Сибирский математический журнал
Июль—август, 2012. Том 53, № 4

УДК 517.518.1+517.518.17

ФРАКТАЛ «ЛЯГУШКА»

А. Господарчик

Аннотация. В [1–3] исследованы некоторые аналитические свойства кривой Ван Коха Γ_θ, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. В частности, показано, что Γ_θ квазиконформна и не AC-устранима. Возникает естественный вопрос: можно ли найти квазиконформную и не AC-устранимую кривую, существенно отличную от Γ_θ, т. е. не диффеоморфную Γ_θ? В статье дан ответ на этот вопрос. А именно, построена квазиконформная кривая, названная *лягушкой*, которая не AC-устранима и не диффеоморфна Γ_θ для всех $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Ключевые слова: ковер Серпинского, квазиконформная кривая, фрактал, итерированная система функций, BL^β-пространство, хаусдорфова размерность, AC-устранимость, кривая Ван Коха, диффеоморфизм.

1. Построение лягушки $\mathfrak{F}$

Идея кривой «лягушка»[1)] пришла при изучении дракона Серпинского (см. [4, с. 23]), который не является кривой в нашем понимании[2)]. В отличие от дракона Серпинского и кривой Ван Коха лягушка имеет более сложную конструкцию.

Ее построение начнем с индуктивного описания последовательности замкнутых треугольников $\left\{\triangle_k^n\right\}$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, 6^n\}$, и последовательности ломаных $\{L^n\}$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, которые формируют приближение лягушки. Начнем с равностороннего треугольника $\triangle_1^0$ ранга нуль с вершинами 0, 1, $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 1(a)).

Шаг 0. Определим ломаную ранга нуль, полагая $L^0 = s_1^0 \cup s_2^0$, где s_1^0, s_2^0 — ориентированные отрезки $s_1^0 = \left[0, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $s_2^0 = \left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$[3)]. Далее m-й ориентированный отрезок ранга n обозначаем через s_m^n. Сторону треугольника, не являющуюся отрезком вида s_m^n, назовем *основанием* этого треугольника. Например, основанием $\triangle_1^0$ является $[0, 1]$.

Шаг 1. К $\triangle_1^0$ с основанием $[0, 1]$ применим два последовательных шага построения ковра Серпинского (см. [4, с. 8]) так, как показано на рис. 1(b).

Затем удалим треугольники T_1, T_2, T_3 (рис. 1(c)). Останется 6 треугольников $\triangle_1^1, \dots, \triangle_6^1$ ранга один. В каждом таком треугольнике возьмем две стороны (выделенные отрезки на рис. 2(b)). В результате получим $2 \cdot 6$ отрезков s_m^1, $m = 1, \dots, 2\cdot, 6$. Положим

$$L^1 = \bigcup_{m=1}^{2\cdot 6} s_m^1,$$

[1)]Это название порождено впечатлением, создаваемым третьей картинкой на рис. 2.

[2)]Под кривой понимаем непрерывный инъективный образ замкнутого промежутка.

[3)]В нашем контексте каждый отрезок $[a, b] \subset \mathbb{C}$ с концами a, b всегда ориентирован от a к b.

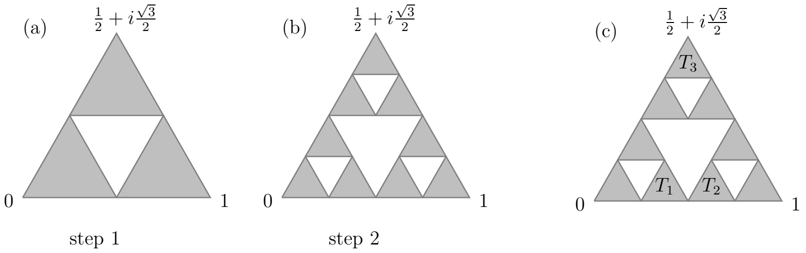


Рис. 1. Два последовательных шага в построении ковра Серпинского.

что завершает первый шаг в построении лягушки.

Шаг 2. Применяя описанную конструкцию к каждому из $\triangle_1^1, \ldots, \triangle_6^1$ (напомним, что их основания отличны от s_m^1, $m=1,\ldots,2{\cdot}6$), получим на этом шаге 6^2 треугольников $\triangle_k^2$, $k=1,\ldots,6^2$, ранга два и $2{\cdot}6^2$ отрезков s_m^2, $m=1,\ldots,2{\cdot}6^2$. Положим

$$L^2=\bigcup_{m=1}^{2\cdot 6^2} s_m^2.$$

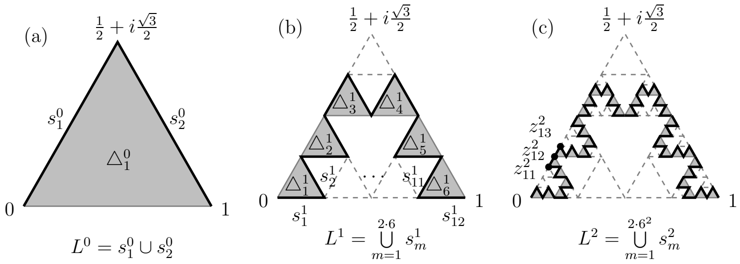


Рис. 2. Три последовательных шага в построении лягушки $\mathfrak{F}$.

Шаг n. Продолжая процесс, на n-м шаге получим 6^n треугольников $\triangle_k^n$, $k=1,\ldots,6^n$, ранга n, а также $2\cdot 6^n$ (выделенных) отрезков s_m^n, $m=1,\ldots,2\cdot 6^n$. Положим

$$L^n=\bigcup_{m=1}^{2\cdot 6^n} s_m^n. \tag{1}$$

Заметим, что треугольники ранга $n+1$ содержатся в объединении треугольников ранга n. Наконец, определим лягушку $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{F}:=\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{6^n}\triangle_k^n. \tag{2}$$

Замечание 1. Из определения $\mathfrak{F}$ вытекают следующие свойства.

(i) $s_{2k-1}^n\cup s_{2k}^n\subset\triangle_k^n$ для любых $n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, $k\in\{1,\ldots,6^n\}$.

(ii) Если $z\in\mathfrak{F}$, то для любого $n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ существует $k\in\{1,\ldots,6^n\}$ такое, что $z\in\triangle_k^n$.

(iii) Если z_m^n, $n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, $m=0,1,\ldots,2\cdot 6^n$, — вершины L^n такие, что $s_m^n=\left[z_{m-1}^n,z_m^n\right]$, то

$$\forall n\in\{0\}\cup\mathbb{N}\ \forall k\in\{1,\ldots,6^n\}\quad z_{2k}^n\in\mathfrak{F}. \tag{3}$$

Заметим, что «нечетные» вершины z^n_{2k+1} исчезают при переходе к шагу $n+1$ и последующим шагам. В отличие от «нечетных» «четные» вершины z^n_{2k} не исчезают никогда (ср. (3)), при этом их число растет неограниченно при $n \to \infty$, так что множество всех «четных» вершин плотно в $\mathfrak{F}$.

(iv) Для любых s^n_m, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $m \in \{1, \ldots, 2 \cdot 6^n\}$, существует бесконечно много четных вершин, принадлежащих s^n_m.

В дальнейшем эти свойства окажутся востребованными.

Докажем, что

$$\mathfrak{F} = \lim L^n. \tag{4}$$

Пусть $z \in \mathfrak{F}$. Ясно, что для каждой окрестности U точки z существует n такое, что для любого $k > n$ найдется $z_k \in L^k \cap U$. Отсюда $\mathfrak{F} \subset \liminf L^n$. Поскольку $\liminf L^n \subset \limsup L^n \subset \mathfrak{F}$ (см. (2)), получаем (4).

2. Алгоритм определения вершины L^n

В этом разделе опишем углы, образованные s^n_m, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $m = 1, \ldots, 2 \cdot 6^n$. Для любого $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ обозначим через A_n упорядоченное множество углов $\phi_{n,m}$, $m = 1, \ldots, 2 \cdot 6^n$, образованных ориентированными отрезками $s^n_m = \left[z^n_{m-1}, z^n_m\right]$ с осью Ox, где z^n_m, $m = 0, 1, \ldots, 2 \cdot 6^n$, — вершины L^n ($z^n_0 = 0$, $z^n_{2 \cdot 6^n} = 1$). Пусть $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Очевидно, что $A_0 = \{\alpha, -\alpha\} = \{\phi_{0,1}, \phi_{0,2}\}$. Зададим на каждом A_n естественный порядок в соответствии с естественным порядком отрезков s^n_m или, что равносильно, с естественным порядком на $\{1, \ldots, 2 \cdot 6^n\}$. Простое геометрическое изучение конструкции L^n показывает, что верны рекуррентные соотношения

$$A_0 = \{\alpha, -\alpha\} = \{\phi_{0,1}, \phi_{0,2}\}$$

и для любого $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = (-A_{n-1} + \alpha) \oplus (-A_{n-1} + \alpha) \oplus A_{n-1} \oplus A_{n-1} \oplus (-A_{n-1} - \alpha) \oplus (-A_{n-1} - \alpha), \tag{5}$$

где использовано стандартное обозначение $E + r = \{x + r,\ x \in E\}$ для $E \subset \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, и через $\oplus$ обозначена прямая сумма упорядоченных множеств. Для наглядности выпишем несколько первых A_n:

$$A_1 = \{\underbrace{0, 2\alpha}_{-A_0+\alpha}, \underbrace{0, 2\alpha}_{-A_0+\alpha}, \underbrace{\alpha, -\alpha}_{A_0}, \underbrace{\alpha, -\alpha}_{A_0}, \underbrace{-2\alpha, 0}_{-A_0-\alpha}, \underbrace{-2\alpha, 0}_{-A_0-\alpha}\} = \{\phi_{1,1}, \ldots, \phi_{1,2\cdot 6}\};$$

$$\begin{gathered} A_2 = \{\underbrace{\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, 0, 2\alpha, 0, 2\alpha, 3\alpha, \alpha, 3\alpha, \alpha}_{-A_1+\alpha}, \\ \underbrace{\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, 0, 2\alpha, 0, 2\alpha, 3\alpha, \alpha, 3\alpha, \alpha}_{-A_1+\alpha}, \underbrace{0, 2\alpha, 0, 2\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, -2\alpha, 0, -2\alpha, 0}_{-A_1}, \\ \underbrace{0, 2\alpha, 0, 2\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, -2\alpha, 0, -2\alpha, 0}_{-A_1}, \\ \underbrace{-\alpha, -3\alpha, -\alpha, -3\alpha, -2\alpha, 0, -2\alpha, 0, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha}_{-A_1-\alpha}, \\ \underbrace{-\alpha, -3\alpha, -\alpha, -3\alpha, -2\alpha, 0, -2\alpha, 0, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha}_{-A_1-\alpha}\}. \end{gathered}$$

Соотношение (5) позволяет явно найти все вершины каждого L^n:

$$z^n_m = z^n_{m-1} + (1/4)^n \cdot e^{i\phi_{n,m}}, \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ m = 1, \ldots, 2 \cdot 6^n, \tag{6}$$

где $z^n_0 = 0$ для всех n.

Заметим, что (5), (6) могут быть легко использованы для демонстрации L^n на компьютере.

3. Параметризация лягушки $\mathfrak{F}$

В этом разделе введем параметризацию лягушки $\mathfrak{F}$ и покажем, что эта параметризация удовлетворяет двустороннему неравенству Гёльдера. Каждому L^n поставим в соответствие единственное биективное кусочно аффинное отображение $\psi_n : [0,1] \to L^n$. Последовательность $\{\psi_n\}$ определим следующим образом:

(i) $\psi_n(0) = 0$, $\psi_n(1) = 1$;

(ii) для каждого m, $m \in \{1, \ldots, 2 \cdot 6^n\}$, ограничение $\psi_n|I^n_m$, где $I^n_m = \left[\frac{m-1}{2\cdot 6^n}, \frac{m}{2\cdot 6^n}\right]$, — аффинное отображение I^n_m на s^n_m, и $\psi_n\left(\frac{m}{2\cdot 6^n}\right) = z^n_m$ при $m \in \{0, 1, \ldots, 2 \cdot 6^n\}$.

Очевидно, что ψ_n определено корректно и является непрерывной биекцией $[0,1]$ на L^n. Таким образом, ψ_n — параметризация ориентированной ломаной L^n.

Теорема 2. *Существует равномерный предел*

$$\psi = \lim_{n\to\infty} \psi_n, \tag{7}$$

который является гомеоморфизмом $[0,1]$ *на* $\mathfrak{F}$, *где* $\mathfrak{F}$ *снабжена обычной метрикой* $|z_1 - z_2|$.

Доказательство. Пусть дано $\epsilon > 0$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, что $\frac{1}{4^n} < \epsilon$. Для произвольного $t \in [0,1]$ существует $k \in \{1, \ldots, 6^n\}$ такое, что $\psi_n(t) \in \triangle^n_k$. Тогда для каждого $p \in \mathbb{N}$ точка $\psi_{n+p}(t)$ принадлежит некоторому треугольнику $\triangle^{n+p}_r \subset \triangle^n_k$, так что $\psi_{n+p}(t) \in \triangle^n_k$. Тем самым

$$|\psi_n(t) - \psi_{n+p}(t)| \leq \operatorname{diam} \triangle^n_k = \frac{1}{4^n} < \epsilon. \tag{8}$$

Отсюда следует, что предел (7) существует и сходимость $\psi_n \to \psi$ равномерна на $[0,1]$. Тем самым функция ψ непрерывна. Опустим элементарное доказательство того, что ψ — гомеоморфизм. $\square$

Определение 3. Назовем ψ *параметризацией* лягушки $\mathfrak{F}$.

4. Двустороннее неравенство Гёльдера для параметризации

Теорема 4. *Для любых* $t_1, t_2 \in [0,1]$ *имеют место неравенства*

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12^{-\beta} |t_1 - t_2|^\beta \leq |\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leq 8|t_1 - t_2|^\beta, \tag{9}$$

где $\beta = \log_6 4 = \frac{2}{\log_2 6}$.

Доказательство. Пусть $t_1, t_2 \in [0,1]$. Положим $z_1 = \psi(t_1)$, $z_2 = \psi(t_2)$. Предположим, что z_1 предшествует z_2, что по определению значит, что $t_1 < t_2$.

Пусть $s \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ — максимальное число, для которого z_1, z_2 принадлежат одному треугольнику $\triangle_k^s$, $k \in \{1, \dots, 6^s\}$. Рассмотрим шаг $s+1$ построения $\mathfrak{F}$. Возможны следующие случаи.

Случай I. Точки z_1, z_2 принадлежат двум разным треугольникам ранга $s+1$, и существует по крайней мере один треугольник того же ранга $s+1$, разделяющий эти два треугольника (рис. 3).

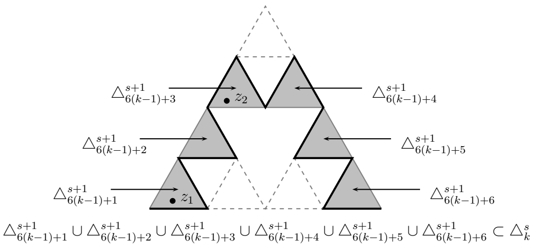


Рис. 3. Треугольник $\triangle_k^s$, случай I.

После изучения всех возможных расположений z_1, z_2 в $\triangle_k^s$ элементарными вычислениями получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4^{s+1}} \le |z_1 - z_2| \le \frac{4}{4^{s+1}}, \quad \frac{1}{6^{s+1}} \le |t_1 - t_2| \le \frac{6}{6^{s+1}}, \tag{10}$$

откуда

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| = |z_1 - z_2| \le 4 \cdot 4^{-s-1} = 4 \cdot (6^{-s-1})^\beta \le 4 \cdot |t_1 - t_2|^\beta \tag{11}$$

и

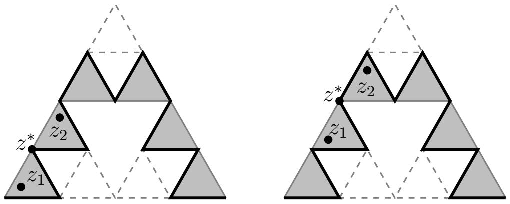
$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| = |z_1 - z_2| \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4^{-s-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (6^{-s-1})^\beta \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6^{-\beta} \cdot |t_1 - t_2|^\beta, \tag{12}$$

где $\beta = \log_6 4$. Из (11) и (12) имеем

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6^{-\beta} \cdot |t_1 - t_2|^\beta \le |\psi(t_1) - \psi(t_2)| \le 4 \cdot |t_1 - t_2|^\beta, \tag{13}$$

где $\beta = \log_6 4$.

Случай II. Точки z_1, z_2 принадлежат смежным треугольникам ранга $s+1$ с общей вершиной z^*. Легко проверить, что существует пять возможных конфигураций треугольников ранга $s+1$, содержащих z_1, z_2, z^*. На рис. 4 показаны две из них.



(a) $z_1 \in \triangle^{s+1}_{6(k-1)+1}$, $z_2 \in \triangle^{s+1}_{6(k-1)+2}$ (b) $z_1 \in \triangle^{s+1}_{6(k-1)+2}$, $z_2 \in \triangle^{s+1}_{6(k-1)+3}$

Рис. 4. Треугольник $\triangle_k^s$, случай II.

Две из оставшихся конфигураций аналогичны (a), тогда как третья подобна (b). Достаточно рассмотреть только одну конфигурацию, например (a) на рис. 4. Пусть $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ — максимальное число, для которого z_1, z_2 принадлежат соседним треугольникам $\triangle_j^n$, $\triangle_{j+1}^n$ с общей вершиной z^* для некоторого j. Ясно, что $n \geq s+1$. На шаге $n+1$ точки z_1, z_2 принадлежат разным треугольникам ранга $n+1$. Эти треугольники разделены по крайней мере одним треугольником ранга $n+1$. В случае (a) две конфигурации (a.1), (a.2) возможны, как показано на рис. 5. Для оставшихся случаев две возможные конфигурации (b.1), (b.2) приведены на рис. 5 (они могут быть получены из (a.1), (a.2), если поменять местами верхние половинки (a.1) и (a.2)). Конфигурация (a.1) соответствует $n = s+$(нечетное число), тогда как (a.2) соответствует $n = s+$ (четное число).

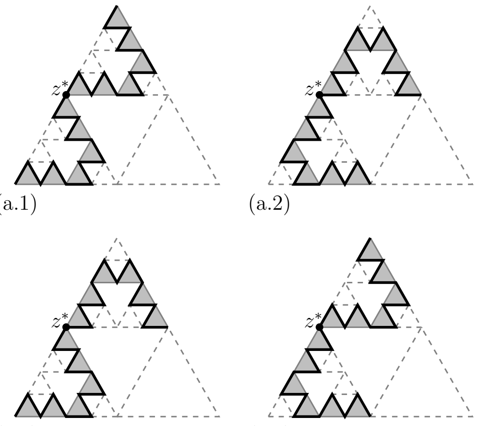


Рис. 5. Случаи (a) и (b).

Аналогично (10), не повторяя подробности, получим следующие оценки:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4^{n+1}} \leq |z_1 - z_2| \leq \frac{8}{4^{n+1}}, \quad \frac{1}{6^{n+1}} \leq |t_1 - t_2| \leq \frac{12}{6^{n+1}}. \tag{14}$$

Числовые коэффициенты в других случаях те же, что и в (14). Имеем

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12^{-\beta} \cdot |t_1 - t_2|^\beta \leq |\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leq 8 \cdot |t_1 - t_2|^\beta, \tag{15}$$

где $\beta = \log_6 4$.

Окончательно в случаях I и II (см. (13) и (15)) для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ получаем

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12^{-\beta} \cdot |t_1 - t_2|^\beta \leq |\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leq 8 \cdot |t_1 - t_2|^\beta, \tag{16}$$

где $\beta = \log_6 4$. $\square$

5. Лягушка $\mathfrak{F}$ — квазиконформная кривая

Основные термины, связанные с квазиконформными отображениями, см., например, в [5].

Определение 5 [3]. Дуга $C \subset \mathbb{C}$ *квазиконформна*, если существуют область $G \subset \mathbb{C}$, квазиконформное отображение $\Phi : G \to \mathbb{C}$ и замкнутый интервал $I \subset G$ такие, что $C = \Phi(I)$.

Определение 6 [2, 6]. Дуга $C \subset \mathbb{C}$ *удовлетворяет условию Альфорса* с постоянной $M \geq 1$, если неравенство

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \leq M|z_1 - z_3|$$

верно для всех точек $z_1, z_2, z_3 \in C$ таких, что z_2 разделяет z_1 и z_3.

Теорема 7 [2, 6]. *Для того чтобы дуга C была квазиконформна, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Альфорса.*

Определение 8 [2]. Отображение $\psi : E \to \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{R}$, *удовлетворяет условию Альфорса* с постоянной $M \geq 1$, если соотношение

$$\forall t \in [t', t''] \cap E \quad |\psi(t') - \psi(t)| + |\psi(t) - \psi(t'')| \leq M|\psi(t') - \psi(t'')|$$

выполнено для любого отрезка $[t', t'']$ такого, что $t', t'' \in E$.

Определение 9 [2]. Множество $X \subset \mathbb{C}$ *удовлетворяет условию Альфорса* с постоянной $M \geq 1$, если найдется отображение $\psi : E \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее условию Альфорса с постоянной M, такое, что $X = \psi(E)$.

Теорема 10. *Параметризация $\psi : [0,1] \to Z$ лягушки $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию Альфорса с постоянной $M = \frac{128}{\sqrt{3}}$, т. е.*

$$\forall t \in [t', t''] \cap [0,1] \;\; |\psi(t') - \psi(t)| + |\psi(t) - \psi(t'') \leq \frac{128}{\sqrt{3}}|\psi(t') - \psi(t'') \tag{17}$$

для всех интервалов $[t', t'']$ таких, что $t', t'' \in [0,1]$.

Доказательство. Пусть $t, t', t'' \in [0,1]$ таковы, что $t \in [t', t'']$. В силу теоремы 4 имеем

$$\begin{aligned}
&|\psi(t') - \psi(t)| + |\psi(t) - \psi(t'')| \leq 8 \cdot (|t' - t|^\beta + |t - t''|^\beta) \\
&= 8 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}|t' - t|^\beta + \frac{1}{2}|t - t''|^\beta\right) \leq 8 \cdot 2 \cdot \left|\frac{1}{2}t' - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t''\right|^\beta = 8 \cdot 2 \cdot \left|\frac{1}{2}t' - \frac{1}{2}t''\right|^\beta \\
&= 8 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot |t' - t''|^\beta \leq 8 \cdot 2 \cdot 2^{-\beta} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 12^\beta \cdot |\psi(t') - \psi(t'')| \\
&= 2^{-\beta+1} \cdot \frac{16}{\sqrt{3}} \cdot 12^\beta |\psi(t') - \psi(t'')|.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что $M = 2^{-\beta+1} \cdot \frac{16}{\sqrt{3}} \cdot 12^\beta = 6^\beta \cdot \frac{2^5}{\sqrt{3}} = \frac{128}{\sqrt{3}} > 1$. Получаем

$$|\psi(t') - \psi(t)| + |\psi(t) - \psi(t'')| \leq \frac{128}{\sqrt{3}}|\psi(t') - \psi(t'')|$$

для $t, t', t'' \in [0,1]$ таких, что $t \in [t', t'']$, $\beta = \log_6 4$. $\square$

Следствие 11. *Лягушка $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию Альфорса*

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \leq M|z_1 - z_3|$$

для всех точек $z_1, z_2, z_3 \in Z$ таких, что z_2 разделяет z_1 и z_3, $M = \frac{128}{\sqrt{3}}$.

Итак, $\mathfrak{F}$ — квазиконформная кривая (по теореме 7).

6. Хаусдорфова размерность лягушки $\mathfrak{F}$

Определение 12 [7, 8]. Отображение $f : X \to Y$ метрического пространства называется BL^β-*отображением* ($\beta > 0$), если существует постоянная K такая, что

$$K^{-1}|x_1 - x_2|^\beta \le |f(x_1) - f(x_2)| \le K|x_1 - x_2{}^\beta| \tag{18}$$

для всех $x_1, x_2 \in X$.

Следствие 13 [7, 8]. *Если гомеоморфизм $f : X \to Y$ является BL^β-отображением, то*

$$\dim_H(X) = \beta \cdot \dim_H(Y). \tag{19}$$

Таким образом, из теоремы 4 немедленно вытекает

Следствие 14. *Параметризация $\psi : [0, 1] \to \mathfrak{F}$ лягушки является BL^β-отображением, и*

$$\dim_H(\mathfrak{F}) = \frac{1}{\beta} = \log_4 6. \tag{20}$$

Из (20) ясно, что $\mathfrak{F}$ — фрактал.

Определение 15 [3]. Пусть Ω — открытое подмножество $\mathbb{C}$. Множество $E \subset \Omega$, замкнутое в Ω, называется AC-*устранимым в* Ω, если каждая непрерывная функция $f :\to \Omega\mathbb{C}$, аналитичная в $\Omega \setminus E$, также аналитична в Ω. Иначе говорим, что множество E *не* AC-*устранимо* (в Ω). Далее рассматриваем $\Omega = \mathbb{C}$.

Теорема 16 [9]. *Пусть $E \subset \mathbb{C}$. Если $\dim_H E > 1$, то E не AC-устранимо.*

Следствие 17. *Лягушка $\mathfrak{F}$ не AC-устранима.*

7. Лягушка и кривая Ван Коха не диффеоморфны

Для удобства читателя дадим краткое описание кривой Ван Коха (детали см. в [3]), а именно рассмотрим семейство кривых Ван Коха

$$\{\Gamma_\theta : \theta \in (0, \pi/4)\}. \tag{21}$$

Возьмем начальный треугольник T_1^0 (ранга нуль) с вершинами 0, 1, $\frac{1}{2} + i\frac{\operatorname{tg}\theta}{2}$, где θ — угол у основания T_1^0. Далее последовательно удалим некоторую специальную последовательность равнобедренных открытых треугольников. На первом шаге удаляем треугольник с вершинами λ^2, $1 - \lambda^2$, $\frac{1}{2} + i\frac{\operatorname{tg}\theta}{2}$, где $\lambda = \frac{1}{2\cos\theta}$. Получаем два замкнутых треугольника T_1^1, T_2^1 ранга один, каждый из которых подобен T_1^0 (рис. 6). На n-м шаге построения получим 2^n равных треугольников T_k^n ранга n, подобных T_1^0, $\operatorname{diam} T_k^n = \lambda^n$. По определению

$$\Gamma_\theta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} T_k^n. \tag{22}$$

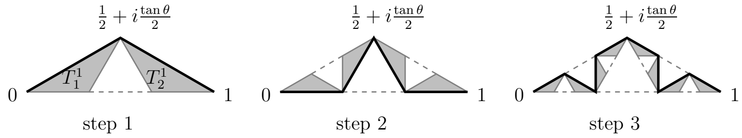


Рис. 6. Три последовательных шага построения кривой Ван Коха Γ_θ, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Теорема 18 [2, 3]. *Естественная параметризация φ кривой Γ удовлетворяет двустороннему условию Гёльдера:*

$$\forall t_1, t_2 \in [0,1] \quad A(\theta)|t_1 - t_2|^\gamma \le |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le 4|t_1 - t_2|^\gamma, \tag{23}$$

где $\gamma = \gamma(\theta) = \log_2 2\cos\theta$ *и*

$$A(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{4}\cos^2\theta, & 0 < \theta < \frac{\pi}{8}, \\ \frac{\sin 3\theta}{8\cos^3\theta}, & \frac{\pi}{8} \le \theta < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Теорема 19 [2]. *Для любого* $\theta \in (0, \pi/4)$

$$\dim_H \Gamma_\theta = \frac{1}{\log_2 2\cos\theta}. \tag{24}$$

Теорема 20. *Лягушка $\mathfrak{F}$ и кривая Ван Коха Γ_θ, $\theta \in (0, \pi/4)$, не диффеоморфны.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что уравнение $\dim_H \Gamma_\theta = \dim_H \mathfrak{F}$ имеет единственное решение

$$\theta_0 = \arccos 2^{\frac{1-\log_2 3}{1+\log_2 3}} \ (\approx \pi/6 + 0{,}022). \tag{25}$$

Следовательно, Γ_θ не диффеоморфна $\mathfrak{F}$ для всех $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \setminus \{\theta_0\}$, поскольку диффеоморфизм сохраняет хаусдорфову размерность.

Осталось рассмотреть случай $\theta = \theta_0$. Докажем от противного. Пусть существует диффеоморфизм $h : \mathscr{D} \to \mathscr{G}$, $\Gamma_{\theta_0} \subset \mathscr{D}$, $\mathfrak{F} \subset \mathscr{G}$, $h(\Gamma_{\theta_0}) = \mathfrak{F}$. Тогда легко заключить, что $w_0 = h^{-1}\left(z_{12}^2\right)$ — общая вершина двух соседних треугольников T_{k-1}^m, T_k^m, использованных в построении Γ_{θ_0}. Из свойства (iv) (см. замечание 1) следует, что существует две последовательности $(z'_n) \in \mathfrak{F} \cap s_{12}^2$, $(z''_n) \in \mathfrak{F} \cap s_{13}^2$, $z'_n \ne z_{12}^2$, $z''_n \ne z_{12}^2$, такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} z'_n = z_{12}^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} z''_n = z_{12}^2$. Имеем $(h^{-1}(z'_n)) \in T_{k-1}^m$, $(h^{-1}(z''_n)) \in T_k^m$ (см. правую фигуру на рис. 7).

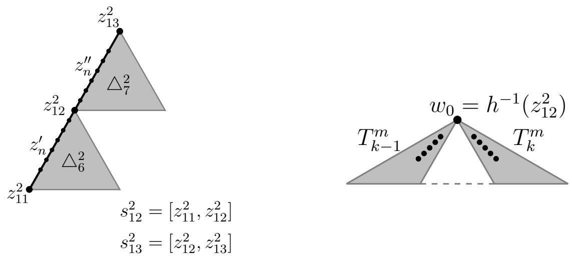


Рис. 7.

Заметим, что $s_{12}^2 \cup s_{13}^2$ показан лишь как «маленький» отрезок на рис. 2(c), в «увеличенном» виде он дан слева на рис. 7. Очевидно, что

$$w'_n = h^{-1}(z'_n) \to w_0, \quad w''_n = h^{-1}(z''_n) \to w_0. \tag{26}$$

Переходя, если необходимо, к подпоследовательностям, можем положить

$$\frac{w'_n - w_0}{\|w'_n - w_0\|} \to e_1, \quad \frac{w''_n - w_0}{\|w''_n - w_0\|} \to e_2. \tag{27}$$

Из построения кривой Ван Коха следует, что векторы e_1, e_2 линейно независимы. Имеем

$$h(w_n') - h(w_0) = h'(w_0)(w_n' - w_0) + o(w_n' - w_0), \tag{28}$$

где h' — производная Фреше. Аналогично

$$h(w_n'') - h(w_0) = h'(w_0)(w_n'' - w_0) + o(w_n'' - w_0). \tag{29}$$

Из (27) и (28) получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h(w_n') - h(w_0)}{\|w_n' - w_0\|} = h'(w_0)(e_1). \tag{30}$$

Аналогично из (27) и (29) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h(w_n'') - h(w_0)}{\|w_n'' - w_0\|} = h'(w_0)(e_2). \tag{31}$$

Заметим, что векторы $h(w_n') - h(w_0)$, $h(w_n'') - h(w_0)$ линейно зависимы, поскольку принадлежат одной прямой, проходящей через точки z_{11}^2, z_{13}^2. С другой стороны, векторы $h'(w_0)(e_1)$ и $h'(w_0)(e_2)$ линейно независимы, так как $h'(w_0)$ — изоморфизм; противоречие. Таким образом, Γ_{θ_0} и $\mathfrak{F}$ не диффеоморфны.

Замечание 21. Подробное доказательство может быть проведено для каждого θ, но, как видно, доказательство для $\theta \neq \theta_0$ немедленно следует из сравнения размерностей Хаусдорфа. $\square$

Теорема 22. *Для $\theta = \theta_0$ отображение $f = \varphi \circ \psi^{-1}$ является билипшицевым отображением $\mathfrak{F}$ на Γ_{θ_0}.*

Доказательство. Пусть $z_1, z_2 \in \mathfrak{F}$. Положим $t_1 = \psi^{-1}(z_1)$, $t_2 = \psi^{-1}(z_2)$. Из (9) и (23) получаем

$$\begin{aligned}|f(z_1) - f(z_2)| &= |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le 4|t_1 - t_2|^\gamma = 4|t_1 - t_2|^\beta \\ &\le \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot 12^\beta |\psi(t_1) - \psi(t_2)| = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot 12^\beta |z_1 - z_2|.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}|f(z_1) - f(z_2)| &= |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \ge A(\theta_0)|t_1 - t_2|^\gamma = A(\theta_0)|t_1 - t_2|^\beta \\ &\ge \frac{A(\theta_0)}{8} |\psi(t_1) - \psi(t_2)| = \frac{A(\theta_0)}{8} |z_1 - z_2|.\end{aligned}$$

Таким образом, для $\theta = \theta_0$

$$\forall z_1, z_2 \in \mathfrak{F} \quad \frac{A(\theta_0)}{8}|z_1 - z_2| \le |f(z_1) - f(z_2)| \le \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot 12^\beta |z_1 - z_2|, \tag{32}$$

т. е. f билипшицево. $\square$

В заключение несколько слов о фрактальной структуре лягушки. Лягушка — самоподобный фрактал в обычном смысле (см. [4] или [10]), порожденный итерированной системой функций (см. [4]) шестью сжимающих подобий с отношением $\frac{1}{4}$. Кроме того, так же, как кривая Ван Коха, она является жордановым циппером в смысле [11] (см. также [10]). Лягушка удовлетворяет условию теоремы 4.1 в [11] и в силу этой теоремы является дугой ограниченного поворота. Но теорема 4.1 в [11] не дает конкретной верхней оценки для постоянной Альфорса для этой жордановой дуги. Тем самым следствие 11 несет новую информацию о циппере $\mathfrak{F}$. Лягушка $\mathfrak{F}$ — квазиконформная кривая (по теореме 7), но она не AC-устранима в силу (20) и [9] и не диффеоморфна Γ_θ для любого $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ (по теореме (20)).

Автор благодарит рецензента, пожелания и замечания которого улучшили текст статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пономарев С. П.* AC-устранимость, хаусдорфова размерность и N-свойство // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 6. С. 1175–1183.
2. *Пономарев С. П.* О хаусдорфовой размерности квазиконформных кривых // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 4. С. 142–148.
3. *Пономарев С. П.* О некоторых свойствах кривых Ван Коха // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1305–1321.
4. *Edgar G.* Measure, topology and fractal geometry. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1998.
5. *Ahlfors L. V.* Lectures on quasiconformal mappings. Pronceton, NJ; Toronto; New York; London: Van Nostrand Company, 2006. (Univ. Lect. Ser.; V. 38).
6. *Rickman S.* Characterization of quasiconformal arcs // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1966. V. 395. P. 7–30.
7. *Ghamsari M., Herron D. A.* Higher dimensional Ahlfors regular sets and chordarc curves in $\mathbb{R}^n$ // Rocky Mountain J. Math. 1998. V. 28, N 1. P. 191–222.
8. *Ghamsari M., Herron D. A.* Bilipschitz homogeneous Jordan curves // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V. 351, N 8. P. 3197–3216.
9. *Долженко Е. П.* О стирании особенностей аналитических функций // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 4. С. 135–142.
10. *Hutchinson J.* Fractals and self similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30, N 5. P. 713–747.
11. *Асеев В. В., Тетенов А. В., Кравченко А. С.* О самоподобных жордановых кривых на плоскости // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 3. С. 481–492.

Статья поступила 3 сентября 2011 г.

Aneta Gospodarczyk (Господарчик Анета)
Гданьский университет, Институт математики,
Гданьск, Польша
agospo@mat.ug.edu.pl