Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 517.54

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ С ОТЛИЧНОЙ ОТ НУЛЯ n–Й РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТЬЮ

Э. Г. Кирьяцкий

Аннотация. Рассматриваются свойства функций из класса $K_n(D)$. Этот класс состоит из аналитических в области D функций $F(z)$, для которых n-я разделенная разность отлична от нуля в области D. Указана зависимость между функциями из класса $K_n(D)$ и системами Чебышева. Рассматриваются некоторые свойства оператора, связанного с дробно-линейным преобразованием единичного круга. Даются оценки коэффициентов Тейлора.

Ключевые слова: аналитическая функция, однолистная функция, разделенная разность, классы функций, оператор, коэффициенты.

Аналитическая в области D функция $F(z)$ называется *однолистной* в D, если $F(z_1) \neq F(z_2)$ для любых различных $z_1, z_2 \in D$. С помощью этого определения образован класс однолистных в области D функций, важная роль которого в геометрической теории функций комплексного переменного хорошо известна. Отметим по этому поводу [1–7].

Отталкиваясь от класса однолистных функций, можно строить другие классы, которые обобщают либо дополняют класс однолистных функций или являются подклассами класса однолистных функций. Это, например, класс типично-вещественных в единичном круге функций, класс функций с положительной вещественной частью в единичном круге, класс однолистных и нормированных в единичном круге функций, класс функций с ограниченным вращением, линейно-инвариантные классы и многие другие классы. В данной работе мы строим новые классы, которые тесно связаны с классами однолистных и многолистных функций.

Обозначим через $K_1(D)$ класс аналитических в области D функций, для которых

$$[F(z); z_0, z_1] = \frac{F(z_0) - F(z_1)}{z_0 - z_1} \neq 0 \tag{1}$$

при любых $z_0, z_1 \in D$, $z_0 \neq z_1$. С помощью условия (1) получается класс функций, который очевидным образом совпадает с классом однолистных функций. Естественно возникает класс $K_n(D)$ аналитических в области D функций, для которых

$$[F(z); z_0, \dots, z_n] = \frac{[F(z); z_0, \dots, z_{n-1}] - [F(z); z_1, \dots, z_n]}{z_0 - z_n} \neq 0 \tag{2}$$

при любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$. Величины $[F(z); z_0, z_1]$ и $[F(z); z_0, \dots, z_n]$ называют соответственно *первой* и *n-й разделенными разностями*.

© 2012 **Кирьяцкий Э. Г.**

Можно сослаться на многих ученых, применявших разделенные разности для решения целого ряда проблем, имеющих место в теории аппроксимации и интерполяции. Отметим, в частности, известные книги [8–12].

Одним из качественно новых условий, налагаемых на n-ю разделенную разность и никогда не упоминавшихся в вышеуказанных книгах, является введенное автором этой статьи условие $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$. Классы $K_n(D)$, $n = 2, 3, \dots$, обладают многими интересными свойствами, часть из которых аналогична свойствам однолистных функций [13, 14].

Систему функций $u_0(z), u_1(z), \dots, u_n(z)$ из класса $A(D)$ аналитических в области D функций называем *системой Чебышева* в области D, если для любых комплексных $c_0, \dots, c_n$, не равных одновременно нулю, обобщенный многочлен вида

$$P(z) = c_0 u_0(z) + c_1 u_1(z) + \dots + c_n u_n(z)$$

имеет в области D не более n корней. Простым примером системы Чебышева в области D является система функций $u_0 = 1$, $u_1 = z, \dots, u_{n-1} = z^{n-1}$, $u_n = z^n$, так как любой многочлен $c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + z^n$ имеет в области D не более n корней.

Обозначим через $K_1^{ch}(D)$ класс аналитических в области D функций $F(z)$, для которых любой многочлен $P(z) = c_0 + F(z)$ имеет в области D не более одного корня. Мы получили класс, который очевидным образом совпадает с классом всех однолистных в области D функций. Теперь естественным путем возникает класс $K_n^{ch}(D)$ аналитических в области D функций $F(z)$, для которых любой многочлен $c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + F(z)$ имеет в области D не более n корней, т. е. $1, z, \dots, z^{n-1}, F(z)$ — система Чебышева в D. Заметим, что если потребовать, чтобы уравнение $c_0 + F(z)$ имело в области D не более n корней, то получим класс n-листных функций в D, который, очевидно, содержит класс $K_n^{ch}(D)$.

В данной работе рассматриваются свойства функций из класса $K_n(D)$. Указана зависимость между функциями из класса $K_n(D)$ и системами Чебышева. Рассматриваются некоторые свойства омега-оператора Ω_n^{ω}, связанного с автоморфизмом ω единичного круга. Даются оценки коэффициентов Тейлора.

Одно из представлений разделенной разности n-го порядка дано формулами (1), (2). Познакомимся с различными другими представлениями разделенных разностей. Если точки $\xi_1, \dots, \xi_s \in D$ попарно различны, то полагаем [9]

$$[F(z); \underbrace{\xi_0, \dots, \xi_0}_{p_0}, \dots, \underbrace{\xi_s, \dots, \xi_s}_{p_s}] = \frac{1}{(p_0 - 1)! \dots (p_s - 1)!} \frac{\partial^{n-s} [F(z); \xi_0, \dots, \xi_s]}{\partial \xi_0^{p_0 - 1} \dots \partial \xi_s^{p_s - 1}},$$

где $p_0 + \dots + p_s = n + 1$. В частности, если $z_0 = \dots = z_n = \xi$, то

$$[F(z); \underbrace{\xi, \dots, \xi}_{n+1}] = \frac{1}{n!} F^{(n)}(\xi).$$

Имеет место также формула [10]

$$[F(z); z_0, \dots, z_n] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{F(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0) \dots (\xi - z_n)},$$

где Γ — простой замкнутый контур, расположенный внутри области D и охватывающий все точки $z_0, \dots, z_n$.

Можно доказать, что разделенная разность представима в виде отношения двух определителей [11]:

$$[F(z); z_0, \ldots, z_n] = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & \ldots z_0^{n-1} & F(z_0) \\ 1 & z_1 & \ldots z_1^{n-1} & F(z_1) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & z_n & \ldots z_n^{n-1} & F(z_n) \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & z_0 & \ldots z_0^{n-1} & z_0^n \\ 1 & z_1 & \ldots z_1^{n-1} & z_1^n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & z_n & \ldots z_n^{n-1} & z_n^n \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Числителем этой дроби является определитель, построенный с помощью функций $u_0(z) \equiv 1, u_1(z) = z, \ldots, u_{n-1}(z) = z^{n-1}, u_n(z) = F(z)$ и точек $z_0, \ldots, z_n \in D$. Обозначим его через H. Знаменателем дроби является определитель Вандермонда, который отличен от нуля для любых попарно различных $z_0, \ldots, z_n$. Обозначим его через V.

В случае, когда D является выпуклой областью, разделенную разность можно записать следующим образом [10]:

$$[F(z); z_0, \ldots, z_n] = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} F^{(n)}(\xi)\, dt_1 \ldots dt_n, \tag{4}$$

где $\xi = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + \cdots + t_n(z_n - z_{n-1}) \in E$, $0 \le t_1 \le 1$, $0 \le t_2 \le t_1, \ldots, 0 \le t_n \le t_{n-1}$. Нам понадобится еще одно представление разделенной разности n-го порядка, а именно [10]

$$[F(z); z_0, \ldots, z_s] \\ = \sum_{m=0}^{s} \frac{F(z_m)}{(z_m - z_0)\ldots(z_m - z_{m-1})(z_m - z_{m+1})\ldots(z_m - z_n)} = \sum_{m=0}^{s} \frac{F(z_m)}{\eta_s'(z_m)}, \tag{5}$$

где $\eta_s(z) = (z - z_0)\ldots(z - z_s)$.

Тесная связь между системой Чебышева и разделенной разностью обнаруживается с помощью следующего утверждения.

Теорема 1. *Класс $K_n(D)$ полностью совпадает с классом $K_n^{ch}(D)$.*

Доказательство. Пусть функция $F(z)$ принадлежит классу $K_n(D)$. Построим обобщенный многочлен

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n F(z), \tag{6}$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n$ произвольно фиксированы и не все равны нулю. Этот многочлен имеет не более чем n попарно различных корней. В самом деле, пусть он имеет $n+1$ попарно различных корней $z_0, z_1, \ldots, z_n \in D$. Построим систему линейных однородных уравнений

$$c_0 + c_1 z_m + \cdots + c_{n-1} z_m^{n-1} + c_n F(z_m) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, n,$$

относительно $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Так как $[F(z); z_0, \ldots, z_n] \neq 0$ и $V \neq 0$, то $H \neq 0$. Но тогда $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$, что невозможно. Итак, любой многочлен $P(z)$ вида (6) имеет не более чем n попарно различных корней в области D, т. е. система функций $1, z, \ldots, z^{n-1}, F(z)$ является системой Чебышева в области D.

Пусть теперь функция $F(z)$ принадлежит классу $K_n^{ch}(D)$. Возьмем произвольным образом попарно различные числа $z_0, z_1, \ldots, z_n \in D$ и числа $c_0, c_1, \ldots,$

c_n, не все равные нулю. Кроме того, $b_0, b_1, \dots, b_n$ — некоторые числа. Составим систему из равенств

$$c_0 + c_1 z_m + \dots + c_{n-1} z_m^{n-1} + c_n F(z_m) = b_m, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Случай $b_0 = b_1 = \dots = b_n = 0$ исключается, так как в этом случае многочлен $P(z)$ вида (6) имеет $n+1$ попарно различных корней в области D, что противоречит определению системы Чебышева. Значит, например, $b_0 \neq 0$. Учитывая то, что $V \neq 0$, получим $H \neq 0$ и поэтому $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$.

Таким образом, теорема 1 утверждает, что, изучая свойства функции из класса $K_n(D)$, тем самым исследуем свойство этой функции из класса $K_n^{ch}(D)$.

Познакомимся с некоторыми примерами, которые являются признаками принадлежности функций к классу $K_n(D)$.

Пример 1. Если $F(z) \in K_n(D)$, то $aF(z) + P_{n-1}(z) \in K_n(D)$, где $a \neq 0$ и $P_{n-1}(z)$ — любой многочлен степени не выше $n-1$.

В самом деле, пользуясь аддитивным свойством разделенных разностей и тождеством $[P(z); z_0, \dots, z_n] \equiv 0$, получим

$$\begin{aligned}[aF(z) + P(z); z_0, \dots, z_n] &= a[F(z); z_0, \dots, z_n] + [P(z); z_0, \dots, z_n] \\ &= a[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0.\end{aligned}$$

Пример 2. Пусть T — семейство рациональных функций вида

$$F(z) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{s=1}^{m_k} \frac{A_{k,s}}{(z-a_k)^s} \not\equiv 0,$$

где $a_k = \delta_k e^{i\varphi_k}$, $\delta_k > 0$, $A_{k,s} = d_{k,s} e^{i\beta_{k,s}}$, причем $\beta_{k,s}$ удовлетворяет условию $\beta_{k,s} - (s+n)(\pi + \varphi_k) \equiv \varphi (\mathrm{mod} 2\pi)$, $\varphi \equiv \mathrm{const}$, для всех k, s и некоторого натурального n. Тогда $F(z) \in K(D)$, где D — круг

$$|z| < r_n = \min_{k=1,\dots,p} \delta_k \sin \frac{\pi}{2(m_k+n)}.$$

При этом радиус круга для семейства T увеличить нельзя [15].

Пример 3. Пусть $F(z) = z^{n+k}$, где $k \geq 0$. Тогда $z^{n+k} \in K_n(D)$, где $D(\alpha)$ — угловая область с вершиной в начале координат и величиной угла $\alpha = 2\pi/(k+1)$. При этом раствор угла увеличить нельзя [16].

Из примера 3 и теоремы 1 следует, что любой многочлен вида $a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^{n+k}$ имеет не более n корней в угловой области $D(2\pi/(k+1))$. Другими словами, функции $1, z, \dots, z^{n-1}, z^{n+k}$ образуют систему Чебышева в угловой области $D(2\pi/(k+1))$. При этом величина угла для этой системы является максимальной [16].

Пример 4. Пусть $\operatorname{Re} F^{(n)}(z) > 0$ в выпуклой области D. Тогда $F(z) \in K_n(D)$. В самом деле, по формуле (3) имеем $\operatorname{Re}[F(z); z_0, \dots, z_n] > 0$ для любых $z_0, \dots, z_n \in D$.

Пример 5. Пусть E — единичный круг $|z| < 1$. Любая функция

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1},$$

коэффициенты которой удовлетворяют условию

$$\sum_{k=2}^{\infty} C_{n+k-1}^{n} |a_{k,n}| \le 1,$$

принадлежит классу $\widetilde{K}_n(E)$.

Действительно,

$$\operatorname{Re}\{[H_n(z); z_0, \dots, z_n]\} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \{a_{k,n} [z^{n+k-1}; z_0, \dots, z_n]\} > 1 - \sum_{k=2}^{\infty} C_{n+k-1}^{n} |a_{k,n}| \ge 0.$$

Известно, что производная $F'(z)$ однолистной в области D функции $F(z)$ отлична от нуля в этой области. Естественным обобщением этого факта является следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $[F(z); z_0, \dots, z_n] \ne 0$ *для любых попарно различных* $z_0, \dots, z_n \in D$, *то* $[F(z); z_0, \dots, z_n] \ne 0$ *для любых* $z_0, \dots, z_n \in D$.

Доказательство. Для любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$

$$[F(z); z_0, \dots, z_n] = \frac{[F(z); z_0, \dots, z_{n-1}] - [F(z); z_1, \dots, z_n]}{z_0 - z_n} \ne 0.$$

Отсюда и в силу симметричности разделенной разности имеем

$$[F(z); z_0, z_1, \dots, z_{n-1}] \ne [F(z); z_n, z_1, \dots, z_{n-1}]$$

для любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$. Фиксируем в области D произвольным образом попарно различные точки $z_1, \dots, z_{n-1}$. Тогда из последнего соотношения следует, что выражение $\varphi(z) = [F(z); z, z_1, \dots, z_{n-1}]$ является однолистной функцией в области D. Как известно, производная однолистной в области D функции отлична от нуля в этой области. В частности, $\varphi'(z_0) \ne 0$. Но

$$\varphi'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{[F(z); z, z_1, \dots, z_{n-1}] - [F(z); z_0, z_1, \dots, z_{n-1}]}{z - z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0} [F(z); z, z_1, \dots, z_{n-1}, z_0] = [F(z); z_0, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}].$$

Тем самым выражение $[F(z); z_0, z_0, \dots, z_{n-1}, z_n]$ отлично от нуля при двух совпадающих аргументах, т. е. если $z_0 = z_n$. Продолжая указанный процесс, убедимся в справедливости теоремы 1.

Следствие 1. *Если* $F(z) \in K_n(D)$, *то* $F^{(n)}(z) \ne 0$ *для любого* $z \in D$.

Пусть E — единичный круг $|z| < 1$ и

$$\omega = \omega(z; \zeta) = \frac{z + \zeta}{1 + \bar{\zeta} z}, \quad \zeta \in E,$$

есть множество дробно-линейных преобразований единичного круга E. Если функция $F(z)$ однолистная в круге E, то, как известно, функция $F(\omega)$ также будет однолистной в круге E. Покажем, как разделенная разность реагирует на дробно-линейное преобразование своих аргументов.

Теорема 3. *Пусть $F(\omega) \in A(E)$. Пусть также z_m, $m = 0, 1, \ldots, n$, — произвольно взятые точки в круге E и*

$$\omega_m = \frac{z_m + \zeta}{1 + \bar{\zeta} z_m}, \quad z_m \in E, \ \zeta \in E.$$

Тогда

$$[F(\omega); \omega_0, \ldots, \omega_n] = (1 - |\zeta|^2)^{-n} \prod_{k=0}^{n} (1 + \bar{\zeta} z_k) \cdot [(1 + \bar{\zeta} z)^{n-1} F(\omega(z; \zeta)); z_0, \ldots, z_n]. \tag{7}$$

Доказательство. Сначала предполагаем точки z_m, $m = 0, 1, \ldots, n$, попарно различными. Тогда точки ω_m, $m = 0, 1, \ldots, n$, также попарно различные. Заметим, что

$$\omega_m - \omega_k = \frac{(1 - |\zeta|^2)(z_m - z_k)}{(1 + \bar{\zeta} z_m)(1 + \bar{\zeta} z_k)}.$$

Для производных функций

$$\eta_n(z) = \prod_{k=0}^{n} (z - z_k) \quad \text{и} \quad \eta_n^*(\omega) = \prod_{k=0}^{n} (\omega - \omega_k)$$

имеем

$$\eta_n'(z_m) = \prod_{k=0, k \neq m}^{n} (z_m - z_k), \quad \eta_n^{*'}(\omega_m) = \prod_{k=0, k \neq m}^{n} (\omega_m - \omega_k).$$

Значит,

$$\begin{aligned}
&(1 - |\zeta|^2)^{-n} (1 + \bar{\zeta} z_m)^{n-1} \eta_n^{*'}(\omega_m) \prod_{k=0}^{n} (1 + \bar{\zeta} z_k) \\
&\quad = (1 - |\zeta|^2)^{-n} (1 + \bar{\zeta} z_m)^{n-1} \cdot \prod_{k=0, k \neq m}^{n} (\omega_m - \omega_k) \cdot \prod_{k=0}^{n} (1 + \bar{\zeta} z_k) \\
&\quad = (1 - |\zeta|^2)^{-n} \prod_{k=0}^{n} (1 + \bar{\zeta} z_k) \cdot (1 + \bar{\zeta} z_m)^{n-1} \cdot \frac{(1 - |\zeta|^2)^n}{(1 + \bar{\zeta} z_m)^n} \cdot \prod_{k=0, k \neq m}^{n} \frac{z_m - z_k}{1 + \bar{\zeta} z_k} \\
&\quad = \prod_{k=0, k \neq m}^{n} (z_m - z_k) = \eta_n'(z_m).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\eta_n^{*'}(\omega_m)} = \frac{(1 - |\zeta|^2)^{-n} \prod\limits_{k=0}^{n} (1 + \bar{\zeta} z_k) \cdot (1 + \bar{\zeta} z_m)^{n-1}}{\eta_n'(z_m)}. \tag{8}$$

Пользуясь (8) и формулой (5) для попарно различных $\omega_0, \ldots, \omega_n \in E$, получим

$$\begin{aligned}
&[F(\omega); \omega_0, \ldots, \omega_n] = \sum_{m=0}^{n} \frac{F(\omega_m)}{\eta_n^{*'}(\omega_m)} \\
&\quad = (1 - |\zeta|^2)^{-n} \prod_{k=0}^{n} (1 + \bar{\zeta} z_k) \sum_{m=0}^{n} \frac{(1 + \bar{\zeta} z_m)^{n-1} F(\omega(z_m; \zeta))}{\eta_n'(z_m)} \\
&\quad = (1 - |\zeta|^2)^{-n} \prod_{k=0}^{n} (1 + \bar{\zeta} z_k) [(1 + \bar{\zeta} z)^{n-1} F(\omega(z; \zeta)); z_0, \ldots, z_n].
\end{aligned}$$

Осуществив в последнем равенстве предельный переход, убедимся в том, что теорема 3 справедлива и тогда, когда среди точек $\omega_0, \dots, \omega_n \in E$ есть совпадающие между собой.

Введем оператор $N_n[F(z)]$ по формуле

$$N_n[F(z)] = \frac{n!}{F^{(n)}(0)}\left(F(z) - F(0) - \frac{1}{1!}F^{(1)}(0) - \dots - \frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0)\right) \tag{9}$$

и назовем его *нормирующим оператором.* Если $F(z) \in K_n(E)$, то

$$H_n(z) = N_n(F(z)) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1} \in K_n(E). \tag{10}$$

В самом деле, теорема 2 показывает, что $F^{(n)}(0) \neq 0$. Далее, опираясь на (9) и на пример 1, придем к справедливости нашего утверждения.

Таким образом, в классе $K_n(E)$ можно выделить подкласс (обозначим его через $\widetilde{K}_n(E)$) нормированных функций вида (10). Класс $\widetilde{K}_1(E)$ полностью совпадает с классом S нормированных и однолистных в круге E функций, т. е. $\widetilde{K}_1(E) \equiv S$.

Теорема 4. *Если $F(z) \in K_n(E)$, то*

$$H_n(z;\zeta) = (1 + \bar{\zeta}z)F(\omega(z;\zeta)) \in K_n(E) \quad \forall \zeta \in E.$$

Действительно, так как $\omega \in E$, то $F(\omega) \in K_n(E)$ и поэтому $[F(\omega); \omega_0, \dots, \omega_n] \neq 0$ для попарно различных $\omega_0, \dots, \omega_n \in E$. Теперь из теоремы 3 следует, что $[H(z;\zeta); z_0, \dots, z_n] \neq 0$. Это означает, что $H(z;\zeta) \in K_n(E)$ для любых $\zeta \in E$.

На классе $A(E)$ введем омега-оператор по формуле

$$\Omega_n^{\omega}(F(z)) = \frac{z^n[F(z); \omega, \overbrace{\zeta, \dots, \zeta}^{n}]}{(1 + \bar{\zeta}z)\frac{1}{n!}F^{(n)}(\zeta)}.$$

Выразим нормирующий оператор через омега-оператор.

Теорема 5. *Пусть $F(z) \in \widetilde{K}_n(E)$. Имеет место равенство*

$$\Omega_n^{\omega}(F(z)) = N_n(H_n(z;\zeta)).$$

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что

$$[(H_n(z;\zeta); z_0, \dots, z_n] = \frac{(1 - |\zeta|^2)^n}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1 + \bar{\zeta}z_k)}[F(\omega); \omega_0, \dots, \omega_n]. \tag{11}$$

Положив в (11) $\omega_0 = \omega_1 = \dots = \omega_n = \omega$ и $z_0 = z_1 = \dots = z_n = z$, получим

$$\frac{\partial^n H_n(z;\zeta)}{\partial z^n} = \frac{(1 - |\zeta|^2)}{(1 + \bar{\zeta}z)^{n+1}} \frac{dF^{(n)}(\omega)}{d\omega^n}. \tag{12}$$

Согласно формуле (12) и теореме 2 имеем

$$H^{(n)}(0;\zeta) = (1 - |\zeta|^2)^n F^{(n)}(\zeta) \neq 0. \tag{13}$$

Значит, имеет место разложение

$$N_n(H(z;\zeta)) = \frac{H(z;\zeta) - P_{n-1}(z;\zeta)}{\frac{1}{n!}H^{(n)}(0;\zeta)}, \tag{14}$$

где

$$P_{n-1}(z;\zeta) = H(0;\zeta) + \frac{H(0;\zeta)}{1!}z + \dots + \frac{H^{(n-1)}(0;\zeta)}{(n-1)!}z^{n-1}. \tag{15}$$

Учитывая (13)–(15) и теорему 3, получим

$$[F(\omega);\omega_0,\dots,\omega_n] = \frac{F^{(n)}(\zeta)}{n!}\prod_{k=0}^{n}(1+\bar{\zeta}z_k)\cdot[(N_n(H(z;\zeta)));z_0,\dots,z_n]. \tag{16}$$

В формуле (16) положим $z_1 = \dots = z_n = 0$. Тогда $\omega_1 = \dots = \omega_n = \zeta$. Кроме того, ω_0 заменим на ω, а z_0 — на z. Тогда из (16) следует

$$[F(z);\omega,\overbrace{\zeta,\dots,\zeta}^{n}] = \frac{F^{(n)}(\zeta)}{n!}(1+\bar{\zeta}z)[N_n(H(z;\zeta))]$$
$$= \frac{F^{(n)}(\zeta)}{n!}(1+\bar{\zeta}z)z^{-n}N_n(H(z;\zeta)).$$

Отсюда $N_n(H(z;\zeta)) = \Omega_n^{\omega}(F(z))$. Если $n = 1$, то после небольших вычислений получим оператор

$$\Omega_n^{\omega}(F(z)) = \frac{z[F(z);\omega,\zeta]}{(1+\bar{\zeta}z)F^{(1)}(\zeta)} = \frac{F(\omega)-F(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)F^{(1)}(\zeta)}.$$

Этот оператор часто применяется в теории однолистных функций.

Теорема 6. *Если*

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n}z^{n+k-1} \in \widetilde{K}_n(E),$$

то

$$\Omega_n^{\omega}(F(z)) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n}(\zeta)z^{n+k-1} \in \widetilde{K}_n(E) \quad \forall\zeta\in E. \tag{17}$$

Кроме того, для коэффициентов $a_{k,n}(\zeta)$, $k = 2,3,\dots$, справедлива формула

$$a_{k,n}(\zeta) = \sum_{m=0}^{k-1}(-1)^{k-1-m}C^{k-1-m}(1-|\zeta|^2)^m\bar{\zeta}^{k-1-m}\frac{n!F^{(n+m)}(\zeta)}{(n+m)!F^{(n)}(\zeta)} \quad \forall\zeta\in E. \tag{18}$$

Доказательство. Если $F(z) \in \widetilde{K}_n(E)$, то, очевидно, $F(z) \in K_n(E)$. Из теоремы 4 следует, что $H(z;\zeta) \in K_n(E)$ для любых $\zeta \in E$. Опираясь на свойства нормирующего оператора и теорему 4, получим (17). Установим формулу (18) для коэффициентов. Дифференцируем по z обе части равенства (12) $k-1$ раз. Тогда можно показать, что для любых фиксированных $\zeta \in E$ и $n \geq 1$, $k \geq 1$ справедлива формула

$$\frac{\partial^{n+k-1}((1+\bar{\zeta}z)^{n-1}F(\omega(z;\zeta)))}{(n+k-1)!\partial z^{n+k-1}}$$
$$= \sum_{m=0}^{k-1}B_{k,m}\bar{\zeta}^{k-1-m}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n+m}}{(1+\bar{\zeta}z)^{n+k+m}}\frac{dF^{n+m}(\omega)}{(n+m)!d\omega^{n+m}}, \tag{19}$$

где $B_{k,m}$ — коэффициенты, не зависящие от параметра ζ и от функции $F(z)$ из класса $\widetilde{K}_n(E)$. Для этого надо воспользоваться формулой Лейбница и тем, что

$$\omega'(z;\zeta) = \frac{1-|\zeta|^2}{(1+\bar{\zeta}z)^2}.$$

Положим в (19) $z = 0$ и $\zeta = x$, где $-1 < x < 1$. Тогда получим следующее выражение для коэффициентов $a_{k,n}(x)$:

$$a_{k,n}(x) = \sum_{m=0}^{k-1} B_{k,m}(1-x^2)^m x^{k-1-m} \frac{n!F^{(n+m)}(x)}{(n+m)!F^{(n)}(x)}. \tag{20}$$

Для вычисления $B_{k,n}$ поступим следующим образом. Сначала установим, что функция

$$F_0(z) = \frac{z^n}{1-z} = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} z^{n+k-1}$$

принадлежит классу $\widetilde{K}_n(E)$. В самом деле,

$$[F_0(z); z_0, \dots, z_n] = \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-z_m} \neq 0 \quad \forall z_0, \dots, z_n \in E.$$

Значит, $F_0(z) \in \widetilde{K}_n(E)$. Убедимся в том, что

$$\Omega_n^{\omega_0}(F_0) = F_0, \quad \text{где } \omega_0(z;x) = \frac{z+x}{1+xz},$$

т. е. в том, что F_0 — неподвижная точка оператора $\Omega_n^{\omega_0}$. Действительно,

$$H_n(z;x) = (1+xz)^{n-1}F_0(z;x) = \frac{(z+x)^n}{(1-x)(1-z)} = P_{n-1}(z;x) + \frac{(1+x)^n}{1-x}\frac{z^n}{1-z},$$

где $P_{n-1}(z;x)$ — многочлен степени не выше $n-1$. Кроме того,

$$\frac{H_n^{(n)}(0;x)}{n!} = \frac{(1+x)^n}{1-x}.$$

Значит, $N_n[H(z;x)] = F_0(z)$ для любых $z \in E$ и $x \in (-1,1)$. Подставив функцию $F_0(z)$ в (20), получим тождество

$$1 = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k-1-m} C_{k-1}^{k-1-m} x^{k-1-m}(1+x)^m.$$

Отсюда следует, что $B_{k,m} = (-1)^{k-1-m}C_{k-1}^{k-1-m}$, и формула (18) доказана.

Сформулируем и докажем теорему, которую назовем теоремой понижения номера класса.

Теорема 7. *Если $F(z) \in \widetilde{K}_n(E)$, то $z^{-k}F(z) \in \widetilde{K}_{n-k}(E)$, $k = 0, \dots, n-1$.*

Доказательство. Пусть $F(z) \in \widetilde{K}_n(E)$. Согласно теореме 1 система функций $1, z, \dots, z^{n-1}, F(z)$ есть система Чебышева в круге E, т. е. любой обобщенный многочлен $c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1}z^{n-1} + F(z)$ имеет в круге E не более n корней. Значит, любой обобщенный многочлен $c_1 z + \dots + c_{n-1}z^{n-1} + F(z)$ также имеет в круге E не более n корней. Отсюда, в свою очередь, следует, что любой обобщенный многочлен $c_1 + \dots + c_{n-1}z^{n-2} + z^{-1}F(z)$ имеет в круге E не более $n-1$ корней. Это означает, что $z^{-1}F(z) \in \widetilde{K}_{n-1}(E)$. Продолжая указанный процесс, убедимся в справедливости нашего утверждения.

Каждую функцию $F(z)$ из класса $\widetilde{K}_n(E)$ можно записать в виде $F(z) = z^{n-1}f(z)$, где $f(z)$ — голоморфная в круге E функция.

Следствие 2. *Если $F(z) = z^{n-1}f(z) \in \widetilde{K}_n(E)$, то $f(z)$ — однолистная нормированная в круге E функция.*

В самом деле, пользуясь теоремой понижения номера класса (теорема 7) нужное количество раз, убедимся в справедливости нашего утверждения.

Класс указанных выше однолистных функций $f(z)$ обозначим через $\widetilde{K}_{1,n}(E)$. Приведем несколько примеров функций, принадлежащих классам $K_n(E)$.

Пример 6. Однолистные в круге E функции

$$F_1(z) = \frac{1}{1-cz} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} cz^m, \quad 0 < |c| \le 1,$$

$$F_2(z) = \frac{1}{(1-cz)^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c^{k-1}kz^{k-1}, \quad 0 < |c| \le 1,$$

$$F_3(z) = e^z,$$

$$\Phi_{1,c}(z) = \frac{z}{(1-cz)^2} = z + \sum_{k=2}^{\infty} c^{k-1}kz^k, \quad 0 < |c| \le 1,$$

принадлежат всем классам $K_n(E)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Действительно,

$$[F_1(z); z_0, \ldots, z_n] = c^n \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-cz_m} \ne 0 \quad \forall z_0, \ldots, z_n \in E,$$

$$[F_2(z); z_0, \ldots, z_n] = c^n \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-cz_m} \right) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-cz_m} \ne 0 \quad \forall z_0, \ldots, z_n \in E,$$

$$\mathrm{Re}\{[F_3(z); z_0, \ldots, z_n]\} = \mathrm{Re}\left\{ \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} e^{\xi}\, dt_1 \ldots dt_n \right\} > 0 \quad \forall z_0, \ldots, z_n \in E,$$

$$[\Phi_{1,c}; z_0, \ldots, z_n] = c^{n-1} \left(-1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-cz_m} \right) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-cz_m} \ne 0 \quad \forall z_0, \ldots, z_n \in E.$$

Пример 7. Функции

$$F_{n,c}(z) = \frac{z^n}{1-cz} = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} c^{k-1} z^{n+k-1}, \quad |c| \le 1,$$

$$\Phi_{n,c}(z) = \frac{z^n}{(1-cz)^2} \left(1 + \frac{1-n}{1+n} cz \right) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n+2k-1}{n+1} c^{k-1} z^{n+k-1}, \quad |c| \le 1,$$

принадлежат классу $\widetilde{K}_n(E)$.

В самом деле, для любых $z_0, \ldots, z_n \in E$

$$[F_{n,c}(z); z_0, \ldots, z_n] = \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-cz_m} \ne 0,$$

$$[\Phi_{n,c}(z); z_0, \ldots, z_n] = \left(-1 + \frac{2}{1+n} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-cz_m} \right) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-cz_m} \ne 0.$$

Пример 8. Функция

$$F_c(z) = (1+\bar{c}z)^{n-1} \exp \frac{z+c}{1+\bar{c}z}, \quad |c| \le 1,$$

принадлежит классу $K_n(E)$.

Действительно, если $\xi \in E$, то $\mathrm{Re}\{(e^\xi)^{(n)}\} = \mathrm{Re}\{e^\xi\} > 0$. Из примера 6 известно, что функция e^z принадлежит классу $K_n(E)$ при любом $n \ge 1$. Функция $\omega(z;c) = (z+c)/(1+\bar{c}z)$, где $|c| \le 1$, осуществляет автоморфизм круга E. Согласно теореме 4 убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Пример 9. Если $n \ge 2$, то функция

$$h_n(z) = \frac{z^n}{(1-z)^2}$$

не принадлежит классу $\widetilde{K}_n(E)$.

В самом деле, легко установить, что $h_2''(-1/2) = 0$. Согласно теореме 2 имеем $h_2(z) \notin \widetilde{K}_2(E)$. Пусть теперь $n \ge 3$ и $h_n(z) \in \widetilde{K}_n(E)$. Тогда $h_2(z) \in \widetilde{K}_n(E)$ по теореме 7; противоречие.

Пример 9 показывает, что класс $\widetilde{K}_{1,n}(E)$, $n \ge 2$, однолистных в круге E функций является собственным подклассом всего класса S. В самом деле, однолистная в круге E функция $h_1(z) = z(1-z)^{-2}$ не принадлежит классу $\widetilde{K}_{1,n}(E)$, $n \ge 2$.

В 1916 г. Бибербах [17] высказал следующую гипотезу. Если функция

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k, \quad b_1 = 1,$$

принадлежит классу S (т. е. классу $\widetilde{K}_1(E)$), то для модулей ее комплексных коэффициентов Маклорена имеют место оценки

$$|b_k| \le k, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{21}$$

со знаком равенства для однолистной в круге E функции $\Phi_{1,c}(z)$, $|c| = 1$.

Сам Бибербах установил оценки

$$b_2 \le 2, \quad |F^{(1)}(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \quad \forall z \in E$$

со знаком равенства для однолистной в круге E функции $\Phi_{1,c}(z)$, $|c| = 1$.

Многочисленные попытки доказать или опровергнуть гипотезу Бибербаха многие десятилетия не имели успеха. Только в 1984 г. де Бранж [18] доказал неравенства (21) для модулей комплексных коэффициентов Маклорена при всех $k \ge 2$. При этом оказалось, что равенство реализуется только функциями $\Phi_{1,c}$, $|c| = 1$.

Важно заметить, что после неудачных попыток доказать неравенства (21) Э. Ландау [19, 20] установил неравенства

$$\frac{1}{p!}|F^{(p)}(z)| \le \frac{p+|z|}{(1-|z|)^{p+2}}, \quad F(z) \in S \quad \forall z \in E, \ p = 1, 2, 3, \ldots, \tag{22}$$

для модулей тейлоровских коэффициентов, однако в предположении, что гипотеза Бибербаха справедлива. В 1987 г. И. А. Александров [6, 21], уже зная о теореме де Бранжа, снова доказал неравенства (22) методом, который существенно отличался от метода Ландау. В данной работе мы поступим так же, как поступил Ландау, только применительно к классу $\widetilde{K}_n(E)$.

Теорема 8. *Если для любой функции*

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1} \tag{23}$$

из класса $\widetilde{K}_n(E)$, $n \geq 1$, *ее комплексные коэффициенты Маклорена* $a_{k,n}$, $k = 2, 3, \dots$, *удовлетворяют неравенствам*

$$|a_{k,n}| \leq \frac{n+2k-1}{n+1}, \quad k = 2, 3, \dots, \tag{24}$$

то для коэффициентов Тейлора справедливы неравенства

$$0 \leq \frac{|F^{(n+p-1)}(z)|}{(n+p-1)!} \leq \frac{\frac{n+2p-1}{n+1} + |z|}{(1-|z|)^{n+p+1}} \quad \forall z \in E,\ p = 1, 2, 3, \dots. \tag{25}$$

Равенство в правой части (25) *при любом* $p \geq 1$ *реализуется функциями*

$$\Phi_{n,c}(z) = \frac{z^n}{(1-cz)^2}\left(1 + \frac{1-n}{1+n}cz\right) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} c^{k-1}\frac{n+2k-1}{n+1} z^{n+k-1}, \quad |c| = 1,$$

принадлежащими классу $\widetilde{K}_n(E)$. *Равенство в левой части* (25) *реализуется функцией* z^n, *также принадлежащей классу* $\widetilde{K}_n(E)$.

Доказательство. Пусть функция $F(z)$ вида (23) принадлежит классу $\widetilde{K}_n(E)$. Рассмотрим функцию $\Psi(z;\zeta) = N_n[H(z;\zeta)]$. Согласно теореме 6 функция $\Psi(z;\zeta)$ принадлежит классу $\widetilde{K}_n(E)$ при любом $\zeta \in E$. Разложение ее в степенной ряд имеет вид

$$\Psi(z;\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}(\zeta) z^{n+k-1}, \quad a_{1,n}(\zeta) \equiv 1, \tag{26}$$

а коэффициенты $a_{k,n}(\zeta)$ вычисляются по формуле

$$a_{k,n}(\zeta) = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k-1-m} C_{k-1}^{k-1-m} (1-|\zeta|^2)^m \bar{\zeta}^{k-1-m} \frac{n! F^{(n+m)}(\zeta)}{(n+m)! F^{(n)}(\zeta)} \quad \forall \zeta \in E. \tag{27}$$

Пусть $p \geq 2$ — произвольно фиксированное натуральное число. Тогда из (27) при $k = 2, \dots, p$ получим для любого $\zeta \in E$ систему из $p-1$ уравнений:

$$\sum_{m=0}^{1} (-1)^{1-m} C_1^{1-m} \bar{\zeta}^{1-m} (1-|\zeta|^2)^m \frac{n! F^{(n+m)}(\zeta)}{(n+m)! F^{(n)}(\zeta)} = a_{2,n}(\zeta),$$

$$\sum_{m=0}^{2} (-1)^{2-m} C_2^{2-m} \bar{\zeta}^{2-m} (1-|\zeta|^2)^m \frac{n! F^{(n+m)}(\zeta)}{(n+m)! F^{(n)}(\zeta)} = a_{3,n}(\zeta),$$

$$\vdots$$

$$\sum_{m=0}^{p-1} (-1)^{p-1-m} C_{p-1}^{p-1-m} \bar{\zeta}^{m} (1-|\zeta|^2)^m \frac{n! F^{(n+m)}(\zeta)}{(n+m)! F^{(n)}(\zeta)} = a_{p,n}(\zeta)$$

с $p-1$ неизвестными

$$(1-|\zeta|^2)^l \frac{n! F^{(n+l)}(\zeta)}{(n+l)! F^{(n)}(\zeta)}, \quad l = 1, \dots, p-1.$$

Применяя обычный метод подстановки, приходим к выводу, что

$$\frac{n!F^{(n+p-1)}(\zeta)}{(n+p-1)!F^{(n)}(\zeta)} = \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^{p-1}} \sum_{m=0}^{p-1} C_{p-1}^m a_{p-m,n}(\zeta)\bar{\zeta}^m \quad \forall \zeta \in E. \tag{28}$$

В силу произвольного выбора $p \geq 2$ тождество (28) имеет место для любого натурального $p \geq 2$. Из (28) следуют оценки

$$\frac{n!|F^{(n+p-1)}(\zeta)|}{(n+p-1)!|F^{(n)}(\zeta)|} \leq \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^{p-1}} \sum_{m=0}^{p-1} C_{p-1}^m |a_{p-m,n}(\zeta)||\zeta|^m$$
$$\forall \zeta \in E, \ p = 2, 3, \dots. \tag{29}$$

Так как $\Psi(z;\zeta) \in \widetilde{K}_n(E)$ при любом $\zeta \in E$, из условия (24) вытекают неравенства

$$|a_{p-m,n}(\zeta)| \leq \frac{n+2(p-m)-1}{n+1} \quad \forall \zeta \in E, \ m = 0, 1, \dots, p-1. \tag{30}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\sum_{m=0}^{p-1} C_{p-1}^m \left(\frac{n+2(p-m)-1}{n+1}\right)|\zeta|^m = \left(\frac{n+2p-1}{n+1} + |\zeta|\right)(1+|\zeta|)^{p-2} \quad \forall \zeta \in E.$$

Значит, неравенства (29) можно записать следующим образом:

$$\frac{n!|F^{(n+p-1)}(\zeta)|}{(n+p-1)!|F^{(n)}(\zeta)|} \leq \frac{\frac{n+2p-1}{n+1} + |\zeta|}{(1+|\zeta|)(1-|\zeta|)^{p-1}} \quad \forall \zeta \in E, \ p = 2, 3, \dots. \tag{31}$$

Оценим $|F^{(n)}(\zeta)|$. Из (27) имеем

$$a_{2,n}(\zeta) = -\bar{\zeta} + (1-|\zeta|^2)\frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)F^{(n)}(\zeta)} \quad \forall \zeta \in E. \tag{32}$$

Если $p = 2$, $m = 0$, то из (30) следует $|a_{2,n}(\zeta)| \leq (n+3)/(n+1)$. Из (32) вытекает оценка

$$\left|\zeta\frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{F^{(n)}(\zeta)} - \frac{(n+1)r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{(n+3)r}{1-r^2} \quad \forall |\zeta| = r < 1.$$

Отсюда

$$\left|\mathrm{Re}\left\{\zeta\frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{F^{(n)}(\zeta)}\right\} - \frac{(n+1)r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{(n+3)r}{1-r^2} \quad \forall |\zeta| = r < 1. \tag{33}$$

Но

$$\mathrm{Re}\left\{\zeta\frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{F^{(n)}(\zeta)}\right\} = r\frac{\partial \ln |F^{(n)}(\zeta)|}{\partial r} \quad \forall |\zeta| = r < 1.$$

Теперь неравенство (33) можно заменить неравенствами

$$\frac{(n+1)r-(n+3)}{1-r^2} \leq \frac{\partial \ln |F^{(n)}\zeta|}{\partial r} \leq \frac{(n+1)r+(n+3)}{1-r^2} \quad \forall |\zeta| = r < 1. \tag{34}$$

Интегрируя неравенства (34) вдоль отрезка от нуля до r, получим

$$\frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^{n+2}} \leq \frac{|F^{(n)}(\zeta)|}{n!} \leq \frac{1+|\zeta|}{(1-|\zeta|)^{n+2}} \quad \forall \zeta \in E. \tag{35}$$

Опираясь на (31) и на правую часть неравенства (35) и меняя ζ на z, убеждаемся в справедливости оценок (25) для любого $p \geq 1$ и любого $z \in E$. Далее [22],

$$\frac{\Phi_{n,c}^{(n+p-1)}(z)}{(n+p-1)!} = c^{k-1}\frac{\frac{n+2p-1}{n+1} + cz}{(1-cz)^{n+p+1}} \quad \forall z \in E,\ 0 < |c| \leq 1,\ p = 1, 2, 3, \ldots. \tag{36}$$

Из (36) следует, что равенство в правой части (25) при любом $p \geq 1$ реализуется функциями $\Phi_{n,c}$, $|c| = 1$, из класса $\widetilde{K}_n(E)$. Очевидно, что равенство в левой части (25) реализуется функцией $z^n \in \widetilde{K}_n(E)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если в теореме 1 взять $n = 1$, то, как отмечалось выше, неравенства (25) были уже доказаны. Поэтому в теореме 7 в случае $n = 1$ неравенства (24) можно опустить и использовать их в процессе доказательства. Тогда снова получим неравенства (25) при $n = 1$. При этом наш метод в данном случае проще и существенно отличается от методов, предложенных Э. Ландау и И. А. Александровым.

Замечание 2. На самом деле с учетом оценок (21) для функций класса $S \equiv \widetilde{K}_1(E)$ в работе [23] доказана следующая более общая

Теорема 9. *Если $F(z) \in S$, то*

$$|[F(z); z_0, \ldots, z_n]| \leq \left(-1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-|z_m|}\right) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-|z_m|}$$

при любом $n \geq 0$ и любых $z_0, \ldots, z_n \in E$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $z_m = |z_m|e^{i\alpha}$, $m = 0, 1, \ldots, n$, где α — вещественное число (т. е. точки $z_0, \ldots, z_n$ расположены на радиусе круга E, наклоненном под углом α к вещественной оси), а функция $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = \frac{z}{(1-e^{-i\alpha}z)^2}.$$

При этом

$$\left[\frac{z}{(1-e^{-i\alpha}z)}; |z_0|e^{i\alpha}, \ldots, |z_n|e^{i\alpha}\right] = e^{-i(n-1)\alpha}\left(-1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-|z_n|}\right) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-|z_m|}.$$

Обозначим через $\widetilde{K}_n^R(E)$ множество функции из класса $\widetilde{K}_n(E)$, у которых все коэффициенты Маклорена являются вещественными числами.

Теорема 10. *Для любой функции*

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1} \tag{37}$$

из класса $\widetilde{K}_n^R(E)$ (n — нечетное число) справедливы неравенства

$$\frac{|F^{(n+p-1)}(x)|}{(n+p-1)!} \leq \frac{\frac{n+2p-1}{n+1} + |x|}{(1-|x|)^{n+p+1}} \quad \forall z \in E,\ p = 1, 2, 3, \ldots. \tag{38}$$

Равенство в (38) при любом $p \geq 1$ реализуется функциями

$$\Phi_{n,c}(z) = \frac{z^n}{(1-cz)^2}\left(1 + \frac{1-n}{1+n}cz\right) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} c^{k-1}\frac{n+2k-1}{n+1} z^{n+k-1}, \quad c = \pm 1, \tag{39}$$

принадлежащими классу $\widetilde{K}_n^R(E)$.

Доказательство. Если $n = 1$, то неравенства (21) для коэффициентов функции из класса $\widetilde{K}_1^R(E)$ доказаны в 1931 г. Дьедонне [24]. По условию теоремы $F(z) \in \widetilde{K}_n^R(E)$ и n — нечетное число. В [23] установлено, что для коэффициентов $a_{k,n}$ функции (37) неравенства (24) справедливы при любом нечетном n. Повторяя доказательство теоремы 7, везде будем полагать $\zeta = x$, где $-1 < x < 1$. Так как $\Psi(z; x) \in \widetilde{K}_n^R(E)$ и коэффициенты $a_{k,n}(x)$, $k = 2, 3, \ldots$, функции $\Psi(z; x)$ являются вещественными числами, в процессе доказательства теоремы 8 пользуемся оценками

$$|a_{p-m,n}(x)| \leq \frac{n + 2(p-m) - 1}{n+1} \quad \forall x \in (-1; 1),\ m = 0, 1, \ldots, p-1.$$

В итоге придем к неравенствам (38). Очевидно, равенство в (38) реализуется функциями (39), принадлежащими классу $\widetilde{K}_n^R(E)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И. А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Томский гос. ун-т, 2001.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
3. *Дженкинс Дж.* Однолистные функции и конформные отображения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
4. *Duren P. L.* Univalent functions. New York; Berlin: Heidelberg; Tokyo: Springer-Verl., 1983.
5. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975.
6. *Милин И. М.* Однолистные функции и ортонормированные системы. М.: Наука, 1971.
7. *Хейман В. К.* Многолистные функции. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
8. *Гельфонд А. О.* Исчисления конечных разностей. М.: Гостехиздат, 1952.
9. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. Киев: Наук. думка, 1975.
10. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971.
11. *Гончаров В. А.* Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехиздат, 1954.
12. *Уолш Д. Л.* Интерполирование и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
13. *Кирьяцкий Э. Г.* Некоторые свойства функций с отличной от нуля разделенной разностью // Литов. мат. сб. 1972. Т. 12, № 2. С. 43–55.
14. *Кирьяцкий Э. Г.* Многолистные функции и разделенные разности. Вильнюс: Техника, 1995.
15. *Kir'yatskii E. G.* Maximal domain of a family of rational functions // Math. Notes. 2004. V. 76, N 2. P. 183–190.
16. *Кирьяцкий Э. Г.* Об одном семействе однолистных в угловой области многочленов // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 3. С. 573–586.
17. *Bieberbach L.* Uber einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung // Math. Ann. 1916. Bd 77. S. 153–172.
18. *de Branges L.* A proof of the Bieberbach conjecture. Leningrad Branch of the V. A. Steklov Mathematical Institute, 1984. 21 p. (Preprint / LOMI; E-5-84).
19. *Landau E.* Einige Bemerkungen Über schlichte Abbildung // Über. Deutsch. Math.-Verein. 1925/26. Bd 34. S. 239–243.
20. *Schober G.* Univalent functions. Selected topics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1975.
21. *Александров И. А.* Доказательство Л. де Бранжа гипотезы И. М. Милина и гипотезы Л. Бибербаха // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 2. С. 7–20.
22. *Kir'yatskii E.* Distortion theorems in the class // Demonstr. Math. 2008. V. XLI, N 3. P. 543–549.

23. *Kir'yatzkii E. G.* Sharp estimates of Newton coefficients of univalent functions // Math. Notes. 2008. V. 84, N 5. P. 673–679.

24. *Dieudonné J.* Sur les fonctions univalentes // Compt. Rend. Acad. Sci. 1931. V. 192. P. 1148–1150.

Статья поступила 13 апреля 2011 г., окончательный вариант — 17 декабря 2011 г.

Кирьяцкий Эдуард Григорьевич
Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса,
ул. Саулетекио, 11, Вильнюс 10223, Литва
eduard.kiriyatzkii@takas.lt