\mathrm{l.ann}_Q(\mathscr{N}) = \mathrm{r.ann}_Q(\mathscr{N})$.

Доказательство. В лемме [12, 5.1] доказано, что $I \in \mathscr{E}_H$ тогда и только тогда, когда I_C — существенный правый идеал в A для любой конечномерной подкоалгебры $C \subseteq H$. Так как H конечномерна, достаточно выполнения этого условия для $C = H$.

Пусть J — ненулевой H-инвариантный идеал в A. Поскольку $J_H = J$, достаточно показать, что J является существенным правым идеалом в A. Действительно, если $J \cap P = 0$ для некоторого правого идеала P в A, то $P \subseteq \mathrm{l.ann}_A(J)$, откуда $P = 0$.

Пусть $I \in \mathscr{E}_H$. Так как I_H — ненулевой H-подмодуль в Q, то $\pi(I_H) \neq 0$. Из целостности фактор-кольца $Q/\mathfrak{I}_Q$ выводим $\mathrm{l.ann}_Q(I_H) \subseteq \mathfrak{I}_Q$. Поскольку $\mathrm{l.ann}_Q(I_H)$ является H-подмодулем, это влечет $\mathrm{l.ann}_Q(I_H) = 0$. Так как $I_H \subseteq I$, то и $\mathrm{l.ann}_Q(I) = 0$.

В силу того, что $\mathrm{u.dim}_A A < \infty$, п. (4) вытекает из леммы [12, 5.5].

Пусть I — произвольный правый идеал кольца Q и $q \in I$. Существует ненулевой H-инвариантный идеал $J \subseteq A$ такой, что $qJ \subseteq I \cap A$. Так как $JQ = JAQ^H = Q^H J = QJ$, то JQ — H-инвариантный идеал кольца Q. Значит, $JQ = Q$. Тогда $q \in qQ = (qJ)Q \subseteq (I \cap A)Q$. Таким образом, $I \subseteq (I \cap A)Q$. Обратное включение очевидно.

Доказательство п. (6) напрямую повторяет доказательство леммы [12, 7.4] с использованием свойств (1), (5), (6), теоремы 3.1, предложения 4.1 и п. (5) из предложения 4.2 вместо аналогичных свойств из статьи [12]. □

Предложение 4.3. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, и пусть A — H-модульная алгебра из категории $\mathscr{A}$ такая, что S_A является областью целостности. Тогда каждый правый идеал $I \in \mathscr{E}_H$ содержит регулярный элемент. В частности, это верно для любого ненулевого H-инвариантного идеала в A.*

Напрямую повторяется доказательство леммы [12, 7.5] с использованием свойства (1) теоремы 3.1, предложения 4.1 и свойств (3), (4), (6) из предложения 4.2 вместо аналогичных свойств из статьи [12].

Теорема 4.4. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, и пусть A — H-модульная алгебра из категории $\mathscr{A}$ такая, что S_A является областью целостности. Тогда Q является классическим левым и правым кольцом частных для A.*

Доказательство. Пусть $x \in A$ — регулярный элемент в A. Покажем, что $\mathrm{r.ann}_Q(x) = 0$. Предположим, что $xq = 0$ для некоторого $q \in Q$. Выбирая ненулевой H-инвариантный идеал J в A такой, что $qJ \subseteq A$, получаем $x(qJ)$

$= 0$. Так как x регулярен в A, то $qJ = 0$. Отсюда $q = 0$. Поскольку Q — конечномерная алгебра над полем, x обратим в Q.

Пусть $q \in Q$. Тогда существует ненулевой H-инвариантный идеал J в A такой, что $qJ \subseteq A$ и $Jq \subseteq A$. По предложению 4.3 в J содержится регулярный в A элемент x. Значит, $qx = a \in A$, и так как x обратим в Q, то $q = ax^{-1}$. Аналогично $q = x^{-1}b$ для некоторого $b \in A$. $\square$

§ 5. Расширения с инвариантными характеристическими многочленами

Пусть U, U' — коммутативные кольца и $\phi : U \to U'$ — гомоморфизм колец. Обозначим через $\phi^x : U[x] \to U'[x]$ продолжение ϕ на кольцо многочленов от переменной x такое, что $x \mapsto x$.

Пусть R — ассоциативная алгебра над коммутативным кольцом U, причем R является свободным U-модулем конечного ранга. Пусть $a \in R$. Тогда для эндоморфизма $l_a \in \mathrm{End}_U(R)$, определенного по правилу: $l_a(b) = ab$ для $b \in R$, существует характеристический многочлен $x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1x + q_0$ с коэффициентами $q_i \in U$; обозначим этот многочлен через $P_{R/U}(a, x)$.

Перечислим основные свойства характеристических многочленов:

(1) $P_{R/U}(a, a) = 0$;

(2) $P_{R'/U}(\phi(a), x) = P_{R/U}(a, x)$, где $\phi : R \to R'$ — изоморфизм U-алгебр;

(3) если $V \subset R$ — U-подалгебра такая, что V является свободным U-модулем конечного ранга и R является свободным левым V-модулем ранга r, то $P_{R/U}(a, x) = P_{V/U}(a, x)^r$ для $a \in V$;

(4) $P_{K\otimes_U R/K}(1 \otimes a, x) = \phi^x(P_{R/U}(a, x))$, где $\phi : U \to K$ — гомоморфизм коммутативных колец;

(5) если U — поле, $\dim_U R = n$, $f \in U \cdot 1_R$ и $r \in R$ — нильпотентный элемент в R, то $P_{R/U}(f + r, x) = P_{R/U}(f, x) = (x - f)^n$;

(6) если K — подкольцо в U, $\{e_1, \dots, e_m\}$ — базис R как U-модуля и элемент $a \in R$ такой, что $ae_i \in \sum Ke_i$, то коэффициенты многочлена $P_{R/U}(a, x)$ принадлежат K.

Пусть A — H-модульная алгебра из категории $\mathscr{A}$. Определим отображение $\rho : A \to \mathrm{Hom}(H, S_A)$ по правилу $\rho(a)(h) = \pi_A(h \cdot a)$, где $a \in A$, $h \in H$. Заметим, что ρ является гомоморфизмом H-модульных алгебр и в случае, когда S_A целостна, $\rho(a) = \beta(1 \otimes a)$ для любого $a \in A$. Покажем, что $\ker(\rho) = 0$. Пусть $a \in \ker(\rho)$, тогда $\pi_A(ha) = \rho(a)(h) = 0$ для любого $h \in H$. Значит, Ha является H-модулем, содержащимся в $\mathfrak{I}_A$. Следовательно, $Ha = 0$. Обозначим $P_A(a, x) = P_{\mathrm{Hom}(H,S_A)/S_A}(\rho(a), x)$.

Определение 2. Будем говорить, что *алгебра A обладает инвариантными характеристическими многочленами*, если для любого $a \in A$ все коэффициенты многочлена $P_A(a, x)$ лежат в подалгебре $\pi_A(A^H)$.

Предложение 5.1. *Если H — конечномерная алгебра Хопфа, $\phi : A \to B$ — морфизм в категории $\mathscr{A}$ и $\overline{\phi} : S_A \to S_B$ — индуцированный ϕ гомоморфизм колец, то $P_B(\phi(a), x) = \overline{\phi}^x P_A(a, x)$ для всех $a \in A$.*

Доказательство. Обозначим $f = \rho(a) \in \mathrm{Hom}(H, S_A)$ и $g = \rho(\phi(a)) \in \mathrm{Hom}(H, S_B)$. Заметим, что

$$g(h) = \rho(\phi(a))(h) = \pi_B(h\phi(a)) = \pi_B(\phi(ha)) = \overline{\phi}(\pi_A(ha)) = \overline{\phi}(\rho(a)(h)) = \overline{\phi}(f(h))$$

для всех $h \in H$. Заметим, что $\mathrm{Hom}(H, S_A) \cong S_A \otimes H^*$ и $\mathrm{Hom}(H, S_B) \cong S_B \otimes H^*$ как алгебры. Пусть относительно этих изоморфизмов f и g соответствуют f' и g' соответственно. Тогда $g' = (\overline{\phi} \otimes 1)f'$. Значит,

$$P_B(\phi(a), x) = P_{S_B \otimes H^*/S_B}(g', x) = P_{S_B \otimes_{S_A}(S_A \otimes H^*)/S_B}(1 \otimes f', x) \\ = \overline{\phi}^x P_{S_A \otimes H^*/S_A}(f', x) = \overline{\phi}^x P_A(a, x)$$

в силу свойства (4) характеристических многочленов. $\square$

Если алгебра S_A целостна, то по предложению 5.1 $P_A(a, x) = P_{Q_H(A)}(a, x)$ для любого $a \in A$, в качестве ϕ берем вложение A в $Q_H(A)$. Определим $P_A(q, x)$ для любого $q \in Q_H(A)$, полагая

$$P_A(q, x) = P_{Q_H(A)}(q, x) = P_{\mathrm{Hom}(H, Q(S_A))/Q(S_A)}(\beta(1 \otimes q), x).$$

Предложение 5.2. *Если H — конечномерная алгебра Хопфа, а A принадлежит категории $\mathscr{A}$ и S_A является областью целостности, то для любого $q \in Q_H(A)$ все коэффициенты многочлена $P_A(q, x)$ лежат в $\pi_{Q_H(A)}(Q_H(A)^H)$ и $f(q) = 0$ для многочлена $f \in Q_H(A)^H[x]$ такого, что $\pi^x_{Q_H(A)}(f) = P_A(q, x)$.*

Доказательство. Обозначим $Q = Q_H(A)$, $\overline{Q} = Q(S_A)$, $\pi = \pi_Q$. Пусть $q \in Q$. Положим $g(x) = P_{Q/Q^H}(q, x)$. Заметим, что $g(q) = 0$. Обозначим через $g'(x)$ многочлен $\pi^x(g(x)) = P_{\overline{Q} \otimes_{Q^H} Q/\overline{Q}}(1 \otimes q, x) = P_{\mathrm{Im}(\beta)/\overline{Q}}(\beta(1 \otimes q), x)$. Так как $\mathrm{Im}(\beta)$ является право-коидеальной подалгеброй в алгебре Хопфа $\mathrm{Hom}(H, \overline{Q})$, то $\mathrm{Hom}(H, \overline{Q})$ — свободный левый $\mathrm{Im}(\beta)$-модуль [9, теорема 6.1(iv)]. Пусть k — ранг $\mathrm{Im}(\beta)$-модуля $\mathrm{Hom}(H, \overline{Q})$, тогда $P_A(q, x) = (g'(x))^k = \pi^x(g(x)^k)$ в силу свойства (3) характеристических многочленов. Но коэффициенты многочлена $\pi^x(g(x)^k)$ будут образами инвариантных элементов из Q^H. Значит, коэффициенты многочлена $P_A(q, x)$ лежат в $\pi(Q^H)$ и $f(q) = g(q)^k = 0$. $\square$

Будем говорить, что H-модульная алгебра A из категории $\mathscr{A}$ является *целым расширением подалгебры инвариантов* A^H, если для любого $a \in A$ существует многочлен $f(x) = x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \dots + q_1 x + q_0$ с коэффициентами из A^H такой, что $f(a) = 0$.

Предложение 5.3. *Если H — конечномерная алгебра Хопфа, а A принадлежит категории $\mathscr{A}$ и S_A является областью целостности, то существует подалгебра $T_A \subset Q_H(A)^H$ такая, что H-модульная алгебра $\widetilde{A} = T_A \cdot A \subset Q_H(A)$ принадлежит категории $\mathscr{A}$, причем $S_{\widetilde{A}} \cong S_A$, алгебра $\widetilde{A}$ обладает инвариантными характеристическими многочленами и является целым расширением подалгебры инвариантов $\widetilde{A}^H$.*

Пусть $\phi : A \to B$ — морфизм в категории $\mathscr{A}$. Если B обладает инвариантными характеристическими многочленами, то ϕ продолжается до морфизма $\widetilde{\phi} : \widetilde{A} \to B$ в категории $\mathscr{A}$.

Доказательство. Обозначим $Q = Q_H(A)$, $\pi = \pi_Q$. Пусть $T \subset Q^H$ — подалгебра такая, что $\pi(T) \subset S_A$. Обозначим $\widehat{A} = T \cdot A$, тогда $\pi(\widehat{A}) = S_A$. Пусть T' — подалгебра в Q^H, порожденная подалгеброй T и всеми элементами $r \in Q^H$ такими, что $\pi(r)$ является коэффициентом многочлена $P_A(a, x)$ для некоторого $a \in \widehat{A}$. Тогда для любого $a \in \widehat{A}$ коэффициенты многочлена $P_A(a, x)$ лежат в $\pi(T')$. Также по свойству (6) для характеристических многочленов $\pi(T') \subset S_A$ и алгебра $\widehat{A}$ цела над T'.

Пусть $T_0 = A^H$ и $T_{i+1} = T_i'$ для $i = 0, 1, \ldots$. Обозначим $T_A = \bigcup_i T_i$ и $\widetilde{A} = T_A \cdot A = \bigcup_i T_i \cdot A$. Тогда для любого $a \in \widetilde{A}$ коэффициенты многочлена $P_A(a, x)$ лежат в $\pi(T_A) \subseteq \pi(\widetilde{A}^H)$. Так как $P_A(a, x) = P_{\widetilde{A}}(a, x)$, для подалгебры T_A выполнены утверждения предложения.

Поскольку $\phi : A \to B$ — морфизм в категории $\mathscr{A}$, то ϕ продолжается до гомоморфизма алгебр $\overline{\phi} : S_A \to S_B$, причем коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi_B} \\ S_A & \xrightarrow{\overline{\phi}} & S_B \end{array} .$$

Обозначим $R_i = T_i A$. Тогда $R_0 = A$ и $\widetilde{A} = \bigcup_i R_i$. Начиная с $\phi_0 = \phi$, построим по индукции морфизмы $\phi_i : R_i \to B$ в категории $\mathscr{A}$ такие, что $\phi_j|_{R_i} = \phi_i$ для всех $i < j$, и определим $\widetilde{\phi} = \varinjlim \phi_i$.

Предположим, что $\phi_i : R_i \to B$ построено. Так как $\phi_i|_A = \phi$ и $S_{R_i} \cong S_A$, индуцированный ϕ_i гомоморфизм $S_{R_i} \to S_B$ совпадает с $\overline{\phi}$. Другими словами, коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} R_i & \xrightarrow{\phi_i} & B \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi_B} \\ S_A & \xrightarrow{\overline{\phi}} & S_B \end{array} .$$

Пусть $a \in R_i$ и

$$P_A(a, x) = x^n + \pi(r_{n-1}(a))x^{n-1} + \cdots + \pi(r_1(a))x + \pi(r_0(a)),$$

где $r_i(a) \in T_{i+1}$. Тогда по предложению 5.1

$$P_B(\phi_i(a), x) = x^n + \overline{\phi}(\pi(r_{n-1}(a)))x^{n-1} + \cdots + \overline{\phi}(\pi(r_1(a)))x + \overline{\phi}(\pi(r_0(a))).$$

Так как B обладает инвариантными характеристическими многочленами, то $\overline{\phi}(\pi(r_j(a))) \in \pi_B(B^H)$. Кроме того, $\overline{\phi}(\pi(T_i)) = \pi_B(\phi_i(T_i)) \subseteq \pi_B(B^H)$, поскольку $T_i \subseteq R_i^H$ и ϕ_i — гомоморфизм H-модульных алгебр. Так как T_{i+1} порождена подалгеброй T_i и элементами $\{r_j(a) \mid j \in \overline{0, n-1}, a \in R_i\}$, получаем $(\overline{\phi}\circ\pi)(T_{i+1}) \subseteq \pi_B(B^H)$. Поскольку $\overline{\phi}\circ\pi$ — гомоморфизм алгебр и $\pi_B(B^H) \cong B^H$, существует единственный гомоморфизм алгебр $f : T_{i+1} \to B^H$, для которого $\overline{\phi} \circ \pi|_{T_{i+1}} = \pi_B \circ f$.

Определим $\phi_{i+1} : R_{i+1} \to B$ по формуле $\phi_{i+1}(\sum b_j a_j) = \sum f(b_j)\phi_i(a_j)$, где $b_j \in T_{i+1}$, $a_j \in R_i$. Проверим корректность. Пусть $\sum b_j a_j = 0$. Тогда $\sum b_j(h \cdot a_j) = h \cdot \sum b_j a_j = 0$ для любого $h \in H$. Значит, для любого $h \in H$

$$\begin{aligned} \pi_B\Big(h \cdot \Big(\sum f(b_j)\phi_i(a_j)\Big)\Big) &= \pi_B\Big(\sum f(b_j)\phi_i(h \cdot a_j)\Big) \\ &= \sum \pi_B(f(b_j))\pi_B(\phi_i(h \cdot a_j)) = \overline{\phi} \circ \pi\Big(\sum b_j(h \cdot a_j)\Big) = 0. \end{aligned}$$

Так как $\mathfrak{I}_B = \ker(\pi_B)$ не содержит ненулевых H-подмодулей, это влечет $\sum f(b_j)\phi_i(a_j) = 0$. $\square$

В [1] для любого левого H-модуля V построена H-модульная алгебра $S_H(V)$ из категории $\mathscr{A}$ следующим образом. Действие H на V продолжается до действия H на тензорной алгебре $T(V)$ для V. Тем самым $T(V)$ становится H-модульной алгеброй. Обозначим через $I'(V)$ идеал алгебры $T(V)$, порожденный $\{v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V\}$. Определим

$$S_H(V) = T(V)/I(V),$$

где $I(V)$ — наибольший H-инвариантный идеал в $S_H(V)$, содержащийся в $I'(V)$. Тогда действие H на тензорной алгебре $T(V)$ продолжается до действия H на $S_H(V)$ и $S_H(V)$ становится H-модульной алгеброй из категории $\mathscr{A}$ с идеалом $\mathfrak{I}_{S_H(V)} = I'(V)/I(V)$. При этом $S_H(V)/\mathfrak{I}_{S_H(V)} \cong T(V)/I'(V) \cong S(V)$ — симметрическая алгебра для V. В случае, когда H кокоммутативна, $S_H(V) = S(V)$.

Если A — произвольная алгебра из категории $\mathscr{A}$, то любой гомоморфизм H-модулей $V \to A$ продолжается до морфизма $S_H(V) \to A$ в категории $\mathscr{A}$.

Определение 3. Обозначим через $\widetilde{\mathscr{A}}$ *полную подкатегорию* категории $\mathscr{A}$, объектами которой являются пары $(A, \mathfrak{I}_A)$ из категории $\mathscr{A}$, где A обладает инвариантными характеристическими многочленами.

Теперь обобщим построение $\widetilde{A}$ на алгебры A, для которых фактор-алгебра S_A не обязательно целостна.

Теорема 5.4. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A принадлежит категории $\mathscr{A}$. Тогда существует H-модульная алгебра $\widetilde{A}$ из категории $\widetilde{\mathscr{A}}$ со следующими свойствами:*

(1) *A вкладывается в $\widetilde{A}$, $S_{\widetilde{A}} \cong S_A$ и $\widetilde{A} = \widetilde{A}^H A$;*

(2) *если B —произвольная H-модульная алгебра из категории $\widetilde{\mathscr{A}}$, то для любого морфизма $f : A \to B$ в категории $\mathscr{A}$ существует единственный морфизм $\tilde{f} : \widetilde{A} \to B$ в категории $\widetilde{\mathscr{A}}$ такой, что $\tilde{f} \circ p = f$, где p — вложение A в $\widetilde{A}$.*

Доказательство. Сначала установим единственность $\tilde{f}$ в п. (2) в предположении, что существует H-модульная алгебра $\widetilde{A}$ из категории $\widetilde{\mathscr{A}}$, удовлетворяющая условиям из п. (1). Предположим, что вместе с $\tilde{f}$ существует другой морфизм $\tilde{q} : \widetilde{A} \to B$ категории $\mathscr{A}$, для которого $\tilde{q} \circ p = f$. Так как p индуцирует изоморфизм $S_A \to S_{\widetilde{A}}$, из равенства $\tilde{f} \circ p = \tilde{q} \circ p$ следует, что $\tilde{f}$ и $\tilde{q}$ индуцируют один и тот же гомоморфизм $S_A \to S_B$. Поэтому $\operatorname{Im}(\tilde{f} - \tilde{q}) \subseteq \ker \pi_B = \mathfrak{I}_B$. Этот образ является H-подмодулем в B ввиду H-линейности отображения $\tilde{f} - \tilde{q}$. Условие на идеал $\mathfrak{I}_B$ в определении 1 влечет $\tilde{f} = \tilde{q}$.

Существование $\widetilde{A}$ доказано в предыдущем предложении в случае, когда S_A целостна. В частности, заключение теоремы верно для H-модульных алгебр вида $S_H(V)$. Если A произвольна, то, выбирая в качестве V любой H-подмодуль в A, который порождает A как алгебру, получаем сюръективный морфизм $S_H(V) \to A$ в категории $\mathscr{A}$.

Остается показать, что всякий раз, когда $\phi : R \to A$ — сюръективный морфизм в категории $\mathscr{A}$ и для R существует H-модульная алгебра $\widetilde{R}$ из категории $\widetilde{\mathscr{A}}$ с требуемыми свойствами, для A также существует H-модульная алгебра $\widetilde{A}$ из категории $\widetilde{\mathscr{A}}$ с требуемыми свойствами. Обозначим $\pi = \pi_R$. Морфизм ϕ индуцирует гомоморфизм алгебр $\overline{\phi} : S_R \to S_A$, причем коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\phi} & A \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi_A} \\ S_R & \xrightarrow{\overline{\phi}} & S_A \end{array}.$$

Пусть $J = \ker \phi \subseteq R$ и $P = \ker \overline{\phi} \subseteq S_R$. Тогда $\pi(J) \subseteq P$. Покажем, что J — наибольший H-инвариантный идеал, содержащийся в $\pi^{-1}(P)$. Пусть $J' \subseteq \pi^{-1}(P)$ — некоторый H-инвариантный идеал алгебры R. Тогда $0 = \overline{\phi}(\pi(J')) = \pi_A(\phi(J'))$, откуда $\phi(J') \subseteq \mathfrak{I}_A$. Поскольку $\phi(J')$ — H-инвариантный идеал алгебры A, это влечет $\phi(J') = 0$. Значит, $J' \subseteq J$.

Пусть $r : R \to \widetilde{R}$ — вложение R в $\widetilde{R}$. Обозначим $\tilde{\pi} = \pi_{\widetilde{R}}$. В силу сделанных предположений $S_{\widetilde{R}} \cong S_R$ и $\tilde{\pi} \circ r = \pi$. Пусть $\widetilde{J}$ — наибольший H-инвариантный идеал алгебры $\widetilde{R}$, содержащийся в $\tilde{\pi}^{-1}(P)$. Обозначим $\widetilde{A} = \widetilde{R}/\widetilde{J}$ и $\mathfrak{I}_{\widetilde{A}} = \tilde{\pi}^{-1}(P)/\widetilde{J}$. Тогда $\mathfrak{I}_{\widetilde{A}}$ не содержит ненулевых H-инвариантных идеалов алгебры $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}/\mathfrak{I}_{\widetilde{A}} \cong S_R/P \cong S_A$. Значит, $\widetilde{A}$ принадлежит категории $\mathscr{A}$. Так как $\widetilde{R}$ обладает инвариантными характеристическими многочленами, по предложению 5.1 этим же свойством обладает $\widetilde{A}$.

Обозначим через $q : \widetilde{R} \to \widetilde{R}/\widetilde{J}$ каноническую проекцию. Покажем, что $J = \ker q \circ r$. Поскольку $\tilde{\pi}(r(J)) = \pi(J) \subseteq P$, то H-модуль $r(J)$ содержится в $\tilde{\pi}^{-1}(P)$. Следовательно, $r(J) \subseteq \widetilde{J}$, значит, $J \subseteq \ker q \circ r$. Так как $r(\ker q \circ r) \subseteq \widetilde{J}$, то $\pi(\ker q \circ r) = \tilde{\pi}(r(\ker q \circ r)) \subseteq P$. Поэтому H-модуль $\ker q \circ r$ содержится в $\pi^{-1}(P)$. Следовательно, $\ker q \circ r \subseteq J$, значит, $J = \ker q \circ r$.

В итоге получаем $A \cong R/J \hookrightarrow \widetilde{A}$. Обозначим через p вложение A в $\widetilde{A}$. По построению $p \circ \phi = q \circ r$. Так как $q(\widetilde{R}^H) \subseteq \widetilde{A}^H$, то

$$\widetilde{A} = q(\widetilde{R}) = q(\widetilde{R}^H r(R)) = q(\widetilde{R}^H) q(r(R)) = q(\widetilde{R}^H) p(A) = \widetilde{A}^H p(A).$$

Пусть B — H-модульная алгебра из категории $\widetilde{\mathscr{A}}$ и $f : A \to B$ — морфизм в категории $\mathscr{A}$. В силу предположения об R для морфизма $g = f \circ \phi : R \to B$ существует морфизм $\tilde{g} : \widetilde{R} \to B$ в категории $\mathscr{A}$ такой, что $\tilde{g}|_R = g$. Тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{R} & \xrightarrow{\tilde{g}} & B \\ {\scriptstyle\tilde{\pi}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi_B} \\ S_R & \xrightarrow{\bar{f} \circ \overline{\phi}} & S_B, \end{array},$$

из которой находим $\pi_B(\tilde{g}(\widetilde{J})) = \bar{f} \circ \overline{\phi}(\tilde{\pi}(\widetilde{J})) \subseteq \bar{f} \circ \overline{\phi}(P) = 0$. Поскольку $\tilde{g}(\widetilde{J})$ — H-модуль, это влечет $\tilde{g}(\widetilde{J}) = 0$. Значит, $\tilde{g}$ индуцирует гомоморфизм H-модульных алгебр $\tilde{f} : \widetilde{R}/\widetilde{J} \to B$. Так как

$$\pi_B(\tilde{f}(\mathfrak{I}_{\widetilde{A}})) = \pi_B(\tilde{f}(\tilde{\pi}^{-1}(P)/\widetilde{J})) = \pi_B(\tilde{g}(\tilde{\pi}^{-1}(P))) = \bar{f} \circ \overline{\phi}(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}^{-1}(P))) = \bar{f} \circ \overline{\phi}(P) = 0,$$

то $\tilde{f}$ — морфизм в категории $\mathscr{A}$. Пусть $a \in A$ и $x \in R$ такой, что $\phi(x) = a$. Тогда $p(a) = q \circ r(x)$, значит,

$$\tilde{f}(p(a)) = \tilde{f}(q \circ r(x)) = \tilde{g}(r(x)) = g(x) = f \circ \phi(x) = f(a).$$

Таким образом, $\tilde{f} \circ p = f$. $\square$

Предложение 5.5. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A принадлежит категории $\mathscr{A}$. Если S_A цела над $\pi_A(A^H)$, то A цела над A^H.*

Доказательство. Предположим, что B — конечно порожденная H-модульная подалгебра в A и элементы $\{b_1, \dots, b_m\}$ порождают B как алгебру. Для любого $i \in \overline{1,m}$ найдется многочлен $f_i(x) \in A^H[x]$ такой, что $\pi_A^x(f_i)(\pi_A(b_i)) = 0$. Обозначим через R подалгебру в A^H, порожденную коэффициентами многочленов $f_i(x)$, где $i \in \overline{1,m}$. Пусть $B' = RB$. Тогда B' принадлежит категории $\mathscr{A}$ и является конечно порожденной H-модульной подалгеброй в A. Алгебра $\pi_A(B')$ порождена конечным набором элементов, целых над $\pi_A({B'}^H)$. Значит, $\pi_A(B')$ является конечно порожденным модулем над $\pi_A({B'}^H)$ (см. [13, 5.1, 5.2]). Тогда по [1, предложение 2.2] B' является конечно порожденным модулем над ${B'}^H$. Значит, B' цела над ${B'}^H \subseteq A^H$. Так как A является объединением конечно порожденных H-модульных подалгебр в A, то A цела над A^H. $\square$

§ 6. Связь между инвариантами алгебры Хопфа и инвариантами ее подалгебры Хопфа

Напомним, что *корадикалом* C_0 коалгебры C называется сумма (прямая) всех простых подкоалгебр в C. Известно, что ${C_0}^\perp = \{f \in C^* \mid f(C_0) = 0\} = \operatorname{rad}(C^*)$ [3, 5.2.9]. Алгебра Хопфа H называется *точечной*, если любая ее простая подкоалгебра одномерна. Корадикал точечной алгебры Хопфа является линейной оболочкой ее группоподобных элементов, и множество всех группоподобных элементов алгебры Хопфа H является группой, которую обозначим через $G(H)$.

Предложение 6.1. *Пусть H — алгебра Хопфа размерности n, а A принадлежит категории $\mathscr{A}_H$. Обозначим через H' подалгебру Хопфа в H, содержащую корадикал H, через P — наибольший H'-инвариантный идеал, содержащийся в $\mathfrak{I}_A$. Тогда H'-модульная алгебра $A' = A/P$ с идеалом $\mathfrak{I}_{A'} = \mathfrak{I}_A/P$ принадлежит категории $\mathscr{A}_{H'}$. Пусть $\phi : A \to A'$ — каноническая проекция, и предположим, что ϕ продолжается до гомоморфизма H'-модульных алгебр $\widetilde{\phi} : \widetilde{A} \to A'$ так, что $\pi' \circ \widetilde{\phi} = \tilde{\pi}$. Тогда*

(1) если $\operatorname{char} \mathbf{k} = 0$, то ${A'}^{H'} = \widetilde{\phi}(\widetilde{A}^H)$;

(2) если $\operatorname{char} \mathbf{k} = p > 0$, то $c^{p^s} \in \widetilde{\phi}(\widetilde{A}^H)$ для любого $c \in {A'}^{H'}$, где s такое, что $n = p^s m$ и m взаимно просто с p;

(3) если $\operatorname{char} \mathbf{k} = p > 0$, то A цела над A^H.

Здесь и далее в доказательстве обозначаем π_A через π, $\pi_{\widetilde{A}}$ — через $\tilde{\pi}$, $\pi_{A'}$ — через π' и S_A — через S.

Доказательство. Пусть $c \in {A'}^{H'}$ и $a \in A$ такой, что $\phi(a) = c$. Тогда $h \cdot a \in \varepsilon(h)a + P$ для любого $h \in H'$. Так как $P \subseteq \mathfrak{I}_A$, то $\pi(h \cdot a) = \varepsilon(h)\pi(a)$ для любого $h \in H'$. Значит, $\rho(a)(h) = \varepsilon(h)\pi(a)$ для любого $h \in H'$. Пусть $f \in \operatorname{Hom}(H, S_A)$ такой, что $f(h) = \varepsilon(h)\pi(a)$ для любого $h \in H$. Тогда отображение $r = \rho(a) - f$ обращается в нуль на корадикале алгебры Хопфа H. Значит, $r \in \operatorname{rad}(\operatorname{Hom}(H, S_A))$. Так как $fq = \pi(a)q$ для любого $q \in \operatorname{Hom}(H, S_A)$ и r нильпотентен, с помощью свойства (5) для характеристических многочленов получим

$$P_{\widetilde{A}}(a, x) = P_A(a, x) = P_{\operatorname{Hom}(H,S_A)/S_A}(\rho(a), x) = P_{\operatorname{Hom}(H,S_A)/S_A}(f + r, x)$$
$$= P_{\operatorname{Hom}(H,S_A)/S_A}(f, x) = (x - \pi(a))^n,$$

где $n = \dim H$. Ввиду того, что $\widetilde{A}$ принадлежит категории $\widetilde{\mathscr{A}}$, существуют H-инвариантные элементы $q_i \in \widetilde{A}$ такие, что $\tilde{\pi}(q_i)$ совпадает с коэффициентом при x^i многочлена $(x - \pi(a))^n$.

При $i = n - 1$ получаем

$$\pi'(nc) = n\pi(a) = -\tilde{\pi}(q_{n-1}) = -\pi'(\widetilde{\phi}(q_{n-1})).$$

Так как A' принадлежит категории $\mathscr{A}_{H'}$, отображение $\pi'|_{A'^{H'}}$ инъективно. Из включений $nc \in A'^{H'}$ и $\widetilde{\phi}(q_{n-1}) \in A'^{H'}$ выводим $nc = -\widetilde{\phi}(q_{n-1}) \in \widetilde{\phi}(\widetilde{A}^H)$. В случае $\operatorname{char}\mathbf{k} = 0$ получаем $A'^{H'} \subseteq \widetilde{\phi}(\widetilde{A}^H)$. Обратное включение верно в силу того, что $\widetilde{\phi}$ является гомоморфизмом H'-модульных алгебр.

Пусть $\operatorname{char}\mathbf{k} = p > 0$, тогда коэффициент многочлена $P_{\widetilde{A}}(a, x)$ при $x^{p^s(m-1)}$ равен

$$\pi'(mc^{p^s}) = m\pi(a)^{p^s} = -\tilde{\pi}(q_{p^s(m-1)}) = -\pi'(\widetilde{\phi}(q_{p^s(m-1)})).$$

Значит, $mc^{p^s} = \widetilde{\phi}(q_{p^s(m-1)}) \in \widetilde{\phi}(\widetilde{A}^H)$.

В силу того, что $\widetilde{\phi}$ является гомоморфизмом H-модульных алгебр и $\widetilde{A}$ цела над $\widetilde{A}^H$, A' цела над $A'^{H'}$. Обозначим $\widetilde{P} = \ker\widetilde{\phi}$. Тогда $\widetilde{P}$ — H'-инвариантный идеал в $\widetilde{A}$ и $\tilde{\pi}(\widetilde{P}) = \pi'(\widetilde{\phi}(\widetilde{P})) = 0$. Значит, $\tilde{\pi}(h \cdot a) = 0$ для любого $h \in H'$ и любого $a \in \widetilde{P}$. Следовательно, $\rho(\widetilde{P})(H') = 0$. Таким образом, все элементы из $\rho(\widetilde{P})$ обращаются в нуль на корадикале алгебры Хопфа H, значит, $\rho(\widetilde{P}) \subseteq \operatorname{rad}(\operatorname{Hom}(H, S_A))$. Поскольку ρ инъективен, отсюда следует, что идеал $\widetilde{P}$ нильпотентен. Так как для любого $a \in A$ такого, что $\phi(a) \in A'^{H'}$, существует $q \in \widetilde{A}^H$ такой, что $\widetilde{\phi}(a^{p^s}) = \phi(a^{p^s}) = \widetilde{\phi}(q)$, то $a^{p^s} - q \in \widetilde{P}$. Значит, существует k такое, что $a^{p^{s+k}} - q^{p^k} = (a^{p^s} - q)^{p^k} = 0$, следовательно, $a^{p^{s+k}} \in A^H$ и $\pi(a^{p^{s+k}}) = \pi'(\phi(a))^{p^{s+k}} \in \pi(A^H) \cap \pi'(A'^{H'})$. Таким образом, для любого $u \in \pi'(A'^{H'})$ существует k такое, что $u^{p^{s+k}} \in \pi(A^H)$. Так как A' цела над $A'^{H'}$, то S цела над $\pi'(A'^{H'})$. Значит, S цела над $\pi(A^H)$. Следовательно, по предложению 5.5 A цела над A^H. $\square$

Следствие 6.2. *Пусть H — точечная алгебра Хопфа размерности n, а A принадлежит категории $\mathscr{A}$, причем $\mathfrak{I}_A$ инвариантен относительно действия группы $G(H)$. Тогда*

(1) *если $\operatorname{char}\mathbf{k} = 0$, то ${S_A}^{G(H)} = \pi_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}^H)$;*

(2) *если $\operatorname{char}\mathbf{k} = p > 0$, то $c^{p^s} \in \pi_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}^H)$ для любого $c \in {S_A}^{G(H)}$, где s такое, что $n = p^s m$ и m взаимно просто с p;*

(3) *если $\operatorname{char}\mathbf{k} = p > 0$, то A цела над A^H.*

Доказательство. Применим предложение 6.1, где в качестве H' возьмем $\mathbf{k}G(H)$. Тогда $P = \mathfrak{I}_A$, $A' = S_A$, $\phi = \pi_A$ и $\widetilde{\phi} = \pi_{\widetilde{A}}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еряшкин М. С.* Инварианты действия полупростой конечномерной алгебры Хопфа на алгебрах специального вида // Изв. вузов. Математика. 2011. № 8. С. 14-22.
2. *Sweedler M. E.* Hopf algebras. New York: Benjamin, 1969.
3. *Montgomery S.* Hopf algebras and their actions on rings. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. (CBMS Reg. Conf. Ser. Math.; V. 85).
4. *Skryabin S. M.* Invariants of finite Hopf algebras // Adv. Math. 2004. V. 183, N 2. P. 209–239.
5. *Артамонов В. А.* Инварианты алгебр Хопфа // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1996. № 4. С. 45–49; Исправление // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1997. № 2. С. 64.

6. *Zhu Shenglin.* Integrality of module algebras over its invariants // J. Algebra. 1996. V. 180, N 1. P. 187–205.
7. *Тоток А. А.* Об инвариантах конечномерных точечных алгебр Хопфа // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1997. № 3. С. 31–34.
8. *Cohen M.* Smash products, inner actions and quotient rings // Pacific J. Math. 1986. V. 125, N 1. P. 45–66.
9. *Skryabin S. M.* Projectivity and freeness over comodule algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. V. 359, N 6. P. 2597–2623.
10. *Кертис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.
11. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории.. М.: Мир, 1977. Т. 1.
12. *Skryabin S., Van Oystaeyen F.* The Goldie theorem for H-semiprime algebras // J. Algebra. 2006. V. 305, N 1. P. 292–320.
13. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 15 июля 2011 г.

Еряшкин Михаил Сергеевич
НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Отдел алгебры и математической логики,
ул. Проф. Нужина, 1/37, Казань 420008
mikhail.eryashkin@gmail.com