Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 517.53

КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ ТЁПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ В ПОЛИКРУГЕ ФУНКЦИЙ

Ф. А. Шамоян

Аннотация. Получено полное описание суммируемых на торе функций h, имеющих плюригармоническое продолжение в единичный поликруг, для которых тёплицев оператор с символом h является ограниченным оператором в весовых соболевских пространствах голоморфных в поликруге функций.

Ключевые слова: единичный тор, голоморфная функция, пространство Соболева, оператор Тёплица, гармоническая функция.

Введение

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\mathbf{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг на $\mathbb{C}$, $\mathbf{T} = \partial\mathbf{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — его граница. Обозначим через $H(\mathbf{U})$ множество всех голоморфных в $\mathbf{U}$ функций, $H^p \equiv H^p(\mathbf{U})$ $(0 < p \leq +\infty)$ — класс Харди в единичном круге $\mathbf{U}$.

Известно следующее мультипликативное представление класса Харди H^p: $f \in H^p(\mathbf{U})$ тогда и только тогда, когда f допускает факторизацию:

$$f(z) = Cz^m \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \exp\left[-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\mu(\theta)\right] \times \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \ln|f(e^{i\theta})|\, d\theta\right], \quad z \in \mathbf{U}, \tag{1}$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — произвольная последовательность из единичного круга $\mathbf{U}$, удовлетворяющая условию Бляшке, $d\mu$ — неотрицательная сингулярная мера на $(-\pi, \pi]$, $m \in \mathbf{Z}_+$, $|C| = 1$.

Функция

$$I_f = z^m \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \exp\left[-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\mu(\theta)\right]$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–97517р центр-а).

называется *внутренней частью функции* f, а

$$Q_f = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta\right]$$

— *внешней частью* f.

Говорят, что внутренняя функция I_1 *делит внутреннюю функцию* I_2, если $\frac{I_2}{I_1} \in H^\infty$.

Одно из основных свойств факторизации (1) заключается в том, что если $f \in H^p(\mathbf{U})$ и I делит внутреннюю часть f, то $\frac{f}{I} \in H^p$.

Отметим важную особенность: указанным свойством обладают не только функции из класса $H^p(\mathbf{U})$, но и гораздо более узкие классы функций. Нетривиальный результат такого рода был впервые получен Карлесоном (см. [1]), который доказал, что данным свойством обладает класс $\mathbf{D}$ голоморфных функций с конечным интегралом Дирихле.

Следующим шагом в этом направлении являлся результат Б. И. Коренблюма (см. [2]), показавшего справедливость аналогичного утверждения для класса голоморфных в $\mathbf{U}$ функций, n-я производная которых принадлежит классу Харди H^2: $H^2_n = \{f : f^{(n)} \in H^2\}$.

В указанных работах обоих авторов существенно используется гильбертовость рассматриваемых пространств. Как в [1], так и в [2] фактически устанавливается, что если X совпадает с одним из указанных пространств и $f \in X$, $f(a) = 0$, $b_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}\frac{\bar{a}}{|a|}$, $a \in U$, то $\frac{f}{b_a} \in X$, $\|f/b_a\| \le \|f\|_X$. Это установлено в [1] в случае, когда $X = D$ — класс Дирихле, и в [2] — в случае $X = H^2_n$. На этой основе доказывается делимость аналитических функций в отмеченных пространствах. Поэтому в [3] Б. И. Коренблюмом поставлена задача: обладают ли вышеуказанным свойством другие классы функций, в частности класс голоморфных в $\mathbf{U}$ функций, принадлежащих гёльдеровскому классу в замкнутом единичном круге, т. е. классу Λ^a_α, $0 < \alpha < 1$?

Дальнейшие достижения в этом направлении принадлежат Ленинградской математической школе. В работах В. П. Хавина [4] и Ф. А. Шамояна [5] независимо установлено, что не только классы Λ^a_α, но и многие другие классы голоморфных в круге функций, гладких вплоть до его границы, обладают свойством деления на внутреннюю функцию. В данных работах предложен простой метод, основанный на элементарных свойствах интеграла типа Коши (по сути, на свойствах тёплицевых операторов), позволяющих доказать результаты вышеуказанного типа для большинства классов голоморфных в круге функций, гладких вплоть до его границы.

Например, в [5], в частности, установлено: если ω — функция типа модуля непрерывности, удовлетворяющая условию Бари — Стечкина, и $\Lambda^{(n)}_\omega$ — класс голоморфных в единичном круге функций, n-я производная которых в замкнутом круге имеет модуль непрерывности $\omega(f,\delta)$, удовлетворяющий условию $\omega(f,\delta) \le c_f\omega(\delta)$, то этому же условию удовлетворяет модуль непрерывности интеграла типа Коши

$$T_h(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{T}} \frac{f(\zeta)\overline{h(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad z \in \mathbf{U},$$

при всех $h \in H^\infty$. В этой работе используется единственное условие

$$\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\overline{J(\zeta)}}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = 0 \qquad (2)$$

на внутреннюю функцию J и устанавливается ограниченность оператора $T_{\bar{J}}$ в классах $\Lambda_\omega^{(n)}$, где ω — произвольный модуль непрерывности вышеуказанного типа. Разумеется, каждая функция $h \in H^\infty$ удовлетворяет условию (2), поэтому там установлена ограниченность тёплицевого оператора $T_{\bar{h}}$ в рассмотренных пространствах для произвольной функции $h \in H^\infty$.

В работах автора в дальнейшем для серии пространств дано полное описание таких $h \in L^1(\mathbf{T})$, для которых оператор T_h оставляет инвариантными соответствующие классы голоморфных в круге функций, гладких вплоть до его границы.

Другие подходы к вопросам деления предложены в работах С. А. Виноградова и Н. А. Широкова (см. [6, 7]), К. М. Дьяконова (см. [8]). Обзор этих и других результатов приведен в монографиях [7, 9].

В работах автора [10, 11] ограниченность тёплицевых операторов в пространстве $A^p_\alpha(n)$ в единичном круге (определение класса $A^p_\alpha(n)$ приводится ниже) при $p = 1$ сводится к доказательству ограниченности сопряженного оператора в пространстве Зигмунда. Как установлено в этих работах, ограниченность оператора T_h эквивалентна ограниченности оператора типа Вольтерра

$$B_h(f)(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^z (z-t)^{n-1} h(t) f^{(n)}(t)\, dt, \quad z \in \mathbf{U},$$

в пространстве Λ^a_*, т. е. в пространстве Зигмунда.

Указанное утверждение (см. [10, лемма 7]) в качестве основного результата было переоткрыто в статье [12] спустя почти 35 лет после публикации работы [10]. Отметим также [13, 14], где переоткрыты некоторые результаты из [10, 11] (см. также [15]).

Данная работа посвящена характеризации тех суммируемых на торе T^n функций h, при которых кратный тёплицев оператор T_h является ограниченным оператором в весовых соболевских анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций.

Указанные вопросы, на наш взгляд, интересны и тем, что многие классы гладких функций на торе T^n не оставляют инвариантным кратный интеграл типа Коши. Так, например, гёльдеровский класс любого порядка α $(0 < \alpha < 1)$ на торе T^n не оставляет инвариантным кратный интеграл типа Коши в отличие от $n = 1$ (см., например, [16]).

Для изложения полученных результатов введем следующие стандартные обозначения и определения.

Всюду ниже $\mathbf{U}^n = \mathbf{U} \times \mathbf{U} \times \cdots \times \mathbf{U}$ — единичный поликруг в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{T}^n$ — его остов $(n \ge 1)$. Обозначим через $H(\mathbf{U}^n)$ и $H^p(\mathbf{U}^n)$ $(0 < p \le +\infty)$ множество всех голоморфных функций и класс Харди в $\mathbf{U}^n$ соответственно, $C^\infty_A(U^n) := H(\mathbf{U}^n) \cap C^\infty(\mathbf{U}^n \cup \partial\mathbf{U}^n) = H^1(\mathbf{U}^n) \cap C^\infty(\mathbf{U}^n \cup \mathbf{T}^n)$ и $C_A(\mathbf{U}^n) := H(\mathbf{U}^n) \cup C(\mathbf{U}^n \cap \partial\mathbf{U}^n) = H^1(\mathbf{U}^n) \cap C(\mathbf{U}^n \cup \mathbf{T}^n)$. Последнее равенство установлено в [17], $\mathbf{Z}^n$ — мультииндексы с целыми координатами, $\mathbf{N}^n$ — мультииндексы с натуральными координатами, $\mathbf{N} := \mathbf{N}^1$, $\mathbf{Z}^n_+ := \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^n : \alpha_j \ge 0,\ 1 \le j \le n\}$

Если $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ из $\mathbb{C}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^n$, то $\zeta^\alpha := \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_n^{\alpha_n}$. Через $\langle \zeta, z\rangle$ обозначим обычное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, т. е. $\langle \zeta, z\rangle := \zeta_1 \bar{z}_1 + \zeta_2 \bar{z}_2 + \dots + \zeta_n \bar{z}_n$, при этом $\zeta \cdot z := (\zeta_1 \cdot z_1, \zeta_2 \cdot z_2, \dots, \zeta_n \cdot z_n)$; $\zeta - z := (\zeta_1 - z_1, \dots, \zeta_n - z_n)$, $(\zeta - z) := \prod\limits_{j=1}^{n} (\zeta_j - z_j)$. Норму в пространстве $\mathbb{C}^n$ обозначим через $\|\cdot\|$, т. е. $\|z\| := \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$, если $z = (z_1, \dots, z_n)$, при этом через $|z|$ обозначим вектор $|z| := (|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$, $(1 - |z|^2)^\alpha := (1 - |z_1|^2)^{\alpha_1} \dots (1 - |z_n|^2)^{\alpha_n}$.

Будем считать, что $\alpha > \beta$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$, если $\alpha_j > \beta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Введем также обозначение: $\mathbf{R}^n_+ := \{\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbf{R}^n : \beta_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}\}$. Символом A^p_α, $0 < p < +\infty$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, 2, \dots, n$, обозначим пространство тех функций $f \in H(\mathbf{U}^n)$, для которых

$$\|f\|_{A^p_\alpha} = \left(\int\limits_{\mathbf{U}^n} |f(z)|^p (1 - |z|)^\alpha \, dm_{2n}(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

где $dm_{2n}(z)$ — $2n$-мерная мера Лебега на $\mathbf{U}^n$. Эти пространства введены и изучены в работах [18, 19].

Пусть функция $f \in H(\mathbf{U}^n)$ имеет следующее разложение Тейлора:

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{k_1 \dots k_n = 0}^{+\infty} a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n},$$

$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{U}^n$, Γ — функция Эйлера, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta_j > -1$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\frac{\Gamma(\beta + k + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(k + 1)} = \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\beta_j + k_j + 1)}{\Gamma(\beta_j + 1)\Gamma(k_j + 1)}$. Тогда *дробной производной функции* f *порядка* β назовем функцию

$$D^\beta f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\beta + k + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(k + 1)} a_k z^k.$$

Положим также $Df \stackrel{\text{def}}{=} D^{\mathbf{1}} f$, $f \in H(\mathbf{U}^n)$, $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$. Оператор, обратный к оператору D^β, определяется следующим образом:

$$D^{-\beta} f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(k + 1)}{\Gamma(\beta + k + 1)} a_k z^k.$$

Нетрудно заметить справедливость равенства

$$D^{-\beta} f(z) = (\beta) \int\limits_{\mathbf{Q}_n} (1 - t)^{\beta - 1} f(t \cdot z) \, dt,$$

где $\mathbf{Q}_n = \{t = (t_1, \dots, t_n), 0 < t_j < 1, j = 1, 2, \dots, n\}$ — единичный куб в $\mathbf{R}^n$,

$$(\beta) = \prod_{j=1}^{n} \beta_j, \quad (1 - t) = \prod_{j=1}^{n} (1 - t_j), \quad t_j \in \mathbf{Q}_1.$$

В дальнейшем для двух вещественнозначных функций с общей областью определения запись $f \lesssim g$ будет означать, что существует положительное число c, не зависящее от z, такое, что $f(z) \leq c g(z)$ на соответствующем множестве. Будем считать, что $f \approx g$, если одновременно $f \lesssim g$, $g \lesssim f$.

Определим класс Λ^p_α (см. [20]) следующим образом:

$$\Lambda^p_\alpha = \left\{ f \in H(\mathbf{U}^n) : |D^{\beta+1} f(z)| \lesssim \frac{1}{(1-|z|)^{\beta+2-\frac{\alpha+2}{p}}},\ z \in \mathbf{U}^n,\ \beta > \frac{\alpha+2}{p} \right\}$$

с естественной нормой

$$\|f\|_{\Lambda^p_\alpha} = \sup_{z\in\mathbf{U}^n} \{|D^{\beta+1} f(z)| \cdot (1-|z|)^{\beta+2-\frac{\alpha+2}{p}}\}.$$

§ 1. Формулировка основного результата статьи и доказательство вспомогательных утверждений

В дальнейшем через $\mathbf{RP}$ обозначим множество всех суммируемых функций на $\mathbf{T}^n$, имеющих плюригармоническое продолжение в поликруг $\mathbf{U}^n$ (см. [17]). Нетрудно заметить, что класс $\mathbf{RP}$ совпадает с классом суммируемых функций на $\mathbf{T}^n$, для которых коэффициенты Фурье равны нулю вне множества $\mathbf{Z}^n_+ \cup \mathbf{Z}^n_-$.

Пусть $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n_+$. Введем в рассмотрение пространство

$$A^p_\alpha(k) = \left\{ f \in H(\mathbf{U}^n) : \|f\|_{A^p_\alpha(k)} = \left(\int\limits_{\mathbf{U}^n} |D^k f(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, dm_{2n}(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Кратным тёплицевым оператором или *оператором Тёплица* назовем интегральный оператор вида

$$T_h(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} \frac{f(\zeta) h(\zeta)}{(\zeta - z)} \, d\zeta, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{U}^n,$$

где $h \in L^1(\mathbf{T}^n)$, $f \in C^\infty_A(\mathbf{U}^n)$.

В работе полностью охарактеризованы такие h, при которых T_h имеет непрерывное продолжение на все пространство $A^p_\alpha(k)$ при условии, что $k \in \mathbf{N}^n$.

В дальнейшем нам потребуется понятие мультипликатора. Пусть $\mathbf{X}$ — некоторое подпространство пространства $H(\mathbf{U}^n)$. Будем говорить, что h — *мультипликатор класса* $\mathbf{X}$, если для произвольного $f \in \mathbf{X}$ следует, что $h \cdot f \in \mathbf{X}$.

Основным результатом статьи является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Пусть* $0 < p \le 1$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n$, $h \in \mathbf{RP}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$, $\alpha > -1$, *т. е.* $\alpha_j > -1$, $j = \overline{1,n}$. *Тогда*

1. *Если* $(k+1)p < \alpha + 2$, *т. е.* $(k_j+1)p < \alpha_j + 2$, $1 \le j \le n$, *то следующие утверждения равносильны:*

(a) T_h *является ограниченным оператором в пространстве* $A^p_\alpha(k)$;

(b) *функция* h *представима в виде*

$$h = h_1 + \bar{h}_2, \tag{3}$$

где h_1 — *мультипликатор пространства* $A^p_\alpha(k)$, *т. е.* $h_1 \cdot A^p_\alpha(k) \subset A^p_\alpha(k)$, *а* $D^{-k} h_2 \in \Lambda^p_\alpha$.

2. *Пусть* $(k+1)p = \alpha + 2$, $h \in H^1(U^n)$, *тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) T_h *является ограниченным оператором в пространстве* $A^p_\alpha(k)$;

(b) *функция* h *принадлежит* $H^\infty(U^n)$, *причем*

$$|Dh(z)| \lesssim \frac{1}{(1-|z|)\big(\ln\frac{1}{1-|z|}\big)^{\frac{1}{p}}}, \quad z \in \mathbf{U}^n. \tag{4}$$

3. *Пусть* $kp > \alpha + 2$, *тогда следующие утверждения равносильны:*
(a) T_h *является ограниченным оператором в пространстве* $A^p_\alpha(k)$;
(b) *функция* h *представима в виде*

$$h = h_1 + \bar{h}_2,$$

где $h_1 \in A^p_\alpha(k)$, $h_2 \in H^\infty(\mathbf{U}^n)$.

Замечание 1. Утверждение теоремы для случая $1 < p < +\infty$ в терминах других классов функций без доказательства анонсировано в [21].

Замечание 2. Если $h \in H^1(U^n)$, то все утверждения в основной теореме можно сформулировать в терминах функции h для теплицевых операторов с ядром Бергмана $K(z,\zeta) = \frac{1}{(1-\bar{\zeta}\cdot z)^2}$, $\zeta, z \in \mathbf{U}^n$, по объему поликруга $\mathbf{U}^n$, т. е.

$$\widetilde{T}_h(f)(z) = \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{f(\zeta)\overline{h(\zeta)}}{(1-\bar{\zeta}\cdot z)^2}\, dm_{2n}(\zeta), \quad z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbf{U}^n,$$

если учесть следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $f \in H^1(U^n)$, $Df \in L^1(dm_{2n})$, $h \in H^\infty(U^n)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} \frac{f(\zeta)\overline{h(\zeta)}}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = \frac{1}{(\pi i)^n} \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{Df(\zeta)\overline{h(\zeta)}}{(1-\bar{\zeta}\cdot z)^2}\, dm_{2n}(\zeta), \quad z \in \mathbf{U}^n. \tag{5}$$

Доказательство непосредственно вытекает из следующего утверждения, доказанного в работах [22, 23].

Теорема А. *Пусть* $D^k f \in A^1_m$, $m \in \mathbf{N}$, $k = (k_1,\dots,k_n) \in \mathbf{Z}^n_+$, $m+2-k_j > 0$. *Тогда справедливо представление*

$$f(z) = \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^m D^k f(z) P(\bar{\zeta} z)}{(1-\bar{\zeta}\cdot z)^{m+2-k}}\, dm_{2n}(\zeta), \quad z \in \mathbf{U}^n,$$

где $P(w) = P_1(w_1)\dots P_n(w_n)$, $w = (w_1,\dots,w_n)$, $P_j(z)$ — *многочлены одного комплексного переменного с вещественными коэффициентами, причем степень многочлена* $P_j(z)$ *не превосходит* $m+1-k_j$, $1 \le j \le n$.

Чтобы получить равенство (5), достаточно положить $m = 0$, $k_j = 1$, $j = \overline{1,n}$, и продифференцировать по z.

Следующие утверждения установлены в работах автора (см. [20, 24]).

Теорема Б. *Пусть* $0 < p \le 1$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_j > -1$, $j = \overline{1,n}$, Φ — *линейный непрерывный функционал на* A^p_α, $g(z) = \Phi(e_z)$, $e_z(\zeta) = \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{1-\zeta_j z_j}$, $\zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_n)$, $z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbf{U}^n$. *Тогда при* $\beta_j > \frac{\alpha_j+2}{p} - 1$, $j = 1,\dots,n$, *функция* g *удовлетворяет оценке*

$$|D^{\beta+1} g(z)| \lesssim \frac{1}{(1-|z|)^{\beta+2-\frac{\alpha+2}{p}}},$$

т. е. $g \in \Lambda^p_\alpha$, *причем*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} f(\rho\zeta)\overline{g(\rho\zeta)}\, dm_n(\zeta), \tag{6}$$

$$\|\Phi\| \lesssim \|g\|_{\Lambda^p_\alpha} \lesssim \|\Phi\|. \tag{7}$$

Обратно, каждая функция $g \in \Lambda^p_\alpha$ *по формуле* (6) *порождает линейный непрерывный функционал на пространстве* A^p_α, *для которого справедливы оценки* (7).

Теорема B. *Пусть* $V \in C(U^n)$, *при этом для любого поликруга* $U_\rho(w) = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n : |w_j - z_j| < \rho,\ 1 \le j \le n\} \subset U^n$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in U^n$, *выполняется неравенство*

$$|V(w)| \le \frac{A}{\pi^2 \rho^{2n}} \int\limits_{U_\rho(w)} |V(\zeta)|\, dm_{2n}(\zeta)$$

при некотором положительном числе A. *Тогда при всех* $0 < p \le 1$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{U^n} (1-|z|)^m |V(z)|\, dm_{2n}(z) \lesssim \Big(\int\limits_{U^n} (1-|z|)^{mp+2p-2} |V(z)|^p\, dm_{2n} \Big)^{1/p}.$$

Лемма 2. *Пусть* $0 < p \le 1$, $h \in H^1(\mathbf{U}^n)$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n_+$. *Тогда если оператор* $T_{\bar h}$ *действует в пространстве* $A^p_\alpha(k)$, *то* $h \in H^\infty(\mathbf{U}^n)$, *причем* $\|h\|_\infty \le \|T_{\bar h}\|$.

Доказательство. Сначала заметим, что если $f(z) = f_1(z_1) \dots f_n(z_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{U}^n$, то при $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta_j > -1$, $j = 1, \dots, n$, справедливо равенство

$$D^\beta f(z) = \prod_{j=1}^n D^{\beta_j} f_j(z_j). \tag{8}$$

Кроме того, заметим, что если $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbf{Z}^n_+$, то

$$D^\beta f(z) = \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial z^\beta} (z^\beta f(z)). \tag{9}$$

Положим теперь

$$f_r(z) = \frac{1}{(1-rz)} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{(1-rz_j)}, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n,\ 0 < r < 1.$$

Учитывая равенства (8), (9), нетрудно установить оценки

$$\|f_r\|_{A^p_\alpha(k)} \approx \begin{cases} \frac{1}{(1-r)^{k-\frac{\alpha+2}{p}}}, & \text{если } k > \frac{\alpha+2}{p}, \\ (\ln \frac{1}{1-r})^{\frac{1}{p}}, & \text{если } k = \frac{\alpha+2}{p}, \\ C_0, & \text{если } k < \frac{\alpha+2}{p}. \end{cases} \tag{10}$$

Найдем вид функций $T_{\bar{h}}(f_r)$:

$$T_{\bar{h}}(f_r)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} \frac{f_r \overline{h(\zeta)}}{(\zeta - z)}\, d\zeta = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} \frac{\overline{h(\zeta)}}{(1 - r\zeta)(\zeta - z)}\, d\zeta$$

$$= \overline{\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} \frac{h(\zeta)}{(1 - \bar{z}\cdot\zeta)(\zeta - r)}\, d\zeta} = \overline{\frac{h(r)}{(1 - rz)}}, \qquad (11)$$

т. е. $T_{\bar{h}}(f_r)(z) = \overline{h(r)} f_r(z)$, $z \in \mathbf{U}^n$. Поэтому если $T_{\bar{h}}$ действует в пространстве $A^p_\alpha(k)$, то

$$\|T_h(f_r)\|_{A^p_\alpha(k)} = |h(r)| \|f_r\|_{A^p_\alpha(k)} \le \|T_h\| \|f_r\|_{A^p_\alpha(k)}$$

или $|h(r)| \le \|T_h\|$. Взяв в качестве функции $f_r(z)$ функцию $f_r(ze^{i\theta})$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, получим $\|h\|_\infty \le \|T_h\|$. $\square$

Очевидно, что если $n = 1$, то $\|f^{(k)}\|_{A^p_\alpha} \approx \|f\|_{A^p_\alpha(k)}$. Учитывая это, докажем следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{U}^n$,

$$f_{a,m}(z) = \prod_{j=1}^n \frac{(1 - |a_j|^2)^{m - \frac{\alpha_j + 2}{p}}}{(1 - \bar{a}_j z_j)^{m - k_j}}. \qquad (12)$$

Тогда при всех положительных числах $m > \frac{\alpha_j + 2}{p}$, $1 \le j \le n$, *выполняется оценка* $\|D^k f_{a,m}\|_{A^p_\alpha} \approx 1$.

Доказательство непосредственно следует из равенств (8), (9) и простой оценки

$$\int\limits_{\mathbf{U}} \frac{dm_2(z)}{|1 - az|^\lambda} \approx \begin{cases} \frac{1}{(1-|a|)^{\lambda - 1}}, & \text{если } \lambda > 2, \\ \ln \frac{2}{1 - |a|}, & \text{если } \lambda = 2, \\ 1, & \text{если } \lambda < 2. \end{cases} \quad \square \qquad (13)$$

Замечание 3. Отметим, что если $m = \frac{\alpha_{j_0} + 2}{p}$ при некотором j_0, то утверждение леммы остается справедливым, если в равенстве (12) заменить множитель $(1 - |a_{j_0}|)^{m - \frac{\alpha_{j_0} + 2}{p}}$ на $\left(\ln \frac{1}{1 - |a_{j_0}|}\right)^{-\frac{1}{p}}$.

Следующее утверждение можно вывести из хорошо известных теорем вложения (см. [25, 26]), но ради полноты изложения приведем его простое доказательство.

Лемма 4. *Пусть* $k_j \ge \frac{\alpha_j + 2}{p}$, $j = 1, \dots, n$, $0 < p < +\infty$. *Тогда класс* $A^p_\alpha(k)$ *является алгеброй относительно операции почленного умножения и сложения.*

Доказательство. Пусть $f, g \in A^p_\alpha(k)$. Докажем, что произведение этих функций принадлежит классу $A^p_\alpha(k)$. Применяя формулу Лейбница, достаточно доказать, что $D^l f \cdot D^{k-l} g$ для всех $l = (l_1, \dots, l_n)$, $0 \le l_j \le k_j$, $j = 1, \dots, n$, принадлежит классу $A^p_\alpha(k)$. Используя теорему А, можем записать оценки

$$|D^l f(z)| \lesssim \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1 - |\zeta|^2)^m |D^k f(\zeta)|}{|1 - \bar{\zeta} z|^{m+2-k}}\, dm_{2n}(\zeta),$$

$$|D^{k-l} g(z)| \lesssim \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1 - |\zeta|^2)^m |D^k g(\zeta)|}{|1 - \bar{\zeta} z|^{m+2-k+l}}\, dm_{2n}(\zeta)$$

при достаточно больших $m \in \mathbf{N}$.

Напомним, что

$$\frac{(1-|\zeta|^2)^m}{|1-\bar{\zeta}z|^{m+2-k+l}} = \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-|\zeta_j|^2)^m}{|1-\bar{\zeta}_j z_j|^{m+2-k_j+l_j}}.$$

Учитывая теорему B, легко видеть, что

$$\int\limits_{\mathbf{U}^n} |D^l f(z)^p||D^{k-l} g(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, dm_{2n}(z)$$
$$\lesssim \int\limits_{\mathbf{U}^n} \biggl\{ \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1-|w|)^{p(m+2)-2}}{|1-\bar{w}z|^{p(m+2-k+l)}} \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1-|\zeta|)^{p(m+2)-2}|D^k f(\zeta)|^p}{|1-\bar{\zeta}z|^{p(m+2-l)}} \, dm_{2n}(\zeta)$$
$$\times |D^{k-l} g(w)|^p \, dm_{2n}(w) \biggr\} (1-|z|)^\alpha \, dm_{2n}(z). \quad (14)$$

Положим

$$J(\zeta, w) = \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1-|z|)^\alpha \, dm_{2n}(z)}{|1-\bar{w}z|^{p(m+2-k+l)} |1-\bar{\zeta}z|^{p(m+2-l)}}.$$

Для доказательства леммы достаточно установить оценку

$$J(\zeta, w) \lesssim \frac{1}{(1-|w|)^{p(m+2)-\alpha-2}(1-|\zeta|)^{p(m+2)-\alpha-2}}. \quad (15)$$

Поскольку переменные интегрирования разделены, можно предположить, что $n = 1$.

Итак, пусть

$$J(\zeta, w) = \int\limits_{\mathbf{U}} \frac{(1-|z|)^\alpha}{|1-\bar{w}z|^{p(m+2-k+l)} |1-\bar{\zeta}z|^{p(m+2-l)}} \, dm_{2n}(z),$$

где $\mathbf{U} = \mathbf{U}^1$, $\zeta, w \in \mathbf{U}$. Переходя к полярной системе координат, получим

$$J(\zeta, w) = \int_0^1 (1-r)^\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{|1-r\rho e^{it}|^{p(m+2-l)} |1-rse^{i(t+\theta-\tau)}|^{p(m+2-k+l)}} r \, dr,$$

где $w = \rho e^{i\theta}$, $\zeta = se^{i\tau}$.

Не ограничивая общности, будем предполагать, что $0 \le s \le \rho < 1$. Тогда учитывая первую оценку в (13), имеем

$$J \lesssim \frac{1}{(1-\rho)^{p(m+2-l)-2-\alpha}(1-s)^{p(m+2-k+l)}},$$

или

$$J \lesssim \frac{(1-\rho)^{pl}}{(1-\rho)^{p(m+2)-\alpha-2}(1-s)^{p(m+2)-\alpha-2}(1-s)^{p(l-k)+\alpha+2}}.$$

Чтобы доказать оценку (15), достаточно установить, что $\frac{(1-\rho)^{pl}}{(1-s)^{p(l-k)+\alpha+2}} \lesssim 1$. Это неравенство следует из соотношений

$$0 \le s \le \rho < 1, \quad pl - p(l-k) - \alpha - 2 = pk - \alpha - 2 \ge 0, \quad \text{или } k \ge \frac{\alpha+2}{p}.$$

По условию леммы последнее неравенство выполняется. $\square$

Замечание 4. Очевидно, если неравенство $k_j \ge \frac{\alpha_j+2}{p}$, $j = 1, \dots, n$, нарушается при некотором $j = j_0$, то утверждение леммы перестанет быть верным.

Лемма 5. *Пусть* $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}_+^n$, $p(k+1) < \alpha + 2$. *Тогда если* $\psi \in H(\mathbf{U}^n)$ *такая, что* $D^{-k}\psi \in \Lambda_\alpha^p$, $0 < p \le 1$, *то* $\psi \in H^\infty(\mathbf{U}^n)$, *т. е.* $D^k(\Lambda_\alpha^p) \subset H^\infty(\mathbf{U}^n)$.

Доказательство. Положим $g(z) := D^{-k}\psi(z)$, $z \in \mathbf{U}^n$. Тогда из условия леммы и определения класса Λ_α^p имеем

$$|D^{m+1}g(z)| \lesssim \frac{1}{(1-|z|)^{m+2-\frac{\alpha+2}{p}}}, \tag{16}$$

если $m \in N$, $m > \frac{\alpha_j+2}{p}$, $j = \overline{1,n}$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{U}^n$.

Пусть $s > m+2$, $s \in N$. Используя теорему А, получаем

$$g(z) = \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^s P(\bar\zeta, z) D^{m+1} g(z)\, dm_{2n}(\zeta)}{(1-\bar\zeta \cdot z)^{s+1-m}}. \tag{17}$$

Заметим, что $D^k D^{-k}\psi = \psi$. Поэтому

$$\begin{aligned}\psi(z) &= D_z^k \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^s P(\bar\zeta, z) D^{m+1} g(\zeta)\, dm_{2n}(\zeta)}{(1-\bar\zeta \cdot z)^{s+k+1-m}} \\ &= \int\limits_{\mathbf{U}^n} (1-|\zeta|^2)^s D^{m+1} g(\zeta) D_z^k\left(\frac{P(\bar\zeta, z)}{(1-\bar\zeta\cdot z)^{s+1-m}}\right) dm_{2n}(\zeta), \quad z \in \mathbf{U}^n, \end{aligned} \tag{18}$$

где через D_z^k обозначен оператор D^k по переменной z.

Нетрудно увидеть, что

$$D_z^k\left(\frac{P(\bar\zeta, z)}{(1-\bar\zeta\cdot z)^{s+1-m}}\right) = \frac{\widetilde{P}(\bar\zeta, z)}{(1-\bar\zeta\cdot z)^{s+k+1-m}}, \quad z, \zeta \in \mathbf{U}^n,$$

$\widetilde{P}(\bar\zeta, z)$ — некоторый многочлен $2n$ комплексных переменных ζ, z. Следовательно,

$$\psi(z) = \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^s P(\bar\zeta, z) D^{m+1} g(\zeta)\, dm_{2n}(\zeta)}{(1-\bar\zeta \cdot z)^{s+k+1-m}}.$$

Используя оценку (16), получим

$$|\psi(z)| \lesssim \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^{s-2+\frac{\alpha+2}{p}-m}\, dm_{2n}(\zeta)}{|(1-\bar\zeta\cdot z)|^{s+k+1-m}} \lesssim \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{dm_{2n}(\zeta)}{|1-\bar\zeta\cdot z|^{k+3-\frac{\alpha+2}{p}}}.$$

В последней оценке воспользовались неравенством

$$\frac{1-|\zeta|^2}{|(1-\bar\zeta\cdot z)|} = \frac{(1-|\zeta_1|^2)\cdot\ldots\cdot(1-|\zeta_n|^2)}{|(1-\bar\zeta_1\cdot z_1)|\cdot\ldots\cdot|(1-\bar\zeta_n\cdot z_n)|} \le 2^n,$$

$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{U}^n$. Учитывая условие леммы и оценку (13), приходим к неравенству $|\psi(z)| \lesssim 1$, $z \in \mathbf{U}^n$. $\square$

§ 2. Доказательство теоремы

Докажем п. 1 теоремы: (a)⇒(b). Пусть T_h действует в пространстве $A^p_\alpha(k)$, $(k+1)p < \alpha + 2$. Покажем, что функцию h можно представить в виде $h_1 + \bar{h}_2$, где $D^{-k} h_2 \in \Lambda^p_\alpha$, h_1 — мультипликатор пространства $A^p_\alpha(k)$. Поскольку T_h действует в пространстве $A^p_\alpha(k)$, то

$$\|T_h(f)\|_{A^p_\alpha(k)} \le \|T_h\| \|f\|_{A^p_\alpha(k)} \quad \forall f \in A^p_\alpha(k).$$

Учитывая, что оператор $S_{z_0}(f) = f(z_0)$, $z_0 \in \mathbf{U}^n$, т. е. значение в фиксированной точке z_0 является ограниченным оператором в $A^p_\alpha(k)$, легко заметить, что $\Phi(f) = T_h(f)(0)$ — линейный непрерывный функционал на $A^p_\alpha(k)$. Поэтому, используя теорему Б, можно найти такую функцию $g \in H(\mathbf{U}^n)$, $D^{-k} g \in \Lambda^p_\alpha$, что

$$T_h(f)(0) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} f(\rho\zeta)\overline{g(\rho\zeta)}\, dm_n(\zeta)$$

$$= \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} D^k f(\rho\zeta)\overline{D^{-k} g(\rho\zeta)}\, dm_n(\zeta).$$

Теперь заметим, что

$$T_h(f)(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} f(\zeta) h(\zeta)\, dm_n(\zeta)$$

для любого $f \in A^p_\alpha(k) \cap C_A(\mathbf{U}^n)$. Положим в последнем равенстве $f(\zeta) = \zeta^m$, $\zeta \in \mathbf{U}^n$, $m \in \mathbf{Z}^n_+$, и учтем лемму 5:

$$\int\limits_{\mathbf{T}^n} \zeta^m \overline{g(\zeta)}\, dm_n(\zeta) = \int\limits_{\mathbf{T}^n} \zeta^m h(\zeta)\, dm_n(\zeta)$$

при всех $m \in \mathbf{Z}^n_+$. Следовательно, функция $h(\zeta) - \overline{g(\zeta)}$, $\zeta \in \mathbf{T}^n$, принадлежит классу $H^1(\mathbf{U}^n)$, т. е.

$$h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbf{T}^n,\ h_1 \in H^1(\mathbf{U}^n),\ D^{-k} h_2 \in \Lambda^p_\alpha.$$

Если докажем, что оператор $T_{\bar{h}_2}$ является ограниченным оператором в пространстве $A^p_\alpha(k)$, то, учитывая равенство

$$T_h(f)(z) = h_1(z) f(z) + \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} \frac{f(\zeta)\overline{h_2(\zeta)}}{(\zeta - z)}\, d\zeta \quad \forall z \in \mathbf{U}^n,$$

тем самым докажем, что h_1 является мультипликатором пространства $A^p_\alpha(k)$.

Приступим к доказательству ограниченности оператора $T_{\bar{h}_2}$. Воспользуемся теоремой А, согласно которой если $f \in A^p_\alpha(k)$, то

$$f(z) = \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^m D^k f(\zeta) P(\bar{\zeta}\cdot z)}{(1-\bar{\zeta}\cdot z)^{m+2-k}}\, dm_{2n}(\zeta).$$

Напомним, что можно предположить $f \in C^\infty_A(\mathbf{U}^n)$. Ясно, что при достаточно больших m интеграл абсолютно сходится. Поэтому

$$T_h(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} \left\{ \frac{\overline{h_2(\zeta)}}{(\zeta - z)} \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1-|t|^2)^m D^k f(t) P(\bar{t}\cdot\zeta)}{(1-\bar{t}\cdot\zeta)^{m+2-k}}\, dm_{2n}(t) \right\} d\zeta,\ z \in \mathbf{U}^n.$$

Переставив порядок интегрирования, получаем

$$T_{h_2}(f)(z) = \int\limits_{\mathbf{U}^n} \left\{ (1-|t|^2)^m D^k f(t) \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{\mathbf{T}^n} \frac{\overline{h_2(\zeta)} P(\bar{t}\cdot\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)(1-\bar{t}\cdot\zeta)^{m+2-k}} \right\} dm_{2n}(t). \tag{19}$$

Преобразуем внутренний интеграл и положим

$$I(t,z) = \overline{\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} \frac{h_2(\zeta)\widetilde{P}(t\cdot\zeta) d\zeta}{(\zeta - t)^{m+2-k}(1-\zeta\cdot\bar{z})}}, \quad t, z \in \mathbf{U}^n, \tag{20}$$

где $\widetilde{P}(t\cdot\zeta) = P(t\cdot\bar{\zeta})\zeta^{m+1-k}$. Учитывая теорему A, заметим, что $\widetilde{P}(t\cdot\zeta)$ — аналитический многочлен по переменной $\zeta \in \mathbf{T}^n$. Поэтому к интегралу (20) применим формулу Коши, поскольку по лемме 5 функция $h_2 P$ принадлежит классу $H^\infty(U^n)$, следовательно,

$$I(t,z) = C(m,k) \overline{\frac{\partial^{|m+1-k|}}{\partial w^{m+1-k}} \left(\frac{h_2(w)\widetilde{P}(t\cdot w)}{1 - w\cdot\bar{z}} \right)} \Bigg|_{w=t}.$$

Применяя формулу Лейбница, из последнего равенства получаем

$$\begin{aligned} I(t,z) = &\sum_{|l|=0}^{m+1-k} C^l_{m+1-k} \\ &\times \overline{\frac{\partial^{|l|}\tilde{h}_2(w)}{\partial w_1^{l_1}\dots\partial w_n^{l_n}} \cdot \frac{\bar{z}_1^{m+1-k_1-l_1}\dots\bar{z}_n^{m+1-k_n-l_n}}{(1-w_1\bar{z}_1)^{m+2-k_1-l_1}\dots(1-w_n\bar{z}_n)^{m+2-k_n-l_n}}}\Bigg|_{w=t} \\ &= \sum_{|l|=0}^{m+1-k} C^l_{m+1-k} \overline{\frac{\partial^{|l|}\tilde{h}_2(t)}{\partial w^l}} \frac{z^{m+1-k-l}}{(1-\bar{t}\cdot z)^{m+2-k-l}}, \end{aligned}$$

где $\tilde{h}_2(w) = h_2(w)\widetilde{P}(w\cdot\bar{t})$. Возвращаясь к равенству (19), окончательно получаем

$$\begin{aligned} T_{\bar{h}_2}(f)(z) = C(m,n) &\sum_{|l|=0}^{m+1-k} C^l_{m+1-k} z^{m+1-k-l} \\ &\times \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1-|t|^2)^m D^k f(t) \overline{\frac{\partial^{|l|}\tilde{h}_2(t)}{\partial t^l}}}{(1-\bar{t}\cdot z)^{m+1-k-l}}\, dm_{2n}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства ограниченности оператора $T_{\bar{h}_2}$ в $A^p_\alpha(k)$ достаточно установить ограниченность оператора

$$B_{h_2}(\psi)(z) = \int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1-|t|^2)^m \psi(t) \overline{\frac{\partial^{|l|}\tilde{h}_2(t)}{\partial t^l}}}{(1-\bar{t}\cdot z)^{m+2-l}}\, dm_{2n}(t) \tag{21}$$

в пространстве $A^p_\alpha = A^p_\alpha(0)$, где по определению

$$\frac{\partial^{|l|}\tilde{h}_2(t)}{\partial t^l} = \frac{\partial^{|l|}\tilde{h}_2(t_1,\dots,t_n)}{\partial t_1^{l_1}\dots\partial t_n^{l_n}},$$

$$l = (l_1,\dots,l_n), \quad 0 \le l_j \le m+1-k_j, \quad 1 \le j \le n, \quad D^{-k}\tilde{h}_2 \in \Lambda^p_\alpha,$$

$$\frac{1}{(1-\bar{t}z)^{m+2-l}}=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-\bar{t}_j z_j)^{m+2-l_j}},\quad t=(t_1,\dots,t_n),z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbf{U}^n.$$

Применим методику из [20, 24]. Используя теорему B, получаем

$$\int\limits_{\mathbf{U}^n}|B_{h_2}(\psi)(z)|^p(1-|z|)^\alpha\,dm_{2n}(z)\lesssim\int\limits_{\mathbf{U}^n}(1-|z|^2)^\alpha \times\left\{\int\limits_{\mathbf{U}^n}\frac{(1-|t|^2)^{mp+2p-2}|\psi(t)|^p\left|\frac{\partial^{|l|}\tilde{h}_2(t)}{\partial t^l}\right|^p}{|1-\bar{t}\cdot z|^{(m+2-l)p}}\,dm_{2n}(t)\right\}dm_{2n}(z).$$

Переставив порядок интегрирования, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\mathbf{U}^n}|B_{h_2}(\psi)(z)|^p(1-|z|)^\alpha\,dm_{2n}(z) \lesssim\int\limits_{\mathbf{U}^n}\left((1-|t|^2)^{p(m+2)-2}|\psi(t)|^p\left|\frac{\partial^{|l|}\tilde{h}_2(t)}{\partial t^l}\right|^p\int\limits_{\mathbf{U}^n}\frac{(1-|z|)^\alpha\,dm_{2n}(z)}{|1-\bar{t}\cdot z|^{(m+2-l)p}}\right)dm_{2n}(t).$$

Положим

$$I(t)=\int\limits_{\mathbf{U}^n}\frac{(1-|z|)^\alpha}{|1-\bar{t}z|^{(m+2-l)p}}\,dm_{2n}(z) =\int\limits_{\mathbf{U}\times U\times\dots\times U}\frac{(1-|z_1|)^{\alpha_1}\dots(1-|z_n|)^{\alpha_n}}{|1-\bar{t}_1z_1|^{(m+2-l_1)p}\dots|1-\bar{t}_nz_n|^{(m+2-l_n)p}}\,dm_{2n}(z_1,\dots,z_n),\ t\in\mathbf{U}^n.$$

Предположим, что

$$\begin{gathered}(m-l_i+2)p-\alpha_i<2 \text{ при } 1\le i\le\mu,\quad (m-l_i+2)p-\alpha_i>2 \text{ при } \mu<i\le\nu\\ (m-l_i+2)p-\alpha_i=2 \text{ при } \nu<i\le n.\end{gathered}\tag{22}$$

Учитывая оценки (13), получаем

$$I(t)\lesssim\prod_{i=\mu+1}^{\nu}\frac{1}{(1-|t_i|)^{(m-l_i+2)p-\alpha_i-2}}\prod_{i=\nu+1}^{n}\ln\frac{1}{1-|t_i|}.\tag{23}$$

Из оценок (22) и (23) выводим

$$\|B_{h_2}(\psi)\|^p_{A^p_\alpha}\lesssim\int\limits_{\mathbf{U}^n}\left((1-|t|)^{p(m+2)-2}|\psi(t)|^p\left|\frac{\partial^{|l|}\tilde{h}(t)}{\partial t^l}\right|^p \times\prod_{i=\mu+1}^{\nu}\frac{1}{(1-|t_i|)^{(m-l_i+2)p-\alpha_i-2}}\prod_{i=\nu+1}^{n}\ln\frac{1}{1-|t_i|}\right)dm_{2n}(t).\tag{24}$$

Используя представление

$$\tilde{h}_2(z)=(m+2)\int\limits_{\mathbf{Q}_n}(1-t)^mD^{m+1}\tilde{h}_2(tz)\,dt$$

и оценку (16), легко установить неравенство

$$\left|\frac{\partial^{l_1+l_2+\dots+l_n}\tilde{h}_2(t)}{\partial t_1^{l_1}\dots\partial t_n^{l_n}}\right| \lesssim \prod_{i=1}^{\mu}\frac{1}{(1-|t_i|)^{m+2-\frac{\alpha_i+2}{p}}}\prod_{i=\mu+1}^{\nu}\frac{1}{(1-|t_i|)^{l_i}}$$
$$\times\prod_{i=\nu+1}^{n}\frac{1}{(1-|t_i|)^{m+1-\frac{\alpha_i+2}{p}}},\quad t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbf{U}^n.$$

Вставив полученную оценку в неравенство (24), окончательно получаем

$$\|B_{\tilde{h}_2}(\psi)\|^p_{A^p_\alpha} \lesssim \int\limits_{\mathbf{U}^n}(1-|t_1|)^{p(m+2)-2}\dots(1-|t_n|)^{p(m+2)-2}|\psi(t)|^p$$
$$\times\frac{\prod\limits_{i=\nu+1}^{n}\ln\frac{1}{1-|t_i|}}{\prod\limits_{i=1}^{\mu}(1-|t_i|)^{p(m+2)-\alpha_i-2}\prod\limits_{i=\mu+1}^{\nu}(1-|t_i|)^{pl_i}\prod\limits_{i=\nu+1}^{n}(1-|t_i|)^{p(m+1)-\alpha_i-2}}\,dm_{2n}(t),$$

или

$$\|B_{\tilde{h}_2}(\psi)\|^p_{A^p_\alpha} \lesssim \int\limits_{\mathbf{U}^n}\left\{|\psi(t)|^p\prod_{i=1}^{\mu}(1-|t_i|)^{\alpha_i}\prod_{i=\mu+1}^{\nu}(1-|t_i|)^{p(m+2)+\alpha_i-2-pl_i}\right.$$
$$\left.\times\prod_{i=\nu+1}^{n}(1-|t_i|)^p\ln\frac{1}{1-|t_i|}\right\}dm_{2n}(t).$$

Учитывая неравенство (22), получим $p(m+2-l_i)-2>0$ при $\mu+1\le i\le\nu$. Поэтому из последней оценки следует, что

$$\|B_{\tilde{h}_2}(\psi)\|^p_{A^p_\alpha} \lesssim \int\limits_{\mathbf{U}^n}(1-|t|)^{\alpha}|\psi(t)|^p\,dm_{2n}(t).$$

Итак, если T_h является ограниченным оператором в $A^p_\alpha(k)$, то $h=h_1+\bar{h}_2$, где $h_1\in H(\mathbf{U}^n)$, $D^{-k}h_2\in\Lambda^p_\alpha$, причем если $D^{-k}h_2\in\Lambda^p_\alpha$, то оператор $T_{\overline{h_2}}$ ограниченный в $A^p_\alpha(k)$. Следовательно, если условие (a) выполняется, то оператор $M_{h_1}(f):=f\cdot h_1=T_h(f)-T_{h_2}(f)$ умножения на h_1 является ограниченным оператором в $A^p_\alpha(k)$, т. е. h_1 является мультипликатором этого пространства. Отсюда следует импликация (a)⇒(b). Импликация (b)⇒(a) немедленно вытекает из доказательства последней части импликации (a)⇒(b). Итак, п. 1 теоремы доказан.

Перейдем к доказательству п. 2. Докажем его только для $n=2$, поскольку при $n\ge3$ основные идеи сохраняются, возникают только сложности технического характера. Докажем (a)⇒(b). Пусть $\alpha_j+2=(k_j+1)p$, $j=1,2$. Оператор $T_{\bar{h}}$ ограничен в пространстве $A^p_\alpha(k)$, $h\in H^1(\mathbf{U}^n)$. Из леммы 2 непосредственно следует, что $h\in H^\infty(\mathbf{U}^n)$, причем $\|h\|_\infty\le\|T_h\|$. Докажем оценку (4).

Зафиксируем точку $a=(a_1,a_2)\in\mathbf{U}^2$ и введем в рассмотрение функцию

$$f_a(z_1,z_2)=\frac{C(a)}{(1-\bar{a}_1z_1)^2(1-\bar{a}_2z_2)}.$$

Подберем $C(a)$ таким образом, чтобы

$$\|f_a\|_{A^p_\alpha(k)}\lesssim1. \tag{25}$$

Учитывая, (8), (13), нетрудно видеть, что для оценки (25) достаточно взять $C(a) = \bigl((1-|a_1|)\bigl(\ln\frac{1}{1-|a_2|}\bigr)^{-\frac{1}{p}}\bigr)$. Действительно,

$$D^k f_a(z_1,z_2) = \frac{C(a)P_{k_1}(z_1)P_{k_2}(z_2)}{(1-\bar a_1 z_1)^{2+k_1}(1-\bar a_2 z_2)^{k_2+1}},$$

где P_{k_1}, P_{k_2} — многочлены степени не выше k_1 и k_2. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbf{U}^2} |D^k f_a(z_1,z_2)|^p(1-|z|)\,dm_n(z)$$
$$\le C(a)^p \int\limits_{\mathbf{U}^2} \frac{|P_{k_1}(z_1)|^p|P_{k_2}(z_2)|^p(1-|z|)^\alpha}{|1-\bar a_1 z_1|^{p(2+k_1)}|1-\bar{a_2} z_2|^{p(k_2+1)}}\,dm_n(z_n) \lesssim \frac{C(a)^p}{(1-|a_1|)^p}\ln\frac{1}{1-|a_2|} \lesssim 1.$$

В предпоследнем неравенстве мы воспользовались оценками (13) и условием $p(2+k_1) = \alpha_1+2+p$, $p(k_2+1) = \alpha_2+2$.

Таким образом, оценка (25) установлена. Выясним вид функции $T_h(f_a)$:

$$T_{\bar h}(f_a) = \frac{C(a)}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\mathbf{T}^2} \frac{\overline{h(\zeta)}d\zeta}{(\zeta-z)(1-\bar a_1\zeta_1)^2(1-\bar a_2\zeta_2)}$$
$$= \overline{\frac{C(a)}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\mathbf{T}^2} \frac{h(\zeta)\zeta_1 d\zeta}{(\zeta_1-a_1)^2(\zeta_2-a_2)(1-\zeta_1\bar z_1)(1-\zeta_2 z_2)}}$$
$$= C(a)\overline{\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\left(\frac{h(\zeta)\zeta_1}{(1-\zeta_1\bar z_1)(1-\zeta_2\bar z_2)}\right)}\bigg|_{\zeta=a}$$
$$= \frac{C(a)}{(1-\bar a_1 z_1)(1-\bar a_2 z_2)}\left[\bar a_1\overline{\frac{\partial h(a)}{\partial\zeta_1}} + \frac{\overline{h(a)}}{(1-\bar a_1 z_1)}\right]. \tag{26}$$

Следовательно, если $F_a = T_{\bar h}(f_a)$, то

$$D^k F_a(z) = a_1\overline{\frac{\partial h_1(a)}{\partial\zeta_1}}C(a)\frac{P_{k_1}(z_1)P_{k_2}}{(1-\overline{a_1}z_1)^{k_1+1}}$$
$$\times\frac{1}{(1-\bar a_2 z_2)^{k_2+1}} + \frac{C(a)\overline{h(a)}\widetilde{P}_{k_1}(z_1)P_{k_2}(z_2)}{(1-\bar a_1 z_1)^{k_1+2}(1-\bar a_2 z_2)^{k_2+1}}, \tag{27}$$

где $\widetilde{P}_{k_1}(z_1)$, $\widetilde{P}_{k_2}(z_2)$, $P_{k_1}(z_1)$ — многочлены степени не выше k_1 и k_2 соответственно.

Используя оценку (25), из равенства (27) получаем

$$|a_1|^p C(a)^p\left|\frac{\partial h(a)}{\partial\zeta}\right|^p \int\limits_{\mathbf{U}^2} \frac{|P_{k_1}(z_1)|^p|P_{k_2}|^p}{|1-\bar a_1 z_1|^{p(k_1+1)}}\,\frac{(1-|z_1|)^{\alpha_1}(1-|z_2|)^{\alpha_2}}{|1-\bar a_2 z_2|^{p(k_2+1)}}\,dm_n(z)$$
$$\lesssim 1 + C^p(a)|h(a)|^p\int\limits_{\mathbf{U}^2}\frac{(1-|z|)}{|1-\bar a_1 z_1|^{p(k_1+2)}|1-\bar a_2 z_2|^{p(k_2+1)}}\,dm_n(z)$$
$$\lesssim \frac{C(a)^p}{(1-|a_1|)^p}\ln\frac{1}{1-|a_2|} + 1 \lesssim 1. \tag{28}$$

В предпоследнем неравенстве воспользовались условием $p(k_1+2) = \alpha_1+2+p$, $p(k_2+1) = \alpha_2+2$.

Учитывая вид многочленов $P_{k_1}(z_1)$ и $P_{k_2}(z_2)$, нетрудно установить оценку

$$\int\limits_{\mathbf{U}^2} \frac{|P_{k_1}(z_1)|^p |P_{k_2}(z_2)|^p}{|1-\bar a_1 z_1|^{p(k_1+1)}|1-\bar a_2 z_2|^{p(k_2+1)}}\, dm_n(z) \geq C_0 \frac{1}{1-|a_1|} \ln \frac{1}{1-|a_2|}$$

при некотором положительном C_0. Следовательно, возвращаясь к оценке (28), окончательно получаем

$$\left|\frac{\partial h(a)}{\partial \zeta_1}\right|^p C(a)^p \lesssim \frac{1}{\ln \frac{1}{1-|a_1|} \ln \frac{1}{1-|a_1|}},$$

или

$$\left|\frac{\partial h(a)}{\partial \zeta_1}\right| \lesssim \frac{1}{(1-|a_1|)\big(\ln \frac{1}{1-|a_1|}\big)^{\frac{1}{p}}}. \tag{29}$$

Точно таким же образом устанавливается оценка

$$\left|\frac{\partial h(a)}{\partial \zeta_2}\right| \lesssim \frac{1}{(1-|a_2|)\big(\ln \frac{1}{1-|a_2|}\big)^{\frac{1}{p}}}. \tag{30}$$

Перейдем к доказательству (4), используя оценки (29), (30). С этой целью положим

$$f_a(\zeta) = \frac{(1-|a_1|^2)(1-|a_2|^2)}{(1-\bar a \cdot \zeta)}, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2),\ a = (a_1, a_2) \in \mathbf{U}^2.$$

Применяя вышеуказанные соображения, нетрудно установить, что $f_a \in A^p_\alpha(k)$. Положим для краткости $C(a) = (1-|a|^2) = (1-|a_1|^2)(1-|a_2|^2)$. Как и выше, легко убедиться в том, что

$$T_{\bar h}(f_a)(z) = C(a)\Bigg[\frac{\overline{Dh(a)}}{(1-\bar a_1 z_1)(1-\bar a_2 z_2)} + \frac{\overline{\partial h_1(a)}}{\partial \zeta_1}\frac{z_2}{(1-\bar a_1 z_1)(1-\bar a_2 z_2)^2}$$
$$+ \frac{\overline{\partial h_1}(a)}{\partial \zeta_2}\frac{z_1}{(1-\bar a_1 z_1)^2(1-\bar a_2 z_2)} + h_1(a)\frac{z_1 z_2}{(1-\bar a_1 z_1)^2(1-\bar a_2 z_2)^2}\Bigg],$$

где $h_1(\zeta) = h(\zeta)\zeta$. Положим $F(z) := D^k(T(f_a))$, тогда

$$D^k F_a(z) = \frac{C(a) Dh(a) P_{k_1}(z_1) P_{k_2}(z_2)}{(1-\bar a_1 z_1)^{k_1+1}(1-\bar a_2 z_2)^{k_2+1}}$$
$$+ C(a)\Bigg[\frac{\partial h_1}{\partial \zeta_1}(a)\frac{\widetilde P_k(z_1, z_2)}{(1-\bar a_1 z_1)^{k_1+1}(1-\bar a_2 z_2)^{k_2+2}}$$
$$+ \frac{\partial h_1}{\partial \zeta_2}(a)\frac{Q_k(z_1, z_2)}{(1-\bar a_1 z_1)^{2+k_1}(1-\bar a_2 z_2)^{1+k_2}} + h_1(a)\frac{\widetilde Q_k(z_1, z_2)}{(1-\bar a_1 z_1)^{2+k_1}(1-\bar a_2 z_2)^{2+k_2}}\Bigg],$$

где $P_{k_1}(w)$, $P_{k_2}(w)$ — многочлены степени k_1 и k_2 соответственно от $w \in \mathbb{C}^1$, причем $P_{k_j}(w)$ можно представить в виде

$$P_{k_j}(w) = w^k \bar a_j^k + (1-\bar a_j w)\widetilde P_{k_{j-1}}(w), \quad j = 1, 2, \dots, \tag{31}$$

$\widetilde P_k(z_1, z_2)$, $Q_k(z_1, z_2)$ и $\widetilde Q_k(z_1, z_2)$ — многочлены от $z = (z_1, z_2)$. Учитывая оценку $\|D^k F\|_{A^p_\alpha(k)} \lesssim 1$, имеем

$$|C(a)|^p |Dh(a)|^p \int\limits_{\mathbf{U}^2} \frac{(1-|z|)^\alpha |P_{k_1}(z_1)|^p |P_{k_2}(z_2)|^p}{|1-\bar a_1 z_1|^{p(k_1+1)}|1-\bar a_2 z_2|^{p(k_2+1)}}\, dm_n(z)$$

$$
\lesssim 1 + C^p(a)\Bigg[\left|\frac{\partial h_1(a)}{\partial \zeta_1}\right|^p \int\limits_{\mathbf{U}^2} \frac{(1-|z|)^\alpha}{|1-\bar a_1 z_1|^{p(k_1+1)}|1-\bar a_2 z_2|^{p(k_2+2)}}\, dm_n(z_1,z_2)
$$

$$
+ \left|\frac{\partial h_1(a)}{\partial \zeta_2}\right|^p \int\limits_{\mathbf{U}^2} \frac{(1-|z|)^\alpha}{|1-\bar a_1 z_1|^{p(k_1+2)}|1-\bar a_2 z_2|^{p(k_2+1)}}\, dm_n(z_1,z_2)
$$

$$
+ |h(a)|^p \int\limits_{\mathbf{U}^2} \frac{(1-|z|)^\alpha}{|1-\bar a_1 z_1|^{p(k_1+2)}|1-\bar a_2 z_2|^{p(k_2+2)}}\, dm_n(z_1,z_2)\Bigg].
$$

Используя (31) и условие $p(k_j+1)=\alpha_j+2$, $j=1,2$, легко установить оценку

$$
\int\limits_{\mathbf{U}^4} \frac{(1-|z|)^\alpha |P_{k_1}(z_1)|^p |P_{k_2}(z_2)|^p}{|1-\bar a_1 z_1|^{p(k_1+1)}|1-\bar a_2 z_2|^{p(k_2+1)}}\, dm_n(z) \ge C_0 \ln\frac{1}{(1-|a_1|)} \ln\frac{1}{(1-|a_2|)},
$$

где C_0 — положительное число, не зависящее от a.

Принимая во внимание также оценки

$$
\int\limits_{\mathbf{U}^2} \frac{(1-|z|)^\alpha}{|1-\bar a_1 z_1|^{p(k_1+2)}|1-\bar a_2 z_2|^{p(k_2+1)}}\, dm_n(z) \lesssim \frac{1}{(1-|a_1|)^p} \ln\frac{1}{1-|a_2|},
$$

$$
\int\limits_{\mathbf{U}^2} \frac{(1-|z|)^\alpha}{|1-\bar a_1 z_1|^{p(k_1+1)}|1-\bar a_2 z_2|^{p(k_2+2)}}\, dm_n(z) \lesssim \frac{1}{(1-|a_2|)^p} \ln\frac{1}{1-|a_2|},
$$

$$
\int\limits_{\mathbf{U}^2} \frac{(1-|z|)^\alpha}{|1-\bar a_1 z_1|^{p(k_1+2)}|1-\bar a_2 z_2|^{p(k_2+2)}}\, dm_n(z) \lesssim \frac{1}{(1-|a_1|)^p(1-|a_2|)^p},
$$

приходим к неравенству

$$
|Dh(a)|^p (C(a))^p \ln\frac{1}{1-|a_1|} \ln\frac{1}{1-|a_2|}
$$

$$
\lesssim 1 + C(a)^p \Bigg[\left|\frac{\partial h(a)}{\partial \zeta_1}\right|^p \frac{1}{(1-|a_2|)^p} \ln\frac{1}{1-|a_1|}
$$

$$
+ \left|\frac{\partial h(a)}{\partial \zeta_2}\right|^p \frac{1}{(1-|a_1|)^p} \ln\frac{1}{1-|a_2|} + \frac{1}{(1-|a_1|)^p(1-|a_2|)^p}\Bigg].
$$

Применяя оценки (29), (30), выводим неравенство

$$
|Dh(a)| \lesssim \frac{1}{(1-|a_1|)(1-|a_2|)\big[\ln\frac{1}{1-|a_1|}\ln\frac{1}{1-|a_2|}\big]^{\frac{1}{p}}}.
$$

Импликация (a)⇒(b) п. 2 теоремы установлена.

Перейдем к доказательству (b)⇒(a) п. 2. Повторяя рассуждения, применяемые при доказательстве п. 1, получаем

$$
D^k T_h(f)(z) = \sum_{l_1,l_2=0}^{m+1-k_1,\,m+1-k_2} C^{l_1}_{m+1-k_1} C^{l_2}_{m+1-k_2} I_l(z),
$$

где

$$
I_l(z) = C(m,k) \int\limits_{\mathbf{U}^2} \frac{(1-|t|^2)^m D^k f(t)}{(1-\bar t z)^{m-l+2}} P(\bar t, z) \frac{\partial^{l_1+l_2}\tilde h(t)}{\partial t_1^{l_1}\partial t_2^{l_2}}\, dm_4(z),
$$

$P(\bar{t}, z)$ — некоторый многочлен от $\bar{t}$ и z, $\tilde{h}(t) = h(t)t^{m+1-k}$, m — достаточно большое натуральное число. Отсюда, применяя теорему B, окончательно получаем

$$|D^k T_h(f)(z)|^p \lesssim \sum_{l_1,l_2=0}^{m+1-k_1,m+1-k_2} \left(\int\limits_{\mathbf{U}^2} (1-|t|^2)^m \frac{|D^k f(t)|}{|1-\bar{t}\cdot z|^{m-l+2}} \left| \frac{\partial^{l_1+l_2}\tilde{h}(t)}{\partial t_1^{l_1} \partial t_2^{l_2}} \right| dm_4(z) \right)^p$$

$$\lesssim \sum_{|l|=0}^{m+1-k} \int\limits_{\mathbf{U}^2} (1-|t|^2)^{mp+2p-2} |D^k f(t)|^p \left| \frac{\partial^{|l|}\tilde{h}(t)}{\partial t^l} \right|^p \frac{dm_4(z)}{|1-\bar{t}z|^{(m-l+2)p}}.$$

Для доказательства (b)⇒(a) остается оценить интеграл $\int\limits_{\mathbf{U}^2} |J_l(z)|(1-|z|)^\alpha \, dm_4(z)$, где

$$J_l(z) = \int\limits_{\mathbf{U}^2} \left((1-|t|)^{p(m+2)-2} |D^k f(t)|^p \left| \frac{\partial^{|l|}\tilde{h}(t)}{\partial t^l} \right|^p \frac{1}{|1-\bar{t}\cdot z|^{(m-l+2)p}} \right) dm_4(z). \quad (32)$$

Здесь $l = (l_1, l_2)$, $0 \le l_j \le m - k_j + 1$, $j = 1, 2$, h удовлетворяет условию (a) п. 2 теоремы.

Пусть сначала $0 \le l_j < m - k_j + 1$, $j = 1, 2$, тогда $m + 2 - l_j > k_j + 1$, $j = 1, 2$. Поэтому $p(m + 2 - l_j) > p(k_j + 1) = \alpha_j + 2$, $j = 1, 2$, следовательно,

$$\int\limits_{\mathbf{U}^2} \frac{(1-|z|)^\alpha \, dm_4(z)}{|1-\bar{t}z|^{(m-l+2)p}} \lesssim \frac{1}{(1-|t|)^{(m-l+2)p-2-\alpha}}.$$

Из условия $h \in H^\infty(\mathbf{U}^n)$ имеем

$$\left| \frac{\partial^{|l|}\tilde{h}(t)}{\partial t^l} \right| \lesssim \frac{1}{(1-|t|)^l}, \quad t \in \mathbf{U}^2.$$

Тем самым из последней оценки получаем

$$\int\limits_{\mathbf{U}^2} |J_l(z)| \, dm_4(z) \lesssim \int\limits_{\mathbf{U}^2} \frac{(1-|t|)^{p(m+2)-2} |D^k f(t)|^p}{(1-|t|)^{p(m+2)-2-\alpha}} \, dm_4(t)$$

$$= \int\limits_{\mathbf{U}^2} (1-|t|)^\alpha |D^k f(t)|^p \, dm_4(t) = \|f\|_{A^p_\alpha(k)}. \quad (33)$$

Если, скажем, $l_1 = m + 1 - k_1$, $0 \le l_2 < m + 1 - k_2$, то $m + 2 - l_1 = k_1 + 1$, $m + 2 - l_2 > k_2 + 1$, поэтому, как и выше,

$$\int\limits_{\mathbf{U}^2} \frac{(1-|z|)^\alpha \, dm_4(z)}{|1-\bar{t}z|^{p(m-l+2)}} \lesssim \frac{\ln \frac{1}{1-|t_1|}}{(1-|t_2|)^{p(m-l_2+2)-2-\alpha_2}},$$

но, учитывая оценку (4), легко вывести, что

$$\left| \frac{\partial^{|l_1|}\tilde{h}(t_1,t_2)}{\partial t_1^{l_1} \partial t_2^{l_2}} \right|^p \lesssim \frac{1}{(1-|t_1|)^{pl_1}(1-|t_2|)^{pl_2} \ln \frac{1}{1-|t_1|}}.$$

Подставляя эту оценку в (33), окончательно получим

$$\int\limits_{\mathbf{U}^2} |J_l(z)|(1-|z|)^\alpha \, dm_4(z) \lesssim \int\limits_{\mathbf{U}^2} |D^k f(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, dm_4(z) = \|f\|_{A^p_\alpha} < +\infty.$$

Точно таким же образом проверяется случай, когда $m+2-l_j = k_j+1$, $j=1,2$. П. 2 теоремы доказан.

Перейдем к п. 3: (a)⇒(b). Как и при доказательстве п. 1, нетрудно установить, что при ограниченности оператора T_h в $A^p_\alpha(k)$ функция h должна быть представима в виде $h = h_1 + \bar{h}_2$, где $h_2 \in H^1(\mathbf{U}^n)$, $h_1 \in A^p_\alpha(k)$. По лемме 4 класс $A^p_\alpha(k)$ в условиях п. 3 теоремы является алгеброй, поэтому $M_{h_1}(f) = h_1 \cdot f$ — ограниченный оператор в $A^p_\alpha(k)$. Следовательно,

$$T_{\bar{h}_2}(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} \frac{f(\zeta)\bar{h}_2(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta$$

является ограниченным оператором в пространстве $A^p_\alpha(k)$.

По лемме 2 $h_2 \in H^\infty$. Импликация (a)⇒(b) установлена.

Перейдем к доказательству (b)⇒(a). Доказательство п. 2 почти дословно повторяет рассуждения, приведенные при выводе импликации (b)⇒(a) п. 1. Действительно, как и выше, доказательство этой импликации сводится к доказательству ограниченности оператора B_{h_2} в пространстве A^p_α (см. формулу (21)). Учтя оценку (13) и заметив, что при условиях п. 3

$$(m+2-l_j)p \geq (m+2-m-1+k_j)p = (1+k_j)p > \alpha_j + 2, \quad j = 1,2,\dots,n,$$

получаем

$$\int\limits_{\mathbf{U}^n} \frac{(1-|z|)^\alpha\, dm_{2n}(z)}{|1-\bar{t}\cdot z|^{(m-l+2)p}} \lesssim \frac{1}{(1-|t|)^{p(m-l+2)-2-\alpha}}.$$

Поскольку $h_2 \in H^\infty(\mathbf{U}^n)$, имеем

$$\left|\frac{\partial^{|l|}}{\partial t^l} h_2(t)\right| \lesssim \frac{1}{(1-|t|)^l}, \quad l \in \mathbf{Z}^n_+.$$

Снова возвращаясь к равенству (21), окончательно получаем

$$\int\limits_{\mathbf{U}^n} |B_{h_2}(\psi)|^p (1-|z|)^\alpha\, dm_{2n}(z) \lesssim \|\psi\|^p_{A^p_\alpha}. \quad \square$$

Замечание 5. Если воспользоваться результатами работ [19, 23], нетрудно установить аналог основной теоремы и для весовых пространств вида

$$A^p_\omega(k) = \left\{ f \in H(\mathbf{U}^n) : \int\limits_{\mathbf{U}^n} |D^k f(\zeta)|^p \omega(1-|\zeta|)\, dm_{2n}(\zeta) < +\infty \right\},$$

где

$$\omega(1-|z|) = \prod_{j=1}^n \omega_j(1-|z_j|), \quad z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbf{U}^n,\ \omega = (\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n)$$

— вектор-функция, определенная на $\mathbf{Q}^n$, а функции ω_j, $j = \overline{1,n}$, удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям (см. [19]). Основной результат статьи имеет приложения в вопросах деления на внутреннюю функцию в рассматриваемых пространствах.

Определение [16, с. 104]. Функция $I \in H^\infty(\mathbf{U}^n)$ называется *внутренней функцией*, если $|I(\zeta)| = 1$ п. в. на $\mathbf{T}^n$, при этом I называется *хорошей внутренней функцией*, если наименьшая плюригармоническая мажоранта функции I тождественно равно нулю.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из доказанной теоремы.

Следствие. *Пусть $f \in H^1(\mathbf{U}^n) \cap A^p_\alpha(k)$, параметры p, α, k удовлетворяют условиям основной теоремы. Предположим, что $f = I \cdot Q$, где I — хорошая внутренняя функция. Тогда функция Q принадлежит классу $A^p_\alpha(k)$.*

Доказательство. Если функция f принадлежит $H^1(\mathbf{U}^n)$, то Q также принадлежит классу $H^1(\mathbf{U}^n)$ (см. [15, с. 104]). Поэтому

$$Q(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} \frac{Q(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbf{T}^n} \frac{f(\zeta)\bar{I}(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta, \quad z \in \mathbf{U}^n.$$

По доказанной теореме $Q \in A^p_\alpha(k)$. $\square$

Отметим также, что операторы Тёплица применяются не только в вопросах деления аналитических функций, но и в других задачах комплексного и функционального анализа (см., например, [26, 27]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carleson L.* On the zeros of functions with bounded Dirichlet integral // Math. Z. 1952. Bd 3. S. 289–295.
2. *Коренблюм Б. И.* Об одном экстремальном свойстве внешних функций // Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 1. С. 53–66.
3. *Коренблюм Б. И.* О функциях, голоморфных в круге и гладких вплоть до его границы // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 1. С. 24–27.
4. *Хавин В. П.* О факторизации аналитических функций гладких вплоть до границы // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1971. Т. 22. С. 202–205.
5. *Шамоян Ф. А.* Деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах функций, аналитических в круге // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1971. Т. 22. С. 206–208.
6. *Виноградов С. А., Широков Н. А.* О факторизации функций с производной из H^p // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1971. Т. 22. С. 8–27.
7. *Shirokov N. A.* Analytic functions smooth up to the boundary. Berlin: Springer-Verl., 1988. (Lect. Notes Math.; V. 1312).
8. *Dyakonov K. M.* Division and multiplication by Inner functions and Embedding theorems for spaces of analytic functions // Amer. J. Math. 1983. V. 115, N 4. P. 881–902.
9. *Шамоян Ф. А., Шубабко Е. Н.* Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций. Брянск: Изд-во БГУ, 2010.
10. *Шамоян Ф. А.* Об ограниченности одного класса операторов, связанных с делимостью аналитических функций // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. 1973. Т. 8, № 6. С. 474–490.
11. *Шамоян Ф. А.* Об одном классе операторов, связанных с факторизацией аналитических функций // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1974. Т. 39. С. 200–206.
12. *Songxiao L., Stevo S.* Volterra type operators from Zygmund space into Bloch spaces // J. Concr. Appl. Math. 2008. V. 6, N 2. P. 199–207.
13. *Jonson S., Peetre J., Semmes A.* On action of Hankel and Toeplitz operators on some function spaces // Duke Math. J. 1984. V. 51, N 4. P. 937–958.
14. *Zhu K.* Multipliers of BMO in the Bergman metric with applications to Toeplitz operators // J. Funct. Anal. 1989. V. 87, N 1. P. 31–50.
15. *Шамоян Ф. А.* Тёплицевы операторы и деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах аналитических функций // Докл. АН АрмССР. 1983. Т. 76, № 3. С. 215–219.
16. *Ерикке Б.* Многомерный аналог теоремы Привалова // Math. Nachr. 1982. Bd 107. S. 221–233.
17. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974.
18. *Шамоян Ф. А.* Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261, № 3. С. 557–562.
19. *Шамоян Ф. А.* Факторизация, интегральные представления и идеалы аналитических функций: Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. Л.: Ин-т математики АН СССР им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд-е. 1983.

20. *Шамоян Ф. А.* Диагональные отображения и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 2. С. 197–215.
21. *Шамоян Ф. А., Арутюнян А. В.* Тёплицевы операторы в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Докл. АН АрмССР. 1990. Т. 91, № 4. С. 147–151.
22. *Антоненкова О. Е., Шамоян Ф. А.* Преобразование Коши линейных непрерывных функционалов и проекторы в весовых пространствах аналитических функций // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1208–1234.
23. *Tkachenko N. M., Shamoyan F. A.* The Hardy–Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary // J. Math. Phys., Anal., Geom. 2009. V. 5, N 2. P. 192–210.
24. *Шамоян Ф. А.* Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(\mathbf{U}^n)$, $0 < p < +\infty$ // Мат. сб. 1978. Т. 107, № 3. С. 446–462.
25. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
26. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
27. *Kahane J. P.* Best approximation in $L^1(\mathbf{T})$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80, N 5. P. 788–804.
28. *Nikolskii N. K.* Operators, functions and system: an easy reading. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Math. Surv. Monogr.; V. 92).

Статья поступила 28 декабря 2010 г.

Шамоян Файзо Агитович
Брянский гос. университет, кафедра математического анализа,
ул. Бежицкая, 14, Брянск 241036
`shamoyanfa@yandex.ru`