Сибирский математический журнал
Июль—август, 2012. Том 53, № 4

УДК 517.956

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА И ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА АДАМАРА — МАРШО В КЛАССЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. С. Бердышев, Б. Х. Турметов, Б. Ж. Кадиркулов

Аннотация. В классе гармонических функций изучаются свойства некоторых интегродифференциальных операторов, обобщающих операторы дробного дифференцирования в смысле Адамара и Адамара — Маршо. В качестве применения полученных свойств рассматриваются некоторые краевые задачи для уравнения Лапласа в шаре.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, интегродифференциальный оператор, операторы дробного дифференцирования в смысле Адамара и Адамара — Маршо.

1. Введение

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ — n-мерный единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера. Пусть далее $u(x)$ — функция, гармоническая в шаре Ω, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \mu$ — действительные числа.

Рассмотрим операторы

$$J_\mu^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} u(sx)\, ds, \tag{1}$$

$$D_\mu^\alpha[u](x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{-(\alpha+1)} s^{\mu-1} [u(x) - u(sx)]\, ds + \mu^\alpha u(x), \tag{2}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

При $\mu = 0$ соотношение (1) совпадает с дробным интегралом Адамара порядка $\alpha > 0$, а (2) — с дробной производной Адамара — Маршо [1]. Поэтому конструкции (1) и (2) назовем *дробными интегралом и производной типа Адамара — Маршо.*

Легко показать, что операторы J_μ^α и J_ν^β при $\alpha, \beta \in (0,1)$, $\mu, \nu \geq 0$ коммутируют. Действительно, если функции $J_\nu^\beta[u](x)$ и $J_\mu^\alpha\left[J_\nu^\beta[u]\right](x)$ существуют, то по

© 2012 Бердышев А. С., Турметов Б. Х., Кадиркулов Б. Ж.

определению оператора J_μ^α имеем

$$J_\mu^\alpha\big[J_\nu^\beta[u]\big](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 |\ln\tau|^{\alpha-1}\tau^{\mu-1}J_\nu^\beta[u(\tau x)]\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 |\ln\tau|^{\alpha-1}\tau^{\mu-1}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 |\ln s|^{\beta-1}s^{\nu-1}u(s\tau x)\,dsd\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 |\ln s|^{\beta-1}s^{\nu-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 |\ln\tau|^{\alpha-1}\tau^{\mu-1}u(\tau s x)\,d\tau ds = J_\nu^\beta\big[J_\mu^\alpha[u]\big](x).$$

Аналогичным свойством обладают операторы D_μ^α и D_ν^β, т. е. справедливо равенство

$$D_\nu^\beta\big[D_\mu^\alpha[u]\big](x) = D_\mu^\alpha\big[D_\nu^\beta[u]\big](x).$$

Замечание 1. Отметим, что если $u = \mathrm{const}$, то $J_0^\alpha[u](x)$ не существует, а $J_\mu^\alpha[u](x)$ существует для всех $\mu > 0$ и $\alpha \in (0,1)$.

Пусть теперь $\bar\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\bar\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, m — натуральное число, $0 < \alpha_j < 1$, $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Рассмотрим более общие операторы

$$J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x) = J_{(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)}[u](x) = J_{\mu_m}^{\alpha_m}\big[J_{\mu_{m-1}}^{\alpha_{m-1}}\dots\big[J_{\mu_1}^{\alpha_1}[u]\big]\dots\big](x),$$

$$D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x) = D_{(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)}[u](x) = D_{\mu_m}^{\alpha_m}\big[D_{\mu_{m-1}}^{\alpha_{m-1}}\dots\big[D_{\mu_1}^{\alpha_1}[u]\big]\dots\big](x).$$

Отметим, что аналогичные операторы с производными целого порядка в классе гармонических функций рассматривались в [2–5], а для производных дробного порядка в смысле Римана — Лиувилля и Капуто — в [6].

2. Свойства операторов $J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}$ и $D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}$

Лемма 1. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $\mu \geq 0$ — действительные числа и $H_k(x)$ — однородный гармонический полином степени k при $k \in N_0 = \{0, 1, \dots\}$. Тогда справедливы равенства*

$$J_\mu^\alpha[H_k](x) = (k+\mu)^{-\alpha}H_k(x), \quad k \in N_0,\ k+\mu \neq 0, \tag{3}$$

$$D_\mu^\alpha[H_k](x) = (k+\mu)^{\alpha}H_k(x), \quad k \in N_0,\ \mu \geq 0. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $H_k(x)$ — некоторый однородный гармонический полином степени $k \in N_0$ и $k + \mu \neq 0$. Тогда в соответствии с определением оператора J_μ^α запишем

$$J_\mu^\alpha[H_k](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1}s^{\mu-1}H_k(sx)\,ds = \frac{H_k(x)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1}s^{k+\mu-1}\,ds.$$

После замены переменных по формуле $\ln\frac{1}{s} = z$ последний интеграл приводится к виду

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1}s^{k+\mu-1}\,ds = (k+\mu)^{-\alpha}, \quad k \in N_0.$$

Действительно,

$$\int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{k+\mu-1}\, ds = \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-(k+\mu)z}\, dz$$

$$= (k+\mu)^{\alpha} \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s}\, ds = (k+\mu)^{\alpha}\Gamma(\alpha).$$

Следовательно, $J_\mu^\alpha[H_k](x) = (k+\mu)^{-\alpha} H_k(x)$. Равенство (3) доказано.

Переходим к доказательству равенства (4). Используя определение оператора D_μ^α, получаем, что при $k = 0$

$$D_\mu^\alpha[H_0](x) = \mu^\alpha H_0(x), \quad \mu \geq 0,$$

а при $k \geq 1$ и $\mu \geq 0$ имеем

$$D_\mu^\alpha[H_k](x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{H_k(x) - H_k(sx)}{s^{1-\mu}|\ln s|^{\alpha+1}}\, ds + \mu^\alpha H_k(x)$$

$$= \frac{\alpha H_k(x)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{1-s^k}{s^{1-\mu}|\ln s|^{\alpha+1}}\, ds + \mu^\alpha H_k(x)$$

$$= \frac{\alpha H_k(x)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (s^{\mu-1} - s^{\mu+k-1})|\ln s|^{-(\alpha+1)}\, ds + \mu^\alpha H_k(x)$$

$$= \frac{H_k(x)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (s^\mu - s^{\mu+k})\, d\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-\alpha} + \mu^\alpha H_k(x)$$

$$= \frac{H_k(x)}{\Gamma(1-\alpha)} (s^\mu - s^{\mu+k}) \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-\alpha}\Bigg|_{s=0}^{s=1}$$

$$- \frac{H_k(x)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (\mu s^{\mu-1} - (k+\mu)s^{\mu+k-1})|\ln s|^{-\alpha}\, ds + \mu^\alpha H_k(x)$$

$$= -\frac{H_k(x)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (\mu s^{\mu-1} - (k+\mu)s^{\mu+k-1})|\ln s|^{-\alpha}\, ds + \mu^\alpha H_k(x).$$

Рассмотрим интеграл $I_{k+\mu} = \int_0^1 s^{k+\mu-1}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-\alpha} ds$, $k = 1, 2, \ldots, \mu \geq 0$.

Как в доказательстве равенства (3), после замены $\ln\frac{1}{s} = z$ получаем

$$I_{k+\mu} = \int_0^\infty e^{-(k+\mu)z} z^{-\alpha}\, dz = (k+\mu)^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\alpha}\, dt = \Gamma(1-\alpha)(k+\mu)^{\alpha-1},$$

$$I_\mu = \int_0^1 s^{\mu-1}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-\alpha} ds = \int_0^\infty e^{-\mu t} t^{-\alpha}\, dt = \Gamma(1-\alpha)\mu^{\alpha-1}.$$

Следовательно,

$$D_\mu^\alpha[H_k](x) = -\frac{H_k(x)}{\Gamma(1-\alpha)}\Gamma(1-\alpha)[\mu\mu^{\alpha-1} - (k+\mu)(k+\mu)^{\alpha-1}] + \mu^\alpha H_k(x)$$
$$= -\mu^\alpha H_k(x) + (k+\mu)^\alpha H_k(x) + \mu^\alpha H_k(x) = (k+\mu)^\alpha H_k(x).$$

Лемма доказана.

Введем обозначения

$$\gamma_{k,m} = (k+\mu_1)^{\alpha_1}(k+\mu_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(k+\mu_m)^{\alpha_m}, \quad m \geq 1.$$

Пусть $\mu_i = 0$ для некоторых $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Обозначим количество таких μ_i через p. Так как операторы D_μ^α и D_ν^β при $\alpha, \beta \in (0,1)$ и $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$ коммутируют, можно считать, что они пронумерованы в порядке возрастания, т. е. $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_p = 0$, и пусть

$$\gamma_{k,\mu-p} = (k+\mu_{p+1})^{\alpha_{p+1}}(k+\mu_{p+2})^{\alpha_{p+2}}\cdot\ldots\cdot(k+\mu_m)^{\alpha_m}.$$

Очевидно, что если $p = 0$, то $\gamma_{k,m-p} = \gamma_{k,m}$.

Следствие 1. *Пусть $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, и $H_k(x)$ — однородный гармонический полином степени $k \in N_0$. Тогда справедливы равенства*

(1) $J_{\bar{\mu}_{m-p}}^{\bar{\alpha}_{m-p}}[H_0](x) = \gamma_{0,m-p}^{-1} H_0(x)$, где $0 < p < m$, $\bar{\alpha}_{m-p} = (\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_m)$, $\bar{\mu}_{m-p} = (\mu_{p+1}, \ldots, \mu_m)$;

(2) $J_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[H_k](x) = \gamma_{k,m}^{-1} H_k(x)$, $k \geq 1$;

(3) $D_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[H_k](x) = \gamma_{k,m} H_k(x)$, $k \in N_0$.

Результат получается последовательным применением леммы 1 с учетом замечания 1.

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $\mu \geq 0$ и $u(x)$ — гармоническая функция. Тогда*

1) если $\mu > 0$, то $J_\mu^\alpha[u](x)$ также является гармонической функцией в области Ω;

2) если $\mu = 0$, то при выполнении условия $u(0) = 0$ функция $J_0^\alpha[u](x)$ гармоническая в области Ω.

Доказательство. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в шаре Ω. Тогда известно [7], что функция $u(x)$ представляется в виде

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x), \tag{5}$$

где $\{H_k^{(i)}(x),\ i = 1, \ldots, h_k\}$ — полная система однородных гармонических полиномов степени $k \in N_0$, а $u_k^{(i)}$ — коэффициенты разложения (5). Известно, что $h_k = (1 + 2k/(n-2))C_{k+n-3}^{n-3} \sim 2k^{n-2}/(n-2)!$, $n \geq 3$, $k \to \infty$.

Более того, ряд (5) сходится абсолютно и равномерно по x при $|x| \leq \rho < 1$, и, значит, $\forall \rho < 1\ \exists C_\rho\ \forall x,\ |x| \leq \rho,\ \left|u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x)\right| \leq C_\rho$.

Формально применяя оператор J_μ^α к функции (5) при $\mu > 0$, получаем

$$J_\mu^\alpha[u](x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} (k+\mu)^{-\alpha} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x). \tag{6}$$

Так как $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{(k+\mu)^{-\alpha}} = 1$, радиусы сходимости рядов (5) и (6) совпадают, поэтому сумма ряда (6) представляет собой гармоническую функцию в области Ω.

Если $\mu = 0$ и $u(0) = 0$, то $J_0^\alpha[u](x)$ определен, тем самым

$$J_0^\alpha[u](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} k^{-\alpha} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x).$$

Так как $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^{-\alpha}} = 1$, функция $J_0^\alpha[u](x)$ определена во всем Ω и представляет собой гармоническую функцию. Теорема 1 доказана.

Следствие 2. *Пусть $\bar\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\bar\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, и $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω. Тогда*

(1) *если $p = 0$, то функция $J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x)$ также гармоническая в области Ω;*

(2) *если $p > 0$, то при $u(0) = 0$ функция $J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x)$ также гармоническая в области Ω.*

Доказательство. Если $p = 0$ (по условию $\mu_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, m$), то, применяя оператор $J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}$ к функции (5), с учетом равенств (1) и (2) из следствия 1 имеем

$$J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m}^{-1} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x).$$

Далее, очевидно, что $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\gamma_{k,m}^{-1}} = 1$, поэтому $J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x)$ — гармоническая функция в области Ω.

Если $p > 0$, то при выполнении условия $u(0) = 0$ из (5) получаем

$$J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m}^{-1} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x).$$

Тогда $J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x)$ также гармоническая в области Ω.

Следствие 2 доказано.

Теорема 2. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $\mu \geq 0$ и $u(x)$ — гармоническая в шаре Ω функция. Тогда функция $D_\mu^\alpha[u](x)$ также гармоническая в шаре Ω и при $\mu = 0$ справедливо $D_0^\alpha[u](0) = 0$.*

Доказательство. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в Ω. Тогда для любого $x \in \Omega$ функция $u(x)$ представляется в виде ряда (5).

Применяя формально оператор D_μ^α к ряду (5) и учитывая лемму (1), получим

$$D_\mu^\alpha[u](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} (k+\mu)^\alpha u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x). \tag{7}$$

Так как $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{h_k (k+\mu)^\alpha} = 1$, при $|x| \leq r\rho$ и $r < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} (k+\mu)^\alpha \big|u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x)\big| \leq C_\rho \sum_{k=0}^{\infty} (k+\mu)^\alpha h_k r^k < \infty,$$

значит, ряд (7) сходится абсолютно и равномерно по x при $|x| \leq r\rho < 1$, и его сумма представляет собой гармоническую функцию. В силу произвольности

$\rho < 1$ функция $D_\mu^\alpha[u](x)$ определена во всем шаре Ω. Далее, поскольку $D_0^\alpha[1] = 0$, в разложении функции $D_0^\alpha[u](x)$ в ряд в виде (5) отсутствует свободный член и поэтому $D_0^\alpha[u](0) = 0$.

Теорема 2 доказана.

Следствие 3. *Пусть $\bar\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\bar\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, и $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω. Тогда функция $D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x)$ также гармоническая в Ω, причем если $p > 0$, то $D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](0) = 0$.*

Доказательство. Гармоничность функции $D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x)$ доказывается так же, как и для функции из теоремы 1. Если $p > 0$, то $D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[H_0](x) = 0$, поэтому в представлении гармонической функции $D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x)$ в виде ряда (5) отсутствует свободный член. Следовательно, $D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](0) = 0$.

Теорема 3. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $\mu \geq 0$ и $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω. Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливы равенства*

$$u(x) = u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{-1} D_0^\alpha[u](sx)\, ds \quad \text{при } \mu = 0;$$

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} D_\mu^\alpha[u](sx)\, ds \quad \text{при } \mu > 0.$$

Доказательство. Пусть $\mu = 0$. Представим гармоническую функцию $u(x)$ в виде ряда

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{1}{k^\alpha} k^\alpha u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) + \sum_{i=1}^{h_0} u_0^{(i)} H_0^{(i)}(x).$$

Так как $h_0 = 1$, $u_0^{(i)} H_0^{(i)}(x) = u(0)$ и

$$\frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{k-1}\, ds, \quad k \in \mathbb{N},$$

то

$$\begin{aligned}
u(x) &= u(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} k^\alpha u_k^{(i)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{-1} H_k^{(i)}(sx)\, ds \\
&= u(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{-1} k^\alpha H_k^{(i)}(sx)\, ds \\
&= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} D_0^\alpha\big[H_k^{(i)}\big](sx)\, ds \\
&= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{-1} D_0^\alpha\left[\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(sx)\right] ds
\end{aligned}$$

$$= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{-1} D_0^\alpha \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(sx) \right] ds$$

$$= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{-1} D_0^\alpha [u](sx)\, ds.$$

Таким образом, первое равенство доказано.

Пусть $\mu > 0$. Тогда

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,1} \frac{1}{\gamma_{k,1}} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,1} u_k^{(i)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} H_k^{(i)}(sx)\, ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} \gamma_{k,1} H_k^{(i)}(sx) \right] ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} D_\mu^\alpha \big[H_k^{(i)}\big](sx) \right] ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} D_\mu^\alpha \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} \big[H_k^{(i)}\big](sx) \right] ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} D_\mu^\alpha [u](sx)\, ds.$$

Второе равенство и, следовательно, теорема 3 доказаны.

Теорема 4. *Пусть* $\bar\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\bar\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, *и* $u(x)$ *— гармоническая функция в области* Ω. *Тогда*

(1) *если* $p = 0$, *то*

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\bar\alpha)} \int_0^1 ds_1 \cdots \int_0^1 |\ln s|^{\bar\alpha-1} s^{\bar\mu-1} D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](sx)\, ds_m;$$

(2) *если* $p > 0$, *то*

$$u(x) = u(0) + \frac{1}{\Gamma(\bar\alpha)} \int_0^1 ds_1 \cdots \int_0^1 |\ln s|^{\bar\alpha-1} s^{\bar\mu-1} D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](sx)\, ds_m,$$

где

$$\Gamma(\bar\alpha) = \Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\alpha_m),$$

$$|\ln s|^{\bar\alpha-1} = |\ln s|^{\alpha_1-1} |\ln s|^{\alpha_2-1} \cdot \ldots \cdot |\ln s|^{\alpha_m-1},$$

$$s^{\bar\mu-1} = s^{\mu_1-1} s^{\mu_2-1} \cdot \ldots \cdot s^{\mu_m-1}, \quad sx = (s_1 s_2 \cdot \ldots \cdot s_m x_1, \dots, s_1 s_2 \cdot \ldots \cdot s_m x_n).$$

Доказательство. Пусть $p = 0$. Тогда по условию $\mu_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Учитывая (5), представим гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$ в виде

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{1}{\gamma_{k,m}} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x).$$

Используя следствие 1 и равномерную сходимость ряда по x при $|x| \le \rho < 1$ (поэтому для этих $x \in \Omega$ суммирование по x и интегрирование по $s_1, s_2, \ldots, s_m$ можно поменять местами), его можно привести к виду

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{1}{\gamma_{k,m}} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{u_k^{(i)}}{\Gamma(\alpha_1) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 |\ln s|^{\bar\alpha - 1} s^{\bar\mu - 1} \gamma_{k,m} H_k^{(i)}(sx)\, ds_m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{u_k^{(i)}}{\Gamma(\alpha_1) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 |\ln s|^{\bar\alpha - 1} s^{\bar\mu - 1} D_{\bar\mu}^{\bar\alpha} \big[H_k^{(i)}\big](sx)\, ds_m \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 |\ln s|^{\bar\alpha - 1} s^{\bar\mu - 1} D_{\bar\mu}^{\bar\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}\right](sx)\, ds_m \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 |\ln s|^{\bar\alpha - 1} s^{\bar\mu - 1} D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](sx)\, ds_m, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Случай $p > 0$ доказывается аналогично.

Теорема 5. *Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в шаре Ω. Тогда справедливы равенства*

$$J_0^\alpha \big[D_0^\alpha[u]\big](x) = u(x) - u(0), \quad \textit{если } \mu = 0;$$

$$D_0^\alpha \big[J_0^\alpha[u]\big](x) = u(x), \quad \textit{если } \mu = 0 \textit{ и } u(0) = 0;$$

$$J_\mu^\alpha \big[D_\mu^\alpha[u]\big](x) = D_\mu^\alpha \big[J_\mu^\alpha[u]\big](x) = u(x), \quad \textit{если } \mu > 0.$$

Доказательство. Докажем первое равенство теоремы. Так как $D_0^\alpha[u](0) = 0$, к функции $D_0^\alpha[u](x)$ можно применить оператор J_0^α, поэтому

$$J_0^\alpha \big[D_0^\alpha[u]\big](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{-1} |\ln s|^{\alpha - 1} D_0^\alpha[u](sx)\, ds.$$

Учитывая теорему 3, получаем

$$J_0^\alpha \big[D_0^\alpha[u]\big](x) = u(x) - u(0).$$

Для доказательства второго равенства применим оператор D_0^α к функции $J_0^\alpha[u](x)$:

$$D_0^\alpha\big[J_0^\alpha[u]\big](x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln s|^{-(\alpha+1)}s^{-1}\big[J_0^\alpha[u](x) - J_0^\alpha[u](sx)\big]\,ds$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln s|^{-(\alpha+1)}s^{-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln\tau|^{\alpha-1}\tau^{-1}[u(\tau x) - u(\tau s x)]\,d\tau ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln\tau|^{\alpha-1}\tau^{-1}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln s|^{-(\alpha+1)}s^{-1}[u(\tau x) - u(s\tau x)]\,ds d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln\tau|^{\alpha-1}\tau^{-1}D_0^\alpha[u](\tau x)\,d\tau = u(x) - u(0) = u(x).$$

Докажем третье равенство. Применяя к функции $D_\mu^\alpha[u](x)$ оператор J_μ^α, имеем

$$J_\mu^\alpha\big[D_\mu^\alpha[u]\big](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln s|^{\alpha-1}s^{\mu-1}D_\mu^\alpha[u](sx)\,ds.$$

Учитывая теорему 3, получаем $J_\mu^\alpha\big[D_\mu^\alpha[u]\big](x) = u(x)$.

Для доказательства равенства $D_\mu^\alpha\big[J_\mu^\alpha[u]\big](x) = u(x)$ применим оператор D_μ^α к функции $J_\mu^\alpha[u](x)$:

$$D_\mu^\alpha\big[J_\mu^\alpha[u]\big](x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln s|^{-(\alpha+1)}s^{\mu-1}\big[J_\mu^\alpha[u](x) - J_\mu^\alpha[u](sx)\big]\,ds$$

$$+ \mu^\alpha J_\mu^\alpha[u](x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln s|^{-(\alpha+1)}s^{\mu-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln s|^{\alpha-1}s^{\mu-1}$$

$$\times[u(\tau x) - u(\tau s x)]\,d\tau ds + \mu^\alpha J_\mu^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln\tau|^{\alpha-1}\tau^{\mu-1}$$

$$\times\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln s|^{-(\alpha+1)}s^{\mu-1}[u(\tau x) - u(s\tau x)]\,ds d\tau + \mu^\alpha J_\mu^\alpha[u](x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln\tau|^{\alpha-1}\tau^{\mu-1}\big[D_\mu^\alpha[u](\tau x) - \mu^\alpha u(\tau x)\big]\,d\tau + \mu^\alpha J_\mu^\alpha[u](x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln\tau|^{\alpha-1}\tau^{\mu-1}D_\mu^\alpha[u](\tau x)\,d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln\tau|^{\alpha-1}\tau^{\mu-1}\mu^\alpha u(\tau x)\,d\tau$$

$$+ \mu^\alpha J_\mu^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln\tau|^{\alpha-1}\tau^{\mu-1}D_\mu^\alpha[u](\tau x)\,d\tau - \mu^\alpha J_\mu^\alpha[u](x)$$

$$+ \mu^\alpha J_\mu^\alpha[u](x) = u(x).$$

Теорема 5 доказана.

Используя связь между операторами D^α_μ и J^α_μ, несложно установить следующее утверждение.

Теорема 6. *Если $u(x)$ — гармоническая в шаре Ω функция, то справедливы равенства*

$$J^{\bar\alpha}_{\bar\mu}\big[D^{\bar\alpha}_{\bar\mu}[u]\big](x) = u(x), \quad D^{\bar\alpha}_{\bar\mu}\big[J^{\bar\alpha}_{\bar\mu}[u]\big](x) = u(x), \quad \text{если } p = 0;$$
$$J^{\bar\alpha}_{\bar\mu}\big[D^{\bar\alpha}_{\bar\mu}[u]\big](x) = u(x) - u(0), \quad \text{если } p > 0;$$
$$D^{\bar\alpha}_{\bar\mu}\big[J^{\bar\alpha}_{\bar\mu}[u]\big](x) = u(x), \quad \text{если } p > 0 \text{ и } u(0) = 0.$$

3. Постановка и решение краевых задач

Перейдем к постановке и решению некоторых краевых задач, включающих значения операторов $D^{\bar\alpha}_{\bar\mu}$ на границе.

Задача 1. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Найти гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, для которой функция $D^\alpha_0[u](x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет на сфере $\partial\Omega$ равенству*

$$D^\alpha_0[u](x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Задача 2. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $\mu > 0$. Найти гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, для которой функция $D^\alpha_\mu[u](x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет на сфере $\partial\Omega$ равенству*

$$D^\alpha_\mu[u](x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Задача 3. *Пусть $\bar\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\bar\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$. Найти гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, для которой функция $D^{\bar\alpha}_{\bar\mu}[u](x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет на сфере $\partial\Omega$ равенству*

$$D^{\bar\alpha}_{\bar\mu}[u](x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Заметим, что аналогичные задачи для уравнения Лапласа с операторами целого порядка рассматривались в [2–5], а для операторов дробного порядка в смысле Римана — Лиувилля и Капуто — в [6, 8, 9] и для операторов дробного порядка в смысле Адамара — Маршо в случае $\mu = 0$ — в [10]. Кроме того, аналогичные задачи с граничными интегродифференциальными операторами для уравнений параболического и гиперболического типов изучались в [11–13].

Пусть $\nu(x)$ — классическое решение задачи Дирихле в шаре Ω, т. е.

$$\Delta\nu(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad \nu(x) = f(x),\ x \in \partial\Omega. \tag{8}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 7. *Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда для разрешимости задачи 1 необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(x)\, ds_x = 0. \tag{9}$$

Если решение задачи 1 существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(x) = C + J^\alpha_0[\nu](x), \tag{10}$$

где C — произвольная постоянная, а $\nu(x)$ — решение задачи (8).

Теорема 8. *Пусть $\mu > 0$ и $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи 2 существует, единственно и представляется в виде*

$$u(x) = J_\mu^\alpha[\nu](x),$$

где $\nu(x)$ — решение задачи Дирихле (8).

Теорема 9. *Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда*

1) *если $p = 0$, то решение задачи 3 существует, единственно и представляется в виде*

$$u(x) = J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[\nu](x); \tag{11}$$

2) *если $p > 0$, то решение задачи 3 существует тогда и только тогда, когда выполняется условие (9); если решение задачи 1 существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде*

$$u(x) = C + J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[\nu](x), \tag{12}$$

где C — произвольная постоянная, а $\nu(x)$ — решение задачи (8).

Из утверждений теорем 7–9 следует, что задачи 1 и 3 обобщают задачу Неймана, а задача 2 — задачу Дирихле.

В силу идентичности рассуждений приведем доказательство теоремы 9.

Доказательство теоремы 9. 1. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$, $p = 0$, и пусть решение $u(x)$ задачи 3 существует. Применим к функции $u(x)$ оператор $D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}$ и обозначим $D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x) = \nu(x)$. Ясно, что $\nu(x) \in C(\partial\Omega)$. Поскольку $u(x)$ — гармоническая функция в Ω, в силу следствия 2 функция $\nu(x)$ также гармоническая в шаре Ω и $\nu(x)|_{\partial\Omega} = D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x)|_{\partial\Omega} = f(x)$. Таким образом, функция $\nu(x)$ является решением задачи Дирихле (8). При этом если $f(x) \in C(\partial\Omega)$, то решение этой задачи существует, единственно и $\nu(x) \in C(\overline{\Omega})$. Применяя к равенству $D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x) = \nu(x)$ оператор $J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}$ и используя теорему 6, имеем

$$J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[\nu](x) = J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}\left[D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u]\right](x) = u(x).$$

Значит, $u(x) = J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[\nu](x)$, и получаем (11).

Пусть теперь функция $\nu(x)$ является решением задачи Дирихле (8) при $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Ясно, что $\nu(x) \in C(\overline{\Omega})$. Рассмотрим функцию $u(x) = J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[\nu](x)$. В силу теоремы 6 имеем

$$D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x) = D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}\left[J_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[\nu]\right](x) = \nu(x).$$

Следовательно, функция $u(x)$ гармоническая в Ω, и

$$D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x)|_{\partial\Omega} = \nu(x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

2. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$, $p > 0$, и пусть решение задачи 3 существует и равно $u(x)$. Применим к функции $u(x)$ оператор $D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}$ и обозначим $D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](x) = \nu(x)$. Ясно, что $\nu(x) \in C(\partial\Omega)$. Поскольку $u(x)$ — гармоническая функция в Ω, в силу следствия 2 функция $\nu(x)$ тоже гармоническая в шаре Ω, $\nu(0) = D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u](0) = 0$ и $\nu(x)|_{\partial\Omega} = D_{\bar\mu}^{\bar\alpha}[u(x)]|_{\partial\Omega} = f(x)$. Таким образом, функция $\nu(x)$ является решением задачи Дирихле (8). С другой стороны, решение задачи (8) представляется в виде интеграла Пуассона [14]

$$\nu(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n} f(y)\, ds_y,$$

поэтому

$$0 = \nu(0) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial\Omega} f(y)\, ds_y.$$

Получили условие (9). Применяя оператор $J_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}$ к равенству $D_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[u(x)] = \nu(x)$ и используя теорему 6, имеем

$$J_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[\nu](x) = J_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}\left[D_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[u]\right](x) = u(x) - u(0).$$

Значит, $u(x) = u(0) + J_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[\nu](x)$, и приходим к (12). Необходимость доказана.

Покажем, что условие (9) является также достаточным для существования решение задачи 3. Действительно, если выполняется условие (9) и $\nu(x)$ — решение задачи Дирихле (8), то $\nu(0) = 0$. Покажем, что функция $u(x) = J_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[\nu](x) + C$ является решением задачи 3. Гармоничность этой функции следует из утверждения 2 теоремы 1.

Далее, в силу утверждения 3 теоремы 6

$$D_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[u](x) = D_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}\left[J_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[\nu]\right](x) + D_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[C] = \nu(x).$$

Тогда

$$D_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[u](x)|_{\partial\Omega} = \nu(x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Таким образом, если выполняется условие (9) и $\nu(x)$ — решение задачи (8), то функция (12) является решением задачи 3.

Теорема 9 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Килбас А. А., Титюра А. А.* Дробная производная типа Маршо — Адамара и обращение дробных интегралов // Докл. НАН Беларуси. 2006. Т. 50, № 4. С. 5–10.
2. *Баврин И. И.* Операторы для гармонических функций и их приложения // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 9–15.
3. *Баврин И. И.* Интегро-дифференциальные операторы для гармонических функций в выпуклых областях и их приложения // Дифференц. уравнения. 1988. V. 24, № 9. С. 1629–1631.
4. *Бицадзе А. В.* К задаче Неймана для гармонических функций // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 1. С. 11–13.
5. *Карачик В. В., Турметов Б. Х.* Об одной задаче для гармонического уравнения // Изв. АН Уз ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1990. Т. 1. С. 17–21.
6. *Карачик В. В., Турметов Б. Х., Торебек Б. Т.* О некоторых интегродифференциальных операторах в классе гармонических функций и их применении // Мат. тр. 2011. Т. 14, № 1. С. 99–125.
7. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1988.
8. *Турметов Б. Х.* Об одной краевой задаче для гармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 8. С. 1089–1092.
9. *Турметов Б. Х.* О гладкости решения одной краевой задачи с граничным оператором дробного порядка // Мат. тр. 2004. Т. 7, № 1. С. 189–199.
10. *Турметов Б. Х., Ильясова М. Т.* Об одной краевой задаче для уравнения Пуассона с граничным оператором дробного порядка в смысле Адамара — Маршо // Вестн. ЕНУ им. Гумилева. Астана. Сер. естественно-технических наук. 2009. Т. 71, № 4. С. 6–15.
11. *Кожанов А. И.* Краевая задача с интегродифференциальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2009. Т. 16, № 2. С. 51–65.
12. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений // Докл. РАН. 2005. Т. 404, № 5. С. 589–592.

13. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
14. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.

Статья поступила 26 марта 2011 г.

Бердышев Абдумаувлен Сулейманович
Казахский национальный педагогический университет им. Абая,
ул. Толе-би, 86, Алматы 050000, Казахстан
berdyshev@mail.ru

Турметов Батирхан Худайбергенович
Международный Казахско-Турецкий университет им. А. Ясави,
ул. Б. Саттарханова, 29, Туркестан 162200, Казахстан
turmetovbh@mail.ru

Кадиркулов Бахтиер Жалилович
Ташкентский гос. Институт востоковедения,
ул. Шахрисабзская, 25, Ташкент 100047, Узбекистан
k_bahtiyor_j@mail.ru