Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 517.946.8

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВА

Б. А. Искендеров, Дж. Ю. Мамедов

Аннотация. Получены асимптотические разложения при больших значениях времени решения задачи Коши, первой и второй краевых задач в квадранте для уравнения Соболева.

Ключевые слова: задача Коши, краевая задача, асимптотика, уравнения Соболева.

При изучении малых колебаний вращающейся жидкости Соболевым в [1] выделен класс уравнений вида

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$, и для него изучена задача Коши и первая и вторая краевые задачи. В [2] проведено исследование поведения решения задачи Коши при $t \to \infty$. В литературе уравнения вида (1) (или системы) называют *уравнениями Соболева.* В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных изучению различных краевых задач для линейных и нелинейных уравнений Соболева. Более подробный список литературы можно найти в [3–7]. Разрешимость задачи Коши для общей системы уравнений, не разрешенной относительно временной производной, в классе квадратично суммируемых функций по x вместе с некоторым числом производных изучена в [8]. Теперь эта система называется *системой Соболева — Гальперна.* В [9] получена асимптотическая оценка при больших значениях времени решений задачи Коши и первой и второй краевых задач в квадранте $E_{n+1}^{++} = \{t > 0,\ x_n > 0,\ x' \in E_{n-1}\}$ для уравнения Соболева, где E_n — n-мерное евклидово пространство с элементами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. В [10] при больших значениях времени получены асимптотическое разложение в каждом компакте из E_2 и асимптотическая оценка в E_2 решения задачи Коши для системы Соболева.

В данной работе получены асимптотические разложения при $t \to +\infty$ решений задач, рассмотренных в [9]. Тематика этой работы явилась результатом нашей беседы с профессором Г. В. Демиденко в 2008 г., а также под влиянием работы [9], авторам которой мы глубоко благодарны.

Отметим также работы [11, 12], посвященные поведению при $t \to +\infty$ решений смешанных задач в неограниченной цилиндрической области для уравнений Соболева.

§ 1. Обозначения, постановка задачи и вспомогательные утверждения

Пусть $W_1^{(r)}(G)$ — пространство Соболева, где $G \subset E_n$ — некоторая область. Определим класс функций $W_{1,p}^{(r)}(G)$, полагая, что $\varphi(x) \in W_{1,p}^{(r)}(G)$, если

$$\left\|\varphi, W_{1,p}^{(r)}(G)\right\| = \sum_{|\alpha|\le r} \left\|(1+|x|^p) D_x^\alpha \varphi(x), L_1(G)\right\| < +\infty.$$

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения Соболева:

$$D_t^2 \Delta_n u_{(t,x)} + D_{x_n}^2 u(t,x) = 0, \quad t > 0,\ x \in E_n \quad (n \ge 2), \tag{2}$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad D_t u(t,x)|_{t=0} = \varphi_2(x), \tag{3}$$

где Δ_n — оператор Лапласа по $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для решения задачи Коши (1), (2), С. А. Гальперном [8] в классе функций, интегрируемых с квадратом по x с некоторым числом производных, получено представление

$$u(t,x) \equiv u_1(t,x) + u_2(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{E_n} e^{i(x,\xi)} \cos\left(t\frac{\xi_n}{|\xi|}\right) \widehat{\varphi}_1(\xi)\, d\xi$$
$$+ (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{E_n} e^{i(x,\xi)} \sin\left(t\frac{\xi_n}{|\xi|}\right) (\xi_n/|\xi|)^{-1} \widehat{\varphi}_2(\xi)\, d\xi,$$

где $\widehat{\varphi}_j(\xi)$, $j = 1, 2$, — преобразование Фурье функции $\varphi_j(x)$:

$$\widehat{\varphi}_j(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{E_n} e^{i(x,\xi)} \varphi_j(x)\, dx, \quad j = 1, 2. \tag{4}$$

Выпишем формулы перехода к сферическим координатам, необходимые в дальнейшем:

$$\xi_n = \rho\cos\theta_1, \quad \xi_{n-1} = \rho\sin\theta_1\cos\theta_2, \quad \dots \xi_1 = \rho\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2, \dots, \sin\theta_{n-1}, \tag{5}$$

где $0 \le \theta_\nu \le \pi$, $\nu = 1, 2, \dots, n-2$, $0 \le \theta_{n-1} \le 2\pi$; $\rho = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Обозначим $\vec{\theta} = (\theta_1, \vec{\theta'})$, $\vec{\theta'} = (\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{n-1})$. Приведем без доказательства лемму, которая необходима для дальнейшего.

Лемма. *Пусть $f(x) \in W_1^{(1)}(E_n)$. Тогда при $\rho \to \infty$*

$$\int\limits_{\Omega_\rho^{(n-1)}} f(\rho,\theta)\, d\theta \to 0,$$

где $\Omega_\rho^{(n-1)}$ — $(n-1)$-мерная сфера в E_n радиуса ρ с центром в начале координат.

Замечание. Если $f(\rho,\theta) = f(\rho)$ и $f(x) \in W_1^{(1)}(E_n)$, то из леммы при $\rho \to +\infty$ получаем

$$\rho^{n-1} f(\rho) = o(1), \quad f(\rho) = o(\rho^{1-n}).$$

§ 2. Асимптотическое разложение при $t \to +\infty$ решения задачи Коши

Теперь рассмотрим $u_\nu(t,x)$, $\nu = 1,2$. Для этого, используя равенство

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-r}\widetilde{(1-\Delta_n)^r}\varphi(x),$$

где волна над функцией означает ее преобразование Фурье, представим $u_\nu(t,x)$, $\nu = 1,2$, в виде

$$u_1(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{E_n} e^{i(x,\xi)}\cos\left(t\frac{\xi_n}{|\xi|}\right)(1+|\xi|^2)^{-r}\widetilde{(1-\Delta_n)^r}\varphi_1(\xi)\,d\xi,$$

$$u_2(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{E_n} e^{i(x,\xi)}\left(\frac{\xi_n}{|\xi|}\right)^{-1}\sin\left(t\frac{\xi_n}{|\xi|}\right)(1+|\xi|^2)^{-r}\widetilde{(1-\Delta_n)^r}\varphi_2(\xi)\,d\xi.$$

Применяя теорию преобразования Фурье обобщенных функций [13, с. 152–185], запишем $u_\nu(t,x)$, $\nu = 1,2$, в виде

$$\begin{aligned} u_1(t,x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{E_n}(1-\Delta_n)^r\varphi_1(y) \\ &\times\left[\int\limits_{E_n} e^{i(x-y,\xi)}\cos\left(t\frac{\xi_n}{|\xi|}\right)(1+|\xi|^2)^{-r}\,d\xi\right]dy \\ u_2(t,x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{E_n}(1-\Delta_n)^r\varphi_2(y) \\ &\times\left[\int\limits_{E_n} e^{i(x-y,\xi)}\left(\frac{\xi_n}{\xi}\right)^{-1}\sin\left(t\frac{\xi_n}{|\xi|}\right)(1+|\xi|^2)^{-r}\,d\xi\right]dy. \end{aligned}\tag{6}$$

Из (6) следует, что если $\varphi_\nu(x) \in W_{1,0}^{(2r)}(E_n)$, $\nu = 1,2$, $2r > n+2$, то $u(t,x) \in W_{1,0}^{(2,2)}(E_n\times(0,t))$, где $W_{1,p}^{(\alpha,\beta)}(E_n\times(0,t))$ определяется так же, как $W_{1,p}^{(\alpha)}(E_n)$, лишь с той разницей, что в определении $W_{1,p}^{(\alpha,\beta)}(E_n\times(0,t))$ надо заменить D_x^α на $D_x^\alpha D_t^\beta$.

Перейдя в (6) во внутреннем интеграле к сферическим координатам, получим

$$\begin{aligned} u_1(t,x) &= (2\pi)^{\frac{-n}{2}}\int\limits_{E_n}(1-\Delta_n)^r\varphi_1(y)\left\{\int\limits_0^\infty\frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^r}\right. \\ &\times\left.\left[\int\limits_0^\pi\cdots\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} e^{i(x-y,\rho T(\vec\theta))}\cos(t\cos\theta_1)\sin^{n-2}\theta_1\mathscr{F}(\theta_2,\dots,\theta_{n-1})\,d\vec\theta\right]d\rho\right\}dy, \\ u_2(t,x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{E_n}(1-\Delta_n)^r\varphi_2(y)\left\{\int\limits_0^\infty\frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^r}\right. \\ &\times\left.\left[\int\limits_0^\pi\cdots\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} e^{i(x-y,\rho T(\hat\theta))}\sin(t\cos\theta_1)\frac{\sin^{n-2}\theta_1}{\cos\theta_1}\mathscr{F}(\vec\theta')d\vec\theta\right]d\rho\right\}dy, \end{aligned}\tag{7}$$

где $\mathscr{F}(\vec{\theta}') = \sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2}$. Обозначим через $Q_\mu(t,x,\rho,\vec{\theta}')$, $\mu = 1,2$, интегралы по θ_1 в (7):

$$Q_1(t,x,\rho,\vec{\theta}') = \int\limits_0^\pi e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))}\cos(t\cos\theta_1)\sin^{n-2}\theta_1\,d\theta_1, \tag{8}$$

$$Q_2(t,x,\rho,\vec{\theta}') = \int\limits_0^\pi e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))}\sin(t\cos\theta_1)\frac{\sin^{n-2}\theta_1}{\cos\theta_1}\,d\theta_1. \tag{9}$$

Будем изучать асимптотическое разложение функций в (8), (9) при $t \to +\infty$. Отметим, что подынтегральные функции в (8), (9) имеют простые граничные стационарные точки $\theta_1 = 0$ и $\theta_1 = \pi$ [14, с. 207]. Напишем разложение единицы, учитывая граничные стационарные точки подынтегральной функции в (8):

$$1 \equiv \sum_{\mu=1}^{3}\psi_\mu(\theta_1), \tag{10}$$

где $\psi_1(\theta_1) \equiv 1$ при $\theta_1 \in [0,\delta]$, $\psi_1(\theta_1) \equiv 0$ при $\theta_1 \in [2\delta,\pi]$, $0 \le \psi_1(\theta_1) \le 1$ при $\theta_1 \in [\delta,2\delta]$; $\psi_2(\theta_1) \equiv 1$ при $\theta_1 \in [2\delta,\pi-2\delta]$, $\psi_2(\theta_1) \equiv 0$ при $\theta_1 \in [0,\delta]\cup[\pi-\delta,\pi]$, $0 \le \psi_2(\theta_1) \le 1$ при $\theta_1 \in [\delta,2\delta]\cup[\pi-2\delta,\pi-\delta]$; $\psi_3(\theta_1) \equiv 1$ при $\theta_1 \in [\pi-\delta,\pi]$, $\psi_3(\theta_1) \equiv 0$ при $\theta_1 \in [0,\pi-2\delta]$, $0 \le \psi_3(\theta_1) \le 1$ при $\theta_1 \in [\pi-2\delta,\pi-\delta]$, функции $\psi_j(\theta_1)$ бесконечно дифференцируемы, $\psi_1(\theta_1)$ в точке $\theta_1 = 2\delta$, $\psi_2(\theta_1)$ в точках $\theta_1 = \delta$, $\theta_1 = \pi-\delta$, а $\psi_3(\theta_1)$ в точке $\theta_1 = \pi - 2\delta$ имеют нуль бесконечного порядка, где δ — достаточно малое число. Используя разложение единицы (10), имеем

$$Q_1(t,x,\rho,\vec{\theta}') = \sum_{\mu=1}^{3}\int\limits_0^\pi \psi_\mu(\theta_1)e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))}\cos(t\cos\theta_1)\sin^{n-2}\theta_1\,d\theta_1$$
$$\equiv \sum_{\mu=1}^{3} Q_1^{(\mu)}(t,x,\rho,\vec{\theta}'). \tag{11}$$

Асимптотику функций $Q_1^{(\mu)}$, $\mu = \overline{1,3}$, при $t \to +\infty$ будем изучать методом стационарной фазы [14, с. 152–183]. Для этой цели представим $Q_1^{(\mu)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$, $\mu = \overline{1,3}$, в виде, удобном для применения метода стационарной фазы:

$$Q_1^{(\mu)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \psi_\mu(\theta_1)e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))}(e^{it\cos\theta_1} + e^{-it\cos\theta_1})\sin^{n-2}\theta_1\,d\theta_1$$
$$\equiv \frac{1}{2}\big(Q_{1,1}^{(\mu)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') + Q_{1,2}^{(\mu)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')\big). \tag{12}$$

Так как подынтегральные функции в $Q_1^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ и $Q_1^{(3)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ имеют простые граничные стационарные точки $\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \pi$ соответственно, к ним при $t \to +\infty$ применима теорема 1.5 из [14]. Сначала рассмотрим $Q_{1,1}^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$:

$$Q_{1,1}^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = t^{-\frac{1}{2}}e^{it}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k,1}^{(1)}t^{-\frac{k}{2}}, \tag{13}$$

где $a_{k,1}^{(1)}$ вычисляются по формуле

$$a_{k,1}^{(1)}(x,\rho,\vec{\theta}) = \frac{1}{2(k!)}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)e^{-\frac{i(k+1)\pi}{4}}\left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^k \times \left[\psi_1(\theta_1)e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))}\sin^{n-2}\theta_1(\cos\theta_1 - 1)^{-\frac{k+1}{2}}\theta_1^{k+1}\right]_{\theta_1=0}.$$

Отсюда

$$a_{k,1}^{(1)}(x,\rho,\vec{\theta}') = \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}2^{\frac{k+1}{2}}}{2(k!)}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)e^{i\frac{(k+1)}{4}\pi} \times \left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^k[\psi_1(\theta_1)e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))}\sin^{n-2}\theta_1]_{\theta_1=0}.$$

При $0 \le k \le n-3$ имеем $a_{k,1}^{(1)} = 0$, а при $k = n-2$, учитывая

$$\left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^{n-2}\sin^{n-2}\theta_1\Big|_{\theta_1=0} = (n-2)!,$$

приходим к равенству

$$a_{n-2,1}^{(1)}(x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{i(\frac{n-1}{4}\pi + x_n\rho)}.$$

Подставляя эти значения $a_{k,1}^{(1)}$ в асимптотическое разложение (13), получим

$$Q_{1,1}^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{i(\frac{n-1}{4}\pi + x_n\rho + t)}t^{\frac{1-n}{2}} + t^{-\frac{n}{2}}O(|x|\rho) \qquad (14)$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Таким же образом при $t \to +\infty$ изучается

$$Q_{1,1}^{(3)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = \int\limits_{\pi-2\delta}^{\pi}\psi_3(\theta_1)e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))}e^{it\cos\theta_1}\sin^{n-2}\theta_1\,d\theta_1.$$

Точка $\theta_1 = \pi$ — простая граничная стационарная точка для $Q_{1,1}^{(3)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$. В этом случае разложение при $t \to +\infty$ для $Q_{1,1}^{(3)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ в силу [14, теорема 1.5] имеет вид

$$Q_{1,1}^{(3)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = t^{-\frac{1}{2}}e^{-it}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k,1}^{(3)}t^{-\frac{k}{2}}, \qquad (15)$$

где

$$a_{k,1}^{(3)}(x,\rho,\vec{\theta}') = \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{2(k!)}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}(k+1)}\left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^k \times [\psi_3(\theta_1)e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))}\sin^{n-2}\theta_1(\cos\theta_1 + 1)^{-\frac{k+1}{2}}(\theta_1 - \pi)^{k+1}]_{\theta_1=\pi}.$$

Так как $a_{k,1}^{(3)} = 0$ при $0 \le k \le n-3$, учитывая, что

$$\left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^{n-2}\sin^{n-2}\theta_1\Big|_{\theta_1=\pi} = (-1)^n(n-2)!, \qquad (16)$$

при $k = n-2$ имеем

$$a_{n-2,1}^{(3)}(x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{-i(\frac{n-1}{4}\pi + x_n\rho)}.$$

Подставляя эти значения $a_{k,1}^{(3)}$ в разложение (15), получим

$$Q_{1,1}^{(3)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{-i(\frac{n-1}{4}\pi+x_n\rho+t)}t^{\frac{1-n}{2}} + t^{-\frac{n}{2}}O(|x|\rho) \tag{17}$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Аналогично изучается асимптотика при $t\to+\infty$ функций $Q_{1,2}^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ и $Q_{1,2}^{(3)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$. В этом случае

$$Q_{1,2}^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{i(x_n\rho-\frac{n-1}{4}\pi-t)}t^{\frac{1-n}{2}} + t^{-n/2}O(|x|\rho). \tag{18}$$

$$Q_{1,2}^{(3)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{-i(x_n\rho-\frac{n-1}{4}\pi-t)}t^{\frac{1-n}{2}} + t^{-n/2}O(|x|\rho) \tag{19}$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Из (12), (14), (18) и (12), (17), (19) получаем, что при $t\to+\infty$

$$\begin{gathered}Q_1^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{ix_n\rho}t^{\frac{1-n}{2}}\cos((n-1)\pi/4+t) + t^{-n/2}O(|x|\rho),\\ Q_1^{(3)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{-ix_n\rho}t^{\frac{1-n}{2}}\cos((n-1)\pi/4+t) + t^{-n/2}O(|x|\rho)\end{gathered} \tag{20}$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Рассмотрим $Q_1^{(2)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ при $t\to+\infty$. Функция $\psi_2(\theta_1)$ в промежутке $[\delta,\pi-\delta]$ бесконечно дифференцируема, в точках $\theta_1=\delta$, $\theta_1=\pi-\delta$ имеет нуль бесконечного порядка, а функция $\cos\theta_1$ в этом отрезке стационарных точек не имеет. Учитывая формулы

$$-\cos(t\cos\theta_1) = \frac{1}{t\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\sin(t\cos\theta_1),\quad \sin(t\cos\theta_1) = \frac{1}{t\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\cos(t\cos\theta_1), \tag{21}$$

интегрируя в $Q_1^{(2)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ по частям $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ раз по θ_1 и оценив полученный интеграл по модулю, имеем

$$Q_1^{(2)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = O((|x|\rho t^{-1})^{[\frac{n+1}{2}]}) \tag{22}$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Из (11), (20), (22) при $t\to+\infty$ следует, что

$$Q_1(t,x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma((n-1)/2)\cos x_n\rho t^{\frac{1-n}{2}}\cos((n-1)\pi/4+t) + t^{-n/2}O(|x|\rho) \tag{23}$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Введем функцию

$$B_1(x_n) = \int_0^\infty \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^r}\cos x_n\rho\,d\rho. \tag{24}$$

Подставляя выражение $Q_1(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ из (23) в $u_1(t,x)$ из (7), получим следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_1(x)\in W_{1,p}^{(2r)}(E_n)$, $\varphi_2(x)\equiv 0$. Тогда при $t\to+\infty$ для решения задачи Коши* (2), (3) *имеет место асимптотическое разложение*

$$u_1(t,x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\int_{E_n} B_1(x_n-y_n)(1-\Delta_n)^r\varphi_1(y)\,dy\right\}t^{\frac{1-n}{2}}\cos\left(\frac{n-1}{4}\pi+t\right) + C_1(x)t^{-\frac{n}{2}},$$

где $|C_1(x)| \leq D_1(n)(1+|x|^p)\|\varphi_1, W^{(2r)}_{1,p}(E_n)\|$, $p = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, $2r \geq p+n+1$, $D_1(n)$ — *константа, зависящая от* n.

Замечание. Учитывая, что

$$A(n) = \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathscr{F}(\vec{\theta}')\, d\vec{\theta}' = \int_0^\pi \sin^{n-3}\theta_2 d\theta_2 \cdots \int_0^\pi \sin\theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1}$$

и

$$\int_0^\pi \sin^{\alpha-1}\varphi\, d\varphi = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}, \quad \alpha > 0, \tag{25}$$

для $A(n)$ имеем $A(n) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$.

Изучим $u_2(t,x)$ при $t \to +\infty$. Рассмотрим асимптотику $Q_2(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ из (9) при больших значениях времени. Устроим разложение единицы применительно к $Q_2(t,x,\rho,\vec{\theta}')$:

$$1 \equiv \sum_{j=1}^{5} \psi_j^*(\theta_1), \tag{26}$$

здесь $\psi_j^*(\theta_1)$, $j = 1,\dots,5$, — бесконечно дифференцируемые функции, $\psi_j^*(\theta_1)$ и $\psi_5^*(\theta_1)$ равны $\psi_1(\theta_1)$ и $\psi_3(\theta_1)$ из разложения (10) соответственно, а $\psi_j^*(\theta_1)$, $j = 2,3,4$, определяются следующим образом: $\psi_2^*(\theta_1) \equiv 1$ при $\theta_1 \in [2\delta, \pi/2-2\delta]$, $0 \leq \psi_2^*(\theta_1) \leq 1$ при $\theta_1 \in [\delta, 2\delta] \cup [\pi/2-2\delta, \pi/2-\delta]$, $\psi_3^*(\theta_1) \equiv 1$ при $\theta_1 \in [\pi/2-\delta, \pi/2+\delta]$, $0 \leq \psi_3^*(\theta_1) \leq 1$ при $\theta_1 \in [\pi/2-2\delta, \pi/2-\delta] \cup [\pi/2+\delta, \pi/2+2\delta]$, $\psi_4^*(\theta_1) \equiv 1$ при $\theta_1 \in [\pi/2+2\delta, \pi-2\delta]$, $0 \leq \psi_4^*(\theta_1) \leq 1$ при $\theta_1 \in [\pi/2+\delta, \pi/2+2\delta] \cup [\pi-2\delta, \pi-\delta]$.

Используя разложение единицы (26), имеем

$$\begin{aligned} Q_2(t,x,\rho,\vec{\theta}') &= \sum_{j=1}^{5} \int_0^\pi \psi_j^*(\theta_1) e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))} \frac{\sin(t\cos\theta_1)}{\cos\theta_1} \sin^{n-2}\theta_1\, d\theta_1 \\ &\equiv \sum_{\mu=1}^{5} Q_2^{(\mu)}(t,x,\rho,\vec{\theta}'). \end{aligned} \tag{27}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в (27) при больших значениях времени. Для этой цели, как и выше, представим $Q_2^{(\mu)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$, $\mu = 1,5$, в виде

$$\begin{aligned} Q_2^{(\mu)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') &= \frac{1}{2i} \int_0^\pi \psi_\mu^*(\theta_1) e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))} \frac{1}{\cos\theta_1} (e^{it\cos\theta_1} - e^{-it\cos\theta_1}) \sin^{n-2}\theta_1\, d\theta_1 \\ &\equiv \frac{1}{2i}\left(Q_{2,1}^{(\mu)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') - Q_{2,2}^{(\mu)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')\right) \end{aligned} \tag{28}$$

Так как $Q_{2,j}^{(\mu)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$, $j = 1,2$, $\mu = 1,5$, имеют граничные стационарные точки $(\theta_1 = 0, \theta_1 = \pi)$, причем простые, то к ним при $t \to +\infty$ применима теорема 1.5 из [14]. Тогда

$$Q_{2,1}^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = t^{-\frac{1}{2}} e^{it} \sum_{k=0}^{\infty} b_{k,1}^{(1)} t^{-\frac{k}{2}}, \tag{29}$$

где $b_{k,1}^{(1)}$ вычисляются по формуле

$$b_{k,1}^{(1)}(x,\rho,\theta') = \frac{1}{2(k!)}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)e^{-\frac{i(k+1)}{4}\pi} \times \left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^k \left[\psi_1^*(\theta_1)e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))}\frac{\sin^{n-2}\theta_1}{\cos\theta_1}(\cos\theta_1-1)^{-\frac{k+1}{2}}\theta_1^{k+1}\right]_{\theta_1=0}.$$

Отсюда, как и выше, получаем $b_{k,2}^{(1)} = 0$ при $0 \le k \le n-3$, а при $k = n-2$, так как

$$\left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^{n-2}\left(\frac{\sin^{n-2}\theta}{\cos\theta_1}\right)\Bigg|_{\theta_1=0} = (n-2)!,$$

для $b_{n-2,1}^{(1)}$ имеем

$$b_{n-2,1}^{(1)}(x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{i(\frac{n-1}{4}\pi + x_n\rho)}.$$

Учитывая эти значения $b_{k,1}^{(1)}$ в (28), получим

$$Q_{2,1}^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{i(\frac{n-1}{4}\pi + x_n\rho + t)}t^{\frac{1-n}{2}} + t^{-\frac{n}{2}}O(|x|\rho) \tag{30}$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Асимптотика $Q_{2,2}^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ при $t \to +\infty$ вычисляется точно так же, как для $Q_{2,1}^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$. Проведя аналогичные вычисления, получим

$$Q_{2,2}^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{i(x_n\rho - \frac{n-1}{4}\pi - t)}t^{\frac{1-n}{2}} + t^{-\frac{n}{2}}O(|x|\rho) \tag{31}$$

равномерно по $\vec{\theta}'$. Из (28), (30) и (31) вытекает, что при $t \to +\infty$

$$Q_2^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{ix_n\rho}\sin((n-1)\pi/4 + t)t^{\frac{1-n}{2}} + t^{-\frac{n}{2}}O(|x|\rho) \tag{32}$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Рассмотрим теперь $Q_{2,1}^{(5)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ при $t \to +\infty$. Точка $\theta_1 = \pi$ является простой граничной стационарной точкой. Применяя теорему 1.5 из [14], получаем

$$Q_{2,1}^{(5)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = -t^{-\frac{1}{2}}e^{-it}\sum_{k=0}^{\infty} b_{k,1}^{(5)}t^{-\frac{k}{2}}, \tag{33}$$

где

$$b_{k,1}^{(5)}(x,\rho,\vec{\theta}') = \frac{1}{2(k!)}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)e^{i\frac{(k+1)}{4}\pi}\left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^k \times \left[\psi_5(\theta_1)e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))}\frac{\sin^{n-2}\theta_1}{\cos\theta_1}(-1)^{-\frac{k+1}{2}}(\cos\theta_1+1)^{-\frac{k+1}{2}}(\theta_1-\pi)^{k+1}\right]_{\theta_1=\pi}.$$

Здесь также $b_{k,1}^{(5)} = 0$ при $0 \le k \le n-3$. При $k = n-2$, учитывая

$$\left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^{n-2}\left(\frac{\sin^{n-2}\theta_1}{\cos\theta_1}\right)\Bigg|_{\theta_1=\pi} = (-1)^{n-1}(n-2)!, \tag{34}$$

имеем

$$b_{n-2,1}^{(5)}(x,\rho,\vec{\theta}') = -2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{-i(\frac{n-1}{4}\pi + x_n\rho)}. \tag{35}$$

Из (33), (35) при $t \to +\infty$ для $Q^{(5)}_{2,1}(t, x, \rho, \vec{\theta}')$ получим

$$Q^{(5)}_{2,1}(t, x, \rho, \vec{\theta}') = -2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{-i(\frac{n-1}{4}\pi + x_n\rho + t)}t^{\frac{1-n}{2}} + t^{-\frac{n}{2}}O(|x|\rho) \qquad (36)$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Рассмотрим асимптотику $Q^{(5)}_{2,2}(t, x, \rho, \vec{\theta}')$. Так как $\theta_1 = \pi$ — простая граничная стационарная точка, поступая, как при изучении $Q^{(5)}_{2,1}(t, x, \rho, \vec{\theta}')$, получим

$$Q^{(5)}_{2,2}(t, x, \rho, \vec{\theta}') = -t^{-\frac{1}{2}}e^{it}\sum_{k=0}^{\infty} b^{(5)}_{k,2}t^{-\frac{k}{2}}, \qquad (37)$$

где

$$b^{(5)}_{k,2}(x, \rho, \vec{\theta}') = \frac{(-1)^{-\frac{k+1}{2}}}{2(k!)}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)e^{-i\frac{(k+1)}{4}\pi}\left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^k \times \left[\psi^*_5(\theta_1)e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))}\frac{\sin^{n-2}\theta_1}{\cos\theta_1}(\cos\theta_1 + 1)^{-\frac{k+1}{2}}(\theta_1 - \pi)^{k+1}\right]_{\theta_1=\pi}.$$

Здесь, как и выше, $b^{(5)}_{k,2} = 0$ при $0 \le k \le n-3$. Используя формулу (34), получим

$$b^{(5)}_{n-2,2}(x, \rho, \vec{\theta}') = 2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{i(\frac{n-1}{4}\pi - x_n\rho)}.$$

Учитывая эти значения $b^{(5)}_{k,2}$ в разложении (37), имеем

$$Q^{(5)}_{2,2}(t, x, \rho, \vec{\theta}') = -2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{i(\frac{n-1}{4}\pi - x_n\rho + t)}t^{\frac{1-n}{2}} + +t^{-\frac{n}{2}}O(|x|\rho) \qquad (38)$$

равномерно по $\vec{\theta}'$. Из (28), (36) и (38) следует, что

$$Q^{(5)}_{2}(t, x, \rho, \vec{\theta}') = 2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma((n-1)/2)e^{-ix_n\rho}t^{\frac{1-n}{2}}\sin((n-1)\pi/4 + t) + t^{-\frac{n}{2}}O(|x|\rho) \quad (39)$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Далее $Q^{(2)}_{2}(t, x, \rho, \vec{\theta}')$ и $Q^{(4)}_{2}(t, x, \rho, \vec{\theta}')$ при $t \to +\infty$ оцениваются так же, как $Q^{(2)}_{1}(t, x, \rho, \vec{\theta}')$. Поэтому

$$Q^{(\mu)}_{2}(t, x, \rho, \vec{\theta}') = t^{-[\frac{n+1}{2}]}O((|x|\rho)^{[\frac{n+1}{2}]}), \quad \mu = 2, 4, \qquad (40)$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Рассмотрим асимптотику $Q^{(3)}_{2}(t, x, \rho, \vec{\theta}')$ при $t \to +\infty$. Интервал интегрирования $[\pi/2 - 2\delta, \pi/2 + 2\delta]$ в $Q^{(3)}_{2}(t, x, \rho, \vec{\theta}')$ содержит точку $\theta_1 = \pi/2$, которая является устранимой особой точкой для подынтегральной функции. Сделав замену $\cos\theta_1 = w$, можно показать, что при $t \to +\infty$ имеет место асимптотика

$$Q^{(3)}_{2}(t, x, \rho, \vec{\theta}') = \pi e^{i(x', \rho T(\vec{\theta}'))} + t^{-[\frac{n+1}{2}]}O((|x|\rho)^{[\frac{n+1}{2}]}) \qquad (41)$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Тогда из (27), (32), (39)–(41) при $t \to +\infty$ имеем

$$Q_2(t, x, \rho, \vec{\theta}') = \pi e^{i(x', \rho T(\vec{\theta}'))} + 2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma((n-1)/2) \times \sin((n-1)\pi/4 + t)t^{\frac{1-n}{2}}\cos x_n\rho + t^{-\frac{n}{2}}(1 + O((|x|\rho)^{[\frac{n+1}{2}]})). \qquad (42)$$

Для приведения асимптотики $u_2(t,x)$ при $t \to +\infty$ отметим формулу [15, с. 377]

$$\int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathscr{F}(\vec{\theta}')e^{i(x',\rho T(\vec{\theta}'))}d\theta' = \int_{\Omega_\rho^{(n-2)}} e^{i(x',\xi')}d\xi'$$
$$= (2\pi)^{\frac{n-3}{2}}(|x'|\rho)^{-\frac{n-3}{2}}J_{\frac{n-3}{2}}(|x'|\rho), \quad \rho = |\xi'|,$$

где $\Omega_\rho^{(n-2)}$ — $(n-2)$-мерная сфера в E_n радиуса ρ, а $J_{\frac{n-3}{2}}(z)$ — функция Бесселя первого рода, и примем обозначения

$$B_2(x') = \int_0^\infty \frac{\rho^{\frac{n+1}{2}}}{(1+\rho^2)^r} J_{\frac{n-3}{2}}(|x'|\rho)\,d\rho, \tag{43}$$

Учитывая асимптотику $J_{\frac{n-3}{2}}(z)$ при $z \to 0$, $z \to +\infty$ и $2r = p+n+1$, получаем, что интеграл в (43) сходится абсолютно и равномерно по $x' \in E_{n-1}$. Подставляя асимптотику $Q_2(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ из (42) в выражение $u_2(t,x)$ из (7), получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_1(x) \equiv 0$, $\varphi_2(x) \in W_{1,p}^{(2r)}(E_n)$. *Тогда при* $t \to +\infty$ *для решения задачи Коши* (2), (3) *имеет место асимптотическое разложение*

$$u_2(t,x) = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{E_n} |x'-y'|^{-\frac{n-3}{2}} B_2(x'-y')(1-\Delta_n)^r \varphi_2(y)\,dy$$
$$+ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{E_n} (1-\Delta_n)^r \varphi_2(y) B_1(x_n - y_n)\,dy \right\} t^{\frac{1-n}{2}} \sin\left(\frac{n-1}{4}\pi + t\right) + c_2(x)t^{-\frac{n}{2}}, \tag{44}$$

где $|c_2(x)| \le D_1(n)(1+|x|^p)\big\|\varphi_2, W_{1,p}^{(2r)}(E_n)\big\|$, $B_1(x_n)$ *определено в* (24), *а* $D_1(n)$ — *в теореме* 1, $2r \ge p+n$.

Как следует из асимптотики (44), решение задачи Коши (2), (3) с начальными данными $\varphi_1(x) \equiv 0$, $\varphi_2(x) \in W_{1,p}^{(2r)}(E_n)$, вообще говоря, при $t \to +\infty$ к нулю не стремится. Решение этой задачи при $t \to +\infty$ будет стремиться к нулю, как $t^{\frac{1-n}{2}}$ при дополнительном условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(y', y_n)\,dy_n = 0, \tag{45}$$

что отмечено также в [8]. Действительно, учитывая, что $\varphi_2(x) \in W_{1,p}^{(2r)}(E_n)$ и преобразуя в силу теоремы Фубини первое слагаемое в (45), получим

$$u_2^{(1)}(t,x) = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{E_{n-1}} |x'-y'|^{-\frac{n-3}{2}} B_2(x'-y')(1-\Delta_{n-1})^r \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(y)\,dy_n, \tag{46}$$

где Δ_{n-1} — оператор Лапласа по $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$. Учитывая условие (45) и преобразуя второе слагаемое в (44) из (45) и (46) при $t \to +\infty$ получим

$$u_2(t,x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \int_{E_n} \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)^r \varphi_2(y) B_1(x_n - y_n)\,dy \right\} t^{\frac{1-n}{2}}$$
$$\times \sin((n-1)\pi/4 + t) + c_2(x)t^{-\frac{n}{2}}.$$

Рассмотрим следующий вопрос: при каких условиях на начальные данные задачи (2), (3) скорость стремления решения задачи Коши можно увеличивать? Для этого в формулах (13), (15), (29), (33), (37) должно быть $a_{k,1}^{(1),(3)} = 0$, $a_{k,2}^{(1),(3)} = 0$; $b_{k,1}^{(1),(5)} = 0$, $b_{k,2}^{(1),(5)} = 0$ при $k \geq n-2$. Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть* $\varphi_\nu(x) \in W_{1,q}^{(2r)}(E_n)$, $\nu = 1, 2$, *где* $q = \left[\frac{n+N+2}{2}\right]$, $2r \geq n+1+q$, N — *любое натуральное число,*

$$\int\limits_{E_{n-1}} x_1^{s_1} \dots x_{n-1}^{s_{n-1}} \varphi_\nu(x)\, dx' = 0, \quad 0 \leq |s| = s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} \leq N \tag{47}$$

и, кроме того, выполнено условие (45).

Тогда при $t \to +\infty$ *для* $u_\nu(t,x)$ *имеет место асимптотическое разложение*

$$u_\nu(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\{ \int\limits_{E_n} (1-\Delta_n)^r \varphi_\nu(y) \left[\int\limits_0^\infty \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^r} L_{n,N}^{(\nu)}(x_n - y_n, \rho) \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^{2\pi} \mathscr{F}(\vec{\theta}')(i(x'-y'), \rho T(\vec{\theta}'))^{N+1}\, d\rho d\vec{\theta}' \right] dy \right\} t^{-\frac{n+N}{2}} q_\nu(t) + c_{\nu+1}(x) t^{-\left[\frac{n+N+2}{2}\right]}, \tag{48}$$

где

$$q_\nu(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{n-1}{4}\pi + t\right) & \text{при } \nu = 1, \\ \sin\left(\frac{n-1}{4}\pi + t\right) & \text{при } \nu = 2, \end{cases}$$

для $c_{\nu+1}(x)$ *имеют место оценки* (66) *при* $\nu = 1$ *и* (79) *при* $\nu = 2$ *и* $L_{n,N}^{(1),(2)}$ *определены формулами* (62), (74).

Доказательство. Рассмотрим коэффициенты $a_{k,1}^{(1)}$, $a_{k,2}^{(1)}$ разложений $Q_{1,1}^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ и $Q_{1,2}^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ из (13) и (15) при $k = n-2+j$ и $t \to +\infty$. Тогда

$$a_{n-2+j,1}^{(1)}(x,\rho,\vec{\theta}') = \frac{(-1)^{-\frac{n-1+j}{2}}}{(n-2+j)!} 2^{\frac{n-3+j}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right) e^{-i\frac{n-1+j}{4}\pi}$$
$$\times \left\{ \left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^j [\psi_1(\theta_1) e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))}] \left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^{n-2} \sin^{n-2}\theta_1 \right\}_{\theta_1=0}, \quad j = 0, 1, \dots, N. \tag{49}$$

В выражении $Q_{1,1}^{(1)}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ или остальные слагаемые равны нулю при $\theta_1 = 0$, или степень по x' меньше, чем j. Так как

$$\left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^j e^{(ix,\rho T(\vec{\theta}))} = (ix', \rho T(\vec{\theta}'))^j e^{(ix,\rho T(\vec{\theta}))} \cos^j\theta_1 + \dots$$
$$+ (-1)^j (ix_n\rho)^j \sin^j\theta_1 e^{(ix,\rho T(\vec{\theta}))}, \tag{50}$$

отсюда при $\theta_1 = 0$ и при больших $|x'|$ с учетом (49) получим

$$a_{n-2+j,1}^{(1)}(x,\rho,\vec{\theta}') = \frac{(n-2)!}{(n-2+j)!} 2^{\frac{n-3+j}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right)$$
$$\times (ix', \rho T(\vec{\theta}'))^j e^{i(\frac{n-1+j}{4}\pi + x_n\rho)} (1 + O((|x'|\rho)^{-2})). \tag{51}$$

Аналогичным образом из (13) при $k = n-2+j$ для $a^{(1)}_{n-2+j,2}$ имеем

$$a^{(1)}_{n-2+j,2}(x,\rho,\vec{\theta}') = \frac{(n-2)!}{(n-2+j)!} 2^{\frac{n-3+j}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right) (ix', \rho T(\vec{\theta}'))^j e^{i(x_n\rho - \frac{n-1+j}{4}\pi)}. \tag{52}$$

Из (13), (51) и (52) при $t \to +\infty$ получаем

$$\begin{aligned} Q^{(1)}_{1,1}(t,x,\rho,\vec{\theta}') &= \frac{(n-2)!}{(n-2+j)!} 2^{\frac{n-3+j}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right) \\ &\quad\times (ix', \rho T(\vec{\theta}'))^j e^{i(\frac{n-1+j}{4}\pi + x_n\rho + t)} t^{\frac{1-n-j}{2}} + t^{-\frac{n+j}{2}} O(|x|\rho), \\ Q^{(1)}_{1,2}(t,x,\rho,\vec{\theta}') &= \frac{(n-2)!}{(n-2+j)!} 2^{\frac{n-3+j}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right) \\ &\quad\times (ix', \rho T(\vec{\theta}'))^j e^{i(x_n\rho - \frac{n-1+j}{4}\pi - t)} t^{\frac{1-n-j}{2}} + t^{-\frac{n+j}{2}} O(|x|\rho) \end{aligned} \tag{53}$$

равномерно по $\vec{\theta}'$. Из (12) и (53) при $t \to +\infty$ следует, что

$$\begin{aligned} Q^{(1)}_{1}(t,x,\rho,\vec{\theta}') &= \frac{(n-2)!}{(n-2+j)!} 2^{\frac{n-1+j}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right) \\ &\quad\times (ix', \rho T(\vec{\theta}'))^j e^{ix_n\rho} t^{\frac{1-n-j}{2}} \cos((n-1+j)\pi/4 + t) + t^{-\frac{n+j}{2}} O(|x|\rho) \end{aligned} \tag{54}$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Аналогично определяем $a^{(3)}_{k,1}$ и $a^{(3)}_{k,2}$ разложений $Q^{(3)}_{1,1}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ и $Q^{(3)}_{1,2}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ из (15) при $k = n-2+j$:

$$\begin{aligned} a^{(3)}_{n-2+j,1}(x,\rho,\vec{\theta}') &= (-1)^{\frac{n-1+j}{2}} \frac{1}{2[(n-2+j)!]} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right) \\ &\quad\times e^{i\pi\frac{n-1+j}{4}} \left\{ \left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^j \left[\psi_3(\theta_1) \frac{e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))}}{\cos\theta_1} \right] \right. \\ &\quad\times \left. \left(\left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^{n-2} \sin^{n-2}\theta_1 \right) (\cos\theta_1 + 1)^{-\frac{n-1+j}{2}} (\theta_1 - \pi)^{n-1+j} \right\}_{\theta_1=\pi}. \end{aligned} \tag{55}$$

Учитывая формулы (16) и (50) из (55), получаем

$$\begin{aligned} a^{(3)}_{n-2+j,1}(x,\rho,\vec{\theta}') &= 2^{\frac{n-3+j}{2}} \frac{(n-2)!}{(n-2+j)!} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right) \\ &\quad\times (x', \rho T(\vec{\theta}'))^j e^{-i((\frac{n-1+j}{4}\pi) + x_n\rho)} (1 + O((|x'|\rho)^{-2})). \end{aligned} \tag{56}$$

Для $a^{(3)}_{n-2+j,2}$ имеем

$$\begin{aligned} a^{(3)}_{n-2+j,2}(x,\rho,\vec{\theta}') &= 2^{\frac{n-3+j}{2}} \frac{(n-2)!}{(n-2+j)!} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right) \\ &\quad\times (ix', \rho T(\vec{\theta}'))^j e^{i(\frac{n-1+j}{4}\pi - x_n\rho)} (1 + O((|x'|\rho)^{-2})) \end{aligned} \tag{57}$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Из (12), (55) и (12), (57) при $t \to +\infty$ для $Q^{(3)}_{1,1}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ и $Q^{(3)}_{1,2}(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ соответственно вытекает, что

$$\begin{aligned} Q^{(3)}_{1,1}(t,x,\rho,\vec{\theta}') &= 2^{\frac{n-3+j}{2}} \frac{(n-2)!}{(n-2+j)!} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right) \\ &\quad\times (x', \rho T(\vec{\theta}'))^j e^{-i(\frac{n-1+j}{4}\pi + x_n\rho + t)} t^{\frac{1-n-j}{2}} + t^{-\frac{n+j}{2}} O((|x'|\rho)^{-2}), \end{aligned} \tag{58}$$

$$Q_{1,2}^{(3)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-3+j}{2}} \frac{(n-2)!}{(n-2+j)!} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right) \times (x',\rho T(\vec{\theta}'))^j e^{i(\frac{n-1+j}{4}\pi - x_n\rho + t)} (1 + O((|x'|\rho)^{-2})) \quad (59)$$

равномерно по $\vec{\theta}'$. Тогда из (12), (58), (59) получаем

$$Q_1^{(3)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = 2^{\frac{n-1+j}{2}} \frac{(n-2)!}{(n-2+j)!} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right) \times (x',\rho T(\vec{\theta}'))^j e^{-ix_n\rho} \cos((n-1+j)\pi/4 + t) t^{\frac{1-n-j}{2}} + t^{-\frac{n+j}{2}} O((|x'|\rho)^{-2}) \quad (60)$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Используя формулу (21), интегрируя в $Q_1^{(2)}(t,x,\rho,\theta')$ по θ_1 по частям $\left[\frac{n+2+N}{2}\right]$ раз и оценивая по модулю полученный интеграл, имеем

$$Q_1^{(2)}(t,x,\rho,\vec{\theta}') = O((|x|\rho t^{-1})^{[\frac{n+2+N}{2}]}) \quad (61)$$

равномерно по $\vec{\theta}'$. Подставляя выражения $Q_1^{(1)}(t,x,\rho,\theta')$, $Q_1^{(2)}(t,x,\rho,\theta')$ и $Q_1^{(3)}(t,x,\rho,\theta')$ из (54), (60), (61) в (11), получим

$$Q_1(t,x,\rho,\vec{\theta}') = \sum_{j=0}^{N} L_{n,j}^{(1)}(x_n,\rho)(ix',\rho T(\vec{\theta}'))^j t^{\frac{1-n+j}{2}} + \cos\left(\frac{n-1+j}{4}\pi + t\right) + t^{-[\frac{n+N+2}{2}]}(1 + O((|x|\rho)^{[\frac{n+N+2}{2}]})),$$

где

$$L_{n,j}^{(1)}(x_n,\rho) = 2^{\frac{n-1+j}{2}} \frac{(n-2)!}{(n-2+j)!} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right) \cos x_n\rho. \quad (62)$$

Подставляя асимптотическое разложение $Q_1(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ из (62) в выражение $u_1(t,x)$ из (7) и заменяя при этом N на $N+1$ в выражении $Q_1(t,x,\rho,\vec{\theta}')$, имеем

$$u_1(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{E_n} (1-\Delta_n)^r \varphi_1(y) \left\{ \int_0^\infty \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^r} \int_0^\pi \cdots \int_0^{2\pi} \mathscr{F}(\vec{\theta}') \times \sum_{j=1}^{N+1} L_{n,j}(x_n - y_n,\rho)(i(x'-y'),\rho T(\vec{\theta}'))^j \times t^{\frac{1-n-j}{2}\cos(\frac{n-1+j}{4}\pi + t) + } t^{-[\frac{n+N+2}{2}]}(1 + O((|x-y|\rho)^{[\frac{n+N+2}{2}]}))\, d\rho d\vec{\theta}' \right\} dy. \quad (63)$$

Применяя вторую формулу Грина r раз и учитывая лемму, получим

$$\int_{E_n} (1-\Delta_n)^r \varphi_1(y)(i(x'-y'),\rho T(\vec{\theta}'))^j\, dy = (-1)^r \int_{E_n} \varphi_1(y)(1-\Delta_n)^r (i(x'-y',\rho T(\vec{\theta}')))^j\, dy. \quad (64)$$

Так как степень многочлена $(1-\Delta_n)^r(y',\rho T(\vec{\theta}'))^j$ по y' не больше, чем $j \le N$, по теореме 3 из (64) следует, что

$$\int_{E_n} (1-\Delta_n)^r \varphi_1(y)(i(x'-y'),\rho T(\vec{\theta}'))^j\, dy = 0. \quad (65)$$

Применяя (65) в (63), при $t \to +\infty$ для решения $u_1(t,x)$ задачи Коши (2), (3) получим следующее разложение:

$$u_1(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Bigg\{ \int\limits_{E_n} (1-\Delta_n)^r \varphi_1(y) \int\limits_0^\infty \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^r} L^{(1)}_{n,N}(x_n - y_n, \rho)$$
$$\times \left[\int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^{2\pi} \mathscr{F}(\vec{\theta}')(i(x'-y'), \rho T(\vec{\theta}'))^{N+1}\, d\vec{\theta}' \right] d\rho dy \Bigg\}$$
$$\times\, t^{-\frac{n+N}{2}} \cos((n-1)\pi/4 + t) + c_2(x) t^{-[\frac{n+N+2}{2}]},$$

где

$$|c_2(x)| \le D_2(n,N)(1+|x|^q)\big\|\varphi_1, W^{(2r)}_{1,q}(E_n)\big\|, \tag{66}$$

$q = [(n+N+2)/2]$, $2r \ge n+1+q$, $D_2(n,N)$ — константа, зависящая от (n,N).

Изучим $u_2(t,x)$ при $t \to +\infty$. Поступая так же, как при изучении $a^{(1)}_{n-2+j,1}$, получим

$$b^{(1)}_{n-2+j,1}(x,\rho,\vec{\theta}') = \frac{(n-2)!}{(n-2+j)!} 2^{\frac{n-3+j}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right)(ix', \rho T(\vec{\theta}'))^j e^{i(\frac{n-1+j}{4}\pi + x_n\rho)} \tag{67}$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Из формулы (29) при $k = n-2+j$ для $b^{(1)}_{n-2+j,2}$ вытекает, что

$$b^{(1)}_{n-2+j,2}(x,\rho,\vec{\theta}') = \frac{(n-2)!}{(n-2+j)!} 2^{\frac{n-3+j}{2}}$$
$$\times\, \Gamma((n-1+j)/2)(ix', \rho T(\vec{\theta}'))^j e^{i(x_n\rho - \frac{n-1+j}{4}\pi)}(1 + O((|x'|\rho)^{-2})). \tag{68}$$

Подставляя выражения $b^{(1)}_{n-2+j,1}$ и $b^{(1)}_{n-2+j,2}$ из (67), (68) в $Q^{(1)}_2(t,x,\rho,\theta')$ из (28), при $t \to +\infty$ получим

$$Q^{(1)}_2(t,x,\rho,\vec{\theta}') = \frac{(n-2)!}{(n-2+j)!} 2^{\frac{n-3+j}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right)$$
$$\times\, (ix', \rho T(\vec{\theta}'))^j e^{ix_n\rho} t^{\frac{1-n-j}{2}} \sin((n-1+j)\pi/4 + t) + t^{-\frac{n+j}{2}} O(|x'|\rho) \tag{69}$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Рассмотрим теперь коэффициенты разложения $Q^{(5)}_2(t,x,\rho,\theta')$ при $t \to +\infty$. Тогда по формуле (33) при $k = n-2+j$

$$b^{(5)}_{n-2+j,1}(x,\rho,\vec{\theta}') = (-1)^{-\frac{n-3+j}{2}} \frac{2^{\frac{n-3+j}{2}}}{(n-2+j)!} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right) e^{\frac{i(n-1+j)\pi}{4}}$$
$$\times \left\{ \left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^j [\psi^*_1(\theta_1) e^{i(x,\rho T(\vec{\theta}))}] \left(\frac{d}{d\theta_1}\right)^{n-2} \left(\frac{\sin^{n-2}\theta_1}{\cos\theta_1}\right) \right\}_{\theta_{1=\pi}}. \tag{70}$$

Учитывая формулы (34) и (50), из (70) выводим, что

$$b^{(5)}_{n-2+j,1}(x,\rho,\vec{\theta}') = -\frac{2^{\frac{n-3+j}{2}}(n-2)!}{(n-2+j)!} \Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right)$$
$$\times\, e^{-i(\frac{n-1+j}{4}\pi + x_n\rho)}(ix', \rho T(\bar{\theta}'))^j (1 + O((|x'|\rho)^{-2})) \tag{71}$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Из формул (34), (37), (50) при $k = n-2+j$ следует, что

$$b^{(5)}_{n-1+j,2}(x,\rho,\vec{\theta}') = -\frac{2^{\frac{n-3+j}{2}}(n-2)!}{(n-2+j)!}\Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right) \times e^{i(\frac{n-1+j}{4}\pi - x_n\rho)}(ix', \rho T(\bar{\theta}'))^j(1+O((|x'|\rho)^{-2})) \quad (72)$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Подставляя выражения $b^{(5)}_{n-2+j,1}$ и $b^{(5)}_{n-2+j,2}$ из (71), (72) в выражения $Q^{(5)}_2(t,x,\rho,\theta')$ из (28), при $t\to+\infty$ получим

$$Q^{(5)}_2(t,x,\rho,\vec{\theta}') = \frac{2^{\frac{n-3+j}{2}}(n-2)!}{(n-2+j)!}\Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right)(ix', \rho T(\bar{\theta}'))^j \times e^{-ix_n\rho} + t^{\frac{1-n-j}{2}}\sin((n-1+j)\pi/4+t) + t^{-\frac{n+j}{2}}O(|x'|\rho) \quad (73)$$

равномерно по $\vec{\theta}'$.

Из выражений $Q^{(1)}_2(t,x,\rho,\theta'), Q^{(5)}_2(t,x,\rho,\theta')$ и (69), (73) имеем

$$Q^{(1)}_2(t,x,\rho,\vec{\theta}') + Q^{(5)}_2(t,x,\rho,\vec{\theta}') = \sum_{j=0}^{N} L^{(2)}_{n,j}(x_n,\rho)(ix', \rho T(\vec{\theta}'))^j t^{\frac{1-n-j}{2}}\sin\left(\frac{n-1+j}{4}\pi + t\right) + t^{-\frac{n+N}{2}}O(|x|\rho),$$

где

$$L^{(2)}_{n,j}(x_n,\rho) = (n-2)!\sum_{j=0}^{N}\frac{2^{\frac{n-1+j}{2}}}{(n-2+j)!}\Gamma\left(\frac{n-1+j}{2}\right)\cos x_n\rho. \quad (74)$$

В выражениях $Q^{(2)}_2(t,x,\rho,\theta')$ и $Q^{(4)}_2(t,x,\rho,\theta')$, интегрируя по частям $q = \left[\frac{n+2+N}{2}\right]$ раз и оценивая по модулю полученные выражения, будем иметь

$$Q^{(\mu)}_2(t,x,\rho,\vec{\theta}') = t^{-q}O((|x|\rho)^q), \quad \mu = 2,4, \quad (75)$$

равномерно по $\vec{\theta}'$. В выражении $Q^{(3)}_2(t,x,\rho,\theta')$, заменяя n на $n+N$, при $t\to+\infty$ получим

$$Q^{(3)}_2(t,x,\rho,\vec{\theta}') = \pi e^{(ix',\rho T(\vec{\theta}'))} + t^{-q}O((|x|\rho)^q). \quad (76)$$

Из выражений (74)–(76) при $t\to+\infty$, заменяя при этом N на $N+1$, имеем, что

$$Q_2(t,x,\rho,\vec{\theta}') = \pi e^{(ix',\rho T(\vec{\theta}'))} + \sin\left(\frac{n-1}{4}\pi + t\right)\sum_{j=0}^{N+1} L^{(2)}_{n,j}(x_n,\rho)(ix',\rho T(\vec{\theta}'))^j t^{\frac{1-n-j}{2}} + t^{-q}O((|x|\rho)^q). \quad (77)$$

Подставляя асимптотическое разложение $Q_2(t,x,\rho,\vec{\theta}')$ из (77) в выражение $u_2(t,x)$ из (7), при $t\to+\infty$ для $u_2(t,x)$ получим

$$u_2(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{E_n}(1-\Delta_n)^r\varphi_2(y)\left\{\int\limits_0^\infty \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^r}\int\limits_0^\pi\cdots\int\limits_0^{2\pi}\mathscr{F}(\vec{\theta}')\right.$$

$$\times\left[\pi e^{i((x'-y'),\rho T(\vec{\theta}'))}+\sum_{j=0}^{N+1}L_{n,j}^{(2)}(x_n-y_n\rho)t^{\frac{1-n-j}{2}}\right.$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{n-1}{4}\pi+t\right)(i(x'-y'),\rho T(\vec{\theta}'))^j+t^{-q}O((|x|\rho)^q)\right]dpd\vec{\theta}'\Bigg\}dy. \quad (78)$$

Преобразуем каждое слагаемое в (78), учитывая при этом условия (45) и (47). Рассмотрим первое слагаемое в (78). В силу того, что $\varphi_2(y)\in W_{1,q}^{(2r)}(E_n)$, $2r\geq n+1+q$, и леммы по теореме Фубини из условия (42) получим

$$J_1^{(2)}(x',\rho,\vec{\theta}')=\int\limits_{E_n}(1-\Delta_n)^r\varphi_2(y)e^{i(x'-y',\rho T(\vec{\theta}'))}\,dy$$

$$=\int\limits_{E_n}(1-\Delta_{n-1})^r\varphi_2(y)e^{(i(x'-y'),\rho T(\vec{\theta}'))}\,dy$$

$$=\int\limits_{E_{n-1}}e^{i(x'-y',\rho T(\vec{\theta}'))}\left\{(1-\Delta_{n-1})^r\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(y)dy_n\right\}dy'=0.$$

Остальные слагаемые в (78), которые обозначим через $J_{1,j}^{(2)}(x',\rho,\vec{\theta}')$, рассматриваются точно так же, как в (64), (65). Отсюда в силу условия (45)

$$J_{1,j}^{(2)}(x',\rho,\vec{\theta}')=0.$$

Тогда из (78) для $u_2(t,x)$ при $t\to+\infty$ получим следующее разложение:

$$u_2(t,x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left\{\int\limits_{E_n}(1-\Delta_n)^r\varphi_2(y)\left[\int\limits_0^{\infty}\frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^r}\right.\right.$$

$$\left.\left.\int\limits_0^{\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi}\mathscr{F}(\vec{\theta}')L_{n,N+1}^{(2)}(x_n-y_n,\rho)(i(x'-y'),\rho T(\vec{\theta}'))^{N+1}\,d\rho d\vec{\theta}'\right]dy\right\}$$

$$\times t^{-\frac{n+N}{2}}\sin((n-1)\pi/4+t)+c_3(x)t^{-[\frac{n+N+2}{2}]},$$

где

$$|c_3(x)|\leq D_2(n,N)(1+|x|^q)\big\|\varphi_2,W_{1,q}^{(2r)}(E_n)\big\|, \quad (79)$$

$D_2(n,N)$ — константа, зависящая от n,N. Объединяя (66) и (79), получим доказательство теоремы 3.

Как в [9], добавляя к (2) следующие условия:

$$u(t,x)|_{t=0}=\varphi_1(x),\quad D_tu(t,x)|_{t=0}=\varphi_2(x),\quad x_n>0,\ x'\in E_{n-1}, \quad (3')$$

$$B(D)u(t,x)|_{x_n=0}=0, \quad (4')$$

при $B(D)=I$ получаем первую краевую задачу и при $B(D)=(D_t^2+I)Dx_n$ — вторую.

В случае первой краевой задачи нечетно продолжим функции $\varphi_\nu(x)$, $\nu=1,2$, по x_n на E_n с сохранением класса, которые обозначим через $\overline{\varphi}_\nu(x)$. Тогда для функции $\overline{\varphi}_2(x)$ будет выполняться условие

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\varphi}_2(x',x_n)\,dx_n=0.$$

Следствие 1. *Пусть функции* $\overline{\varphi}_\nu(x)$, $\nu = 1, 2$, *удовлетворяют условиям теоремы* 3. *Тогда для решения первой краевой задачи* (2), (3′), (4′) *при* $t \to +\infty$ *имеет место асимптотическое разложение* (48).

В случае второй краевой задачи (2), (3′), (4′) четно продолжим функции $\varphi_\nu(x)$, $\nu = 1, 2$, по x_n на E_n с сохранением класса, которые также обозначим через $\bar{\varphi}_\nu(x)$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда при* $t \to +\infty$ *для решения второй краевой задачи* (2), (3′), (4′) *имеет место асимптотическое разложение* (48).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.

2. *Sobolev S. L.* Sur une classe des problemes de physique mathematique // 48 Reunione Soc. Ital. Progr. Sci. Roma. 1965. P. 192–208.

3. *Зеленяк Т. И., Михайлов В. П.* Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач математической физики при $t \to \infty$ // Тр. симпозиума, посвященного 60-летию академика С. Л. Соболева. М.: Наука, 1970. С. 96–118.

4. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986.

5. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.

6. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.

7. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

8. *Гальперн С. А.* Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными // Тр. Моск. мат. о-ва. 1960. Т. 9. С. 401–423.

9. *Успенский С. В., Демиденко Г. В.* О поведении на бесконечности решений одной задачи С. Л. Соболева // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 5. С. 199–210.

10. *Масленникова В. Н., Боговский М. Е.* О системах Соболева в случае двух пространственных переменных // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 5. С. 1088–1110.

11. *Искендеров Б. А.* Поведение при $t \to +\infty$ решения смешанной задачи для уравнения Соболева в цилиндрической области // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 9. С. 1366–1378.

12. *Искендеров Б. А., Мамедов Дж. Ю., Сулейманов С. Э.* Смешанная задача для уравнения гравитационно гироскопических волн в приближении Буссинеска в неограниченной цилиндрической области // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 9. С. 1659–1675.

13. *Гельфанд И. М. Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып 2. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.

14. *Федорюк М. В.* Асимптотика, интегралы и ряды. М.: Наука, 1978.

15. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. М.: Физматгиз, 1960.

Статья поступила 13 декабря 2010 г., окончательный вариант — 20 февраля 2012 г.

Искендеров Бала Ага-Гусейн оглы, Мамедов Джахид Юсиф оглы,
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ул. Ф. Агаева, 9, Баку AZ 1141, Азербайджан
balaiskenderov07@rambler.ru