Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 512.554

ЙОРДАНОВЫ СУПЕРАЛГЕБРЫ ВЕКТОРНОГО ТИПА И ПРОЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ

В. Н. Желябин

Аннотация. Изучается связь между йордановыми супералгебрами векторного типа и конечно порожденными проективными модулями ранга 1 над областью целостности.

Ключевые слова: йорданова супералгебра, супералгебра векторного типа, дифференциально простая алгебра, область целостности, поле частных, алгебра полиномов, проективный модуль, группа Пикара.

Посвящается 90-летию со дня рождения
Анатолия Илларионовича Ширшова

Хорошо известна [1, 2] конструкция Кантора, которая по ассоциативно-коммутативной алгебре с дифференцированием позволяет построить йорданову супералгебру. Полученная таким образом йорданова супералгебра принадлежит классу супералгебр векторного типа. Супералгебры векторного типа играют важную роль при построении контрпримеров. В [3] построены примеры первичных $(-1,1)$-алгебр и йордановых алгебр с абсолютными делителями нуля, так называемых «монстров Пчелинцева». В [4] с помощью йордановых супералгебр векторного типа были даны другие конструкции «монстров Пчелинцева». В [5] с помощью супералгебр векторного типа получены примеры первичных алгебр с абсолютными делителями нуля в многообразии альтернативных, йордановых и $(-1,1)$-алгебр. Йордановы супералгебры векторного типа с одним дифференцированием изучались в работах [2, 6]. Так, в [2] найден критерий простоты йордановой супералгебры. В [6] доказана специальность таких йордановых супералгебр. В [7] построена универсальная ассоциативная обертывающая алгебра для простой йордановой супералгебры векторного типа с одним дифференцированием.

В [8, 9] описаны унитальные простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью A, нечетная часть M которых является ассоциативным A-модулем. Если супералгебра не является супералгеброй невырожденной билинейной суперформы, то ее четная часть A — дифференциально простая алгебра относительно некоторого множества дифференцирований, а нечетная часть M — конечно порожденный проективный A-модуль ранга 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00938–а), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракты № 02.740.11.0429, 02.740.11.5191, 14.740.11.0346).

Умножение в M задается с помощью фиксированных конечных множеств дифференцирований и элементов алгебры A. Кроме того, каждая такая йорданова супералгебра является подсупералгеброй в супералгебре векторного типа $J(\Gamma, D)$ с одним дифференцированием D. Если число порождающих A-модуля M равно 1, то исходная йорданова супералгебра является супералгеброй векторного типа $J(\Gamma, D)$. При некоторых ограничениях на алгебру A нечетная часть M является однопорожденным A-модулем. Так, например, если A — локальная алгебра, то по известной теореме Капланского нечетная часть M является свободным, а следовательно, однопорожденным A-модулем. Если основное поле имеет характеристику $p > 2$, то в силу [10] A является локальной алгеброй, поэтому нечетная часть M — однопорожденный A-модуль. Если A — кольцо с однозначным разложением на множители, то, как известно (см. например, [11]), нечетная часть M — свободный, а поэтому однопорожденный A-модуль.

Первый пример простой супералгебры векторного типа с несколькими дифференцированиями над полем действительных чисел, который неизоморфен алгебре $J(\Gamma, D)$, построен И. П. Шестаковым. Этот пример описан в [9]. Пример подобной супералгебры, но уже над полем характеристики нуль, в котором неразрешимо уравнение $t^2+1 = 0$, дан в [12, 13]. Наконец, в [14] построен пример простой супералгебры векторного типа с несколькими дифференцированиями над произвольным полем нулевой характеристики. Этот пример йордановой супералгебры является ответом на вопрос из [15].

Отметим также работу [16], к которой восходят данные исследования. Простые йордановы супералгебры изучались в [17–22].

В данной работе изучается связь йордановых супералгебр векторного типа с конечно порожденными проективными модулями ранга 1 над областью целостности A. В частности, указаны обратимые идеалы четной части супералгебры векторного типа, которые изоморфны ее нечетной части. Для конечно порожденного проективного A-модуля M ранга 1 найдены условия, при которых существует супералгебра векторного типа с четной частью A и нечетной частью M.

Пусть F — поле характеристики не 2. Супералгебра $J = J_0 + J_1$ — это $\mathbb{Z}_2$-градуированная F-алгебра, т. е.

$$J_0^2 \subseteq J_0, \quad J_1^2 \subseteq J_0, \quad J_1 J_0 \subseteq J_1, \quad J_0 J_1 \subseteq J_1.$$

Положим $A = J_0$ и $M = J_1$. Пространство A (M) называется *четной* (*нечетной*) *частью супералгебры* J. Элементы множества $A \cup M$ называются *однородными*. Выражение $p(x)$, где $x \in A \cup M$, означает индекс четности однородного элемента x: $p(x) = 0$, если $x \in A$ (x — четный), и $p(x) = 1$, если $x \in M$ (x — нечетный). Для элемента x из J через R_x обозначим оператор правого умножения на элемент x. Супералгебра J называется *йордановой*, если для однородных элементов выполнимы следующие операторные тождества:

$$aR_b = (-1)^{p(a)p(b)} bR_a, \tag{1}$$

$$R_{a^2} R_a = R_a R_{a^2}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} R_a R_b R_c &+ (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)+p(b)p(c)} R_c R_b R_a + (-1)^{p(b)p(c)} R_{(ac)b} \\ &= R_a R_{bc} + (-1)^{p(a)p(b)} R_b R_{ac} + (-1)^{p(a)p(c)+p(b)p(c)} R_c R_{ab}. \end{aligned} \tag{3}$$

Приведем некоторые примеры йордановых супералгебр. Пусть $B = B_0 + B_1$ — ассоциативная Z_2-градуированная алгебра с операцией умножения $*$. Определив на пространстве B суперсимметрическое произведение

$$a \circ_s b = \frac{1}{2}(a * b + (-1)^{p(a)p(b)} b * a), \quad a, b \in B_0 \cup B_1,$$

получим йорданову супералгебру $B^{(+)s}$. Йорданова супералгебра $J = A + M$ называется *специальной*, если она вложима (как Z_2-градуированная алгебра) в супералгебру $B^{(+)s}$ для подходящей ассоциативной Z_2-градуированной алгебры B.

Пусть Γ — ассоциативная коммутативная F-алгебра с ненулевым дифференцированием D. Обозначим через Γx изоморфную копию пространства Γ. Рассмотрим прямую сумму пространств $J(\Gamma, D) = \Gamma + \Gamma x$ и определим на $J(\Gamma, D)$ умножение $(\cdot)$ по правилам

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot bx = (ab)x, \quad ax \cdot b = (ab)x, \quad ax \cdot bx = D(a)b - aD(b),$$

где $a, b \in \Gamma$ и ab — произведение в Γ. Супералгебра $J(\Gamma, D)$ называется *йордановой супералгеброй векторного типа*. Тогда $J(\Gamma, D)$ — йорданова супералгебра с четной частью $A = \Gamma$ и нечетной $M = \Gamma x$. Супералгебра $J(\Gamma, D)$ проста тогда и только тогда, когда алгебра Γ D-проста [2] (т. е. Γ не содержит собственных ненулевых D-инвариантных идеалов и $\Gamma^2 = \Gamma$).

Рассмотрим ассоциативную супералгебру $B = M_2^{1,1}(\operatorname{End}\Gamma)$ с четной частью

$$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}, \quad \text{где } \phi, \psi \in \operatorname{End}\Gamma \right\}$$

и нечетной частью

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \psi & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \phi, \psi \in \operatorname{End}\Gamma \right\}.$$

В [6] доказано, что отображение

$$a + bx \mapsto \begin{pmatrix} R_a & 4R_bD + 2R_{D(b)} \\ -R_b & R_a \end{pmatrix}$$

является вложением супералгебры $J(\Gamma, D)$ в супералгебру $B^{(+)s}$, можно считать, что Γ содержит единицу. Следовательно, йорданова супералгебра $J(\Gamma, D)$ специальна.

В [9] доказана следующая

Теорема. *Пусть $J = A + M$ — унитальная простая специальная йорданова супералгебра, ее четная часть A — ассоциативная алгебра, а нечетная часть M — ассоциативный A-модуль. Предположим, что J не является супералгеброй невырожденной билинейной суперформы. Тогда существуют такие элементы $x_1, \dots, x_n \in M$, что $M = Ax_1 + \dots + Ax_n$ и произведение в M задается равенством*

$$ax_i \cdot bx_j = \gamma_{ij}ab + D_{ij}(a)b - aD_{ji}(b), \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{4}$$

где $\gamma_{ij} \in A$, а D_{ij} — дифференцирование алгебры A. Алгебра A дифференциально проста относительно множества дифференцирований $\Delta = \{D_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$. Модуль M является проективным A-модулем ранга 1. Кроме того, супералгебра J является подалгеброй супералгебры $J(\Gamma, D)$.

Если число порождающих n равно 1, то, как легко видеть, $J = J(A, D)$, где $D = D_{11}$. Если A-модуль M не является однопорожденным модулем, т. е.

супералгебра J неизоморфна $J(\Gamma, D)$, то F — поле характеристики нуль, а алгебра A не содержит делителей нуля.

Отметим некоторые свойства четной и нечетной частей супералгебры J, удовлетворяющей условию теоремы и неизоморфной алгебре $J(\Gamma, D)$. Модуль M не имеет A-кручений. Как известно (см. например, [9]), для $x, y \in M$ отображение $D_{x,y} : A \mapsto A$, заданное правилом $D_{x,y}(a) = (a, x, y)$, является дифференцированием. Справедливы равенства

$$bD_{x,y}(a) = D_{bx,y}(a) = D_{x,by}(a),\ D_{x,y}(a)D_{u,v}(a) = D_{u,y}(a)D_{x,v}(a),\ D_{x,y} = D_{y,x}$$

для любых $a, b \in A$ и $x, y \in M$. Более того, $D_{ij} = D_{x_i,x_j}$ и $D_{jk}(a)x_i = D_{ik}(a)x_j$ для $i, j = 1, \dots, n$. Отсюда получаем, что $D_{jk}(a)x_i \cdot x_l = D_{ik}(a)x_j \cdot x_l$ для любого $a \in A$. Тогда в силу (4)

$$D_{il}D_{jk} + \gamma_{il}D_{jk} = \gamma_{jl}D_{ik} + D_{jl}D_{ik}, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n.$$

Пусть $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$. Тогда естественное отображение $M \otimes_A M^* \mapsto A$ — изоморфизм A-модулей. Для элемента a определим $\bar{a} \in (M \otimes_A M)^*$, полагая $\bar{a}(x \otimes y) = D_{x,y}(a)$. Данное отображение задано корректно. Действительно, если $\sum\limits_k (u_k \otimes v_k) = 0$, то

$$\begin{aligned} 0 = D_{ij}(a) \sum_k (u_k \otimes v_k) &= \sum_k (D_{ij}(a)u_k \otimes v_k) \\ &= \sum_k (D_{u_k,x_j}(a)x_i \otimes v_k) = \sum_k (x_i \otimes D_{u_k,x_j}(a)v_k) \\ &= \sum_k (x_i \otimes D_{u_k,v_k}(a)x_j) = \sum_k D_{u_k,v_k}(a)(x_i \otimes x_j). \end{aligned}$$

Поэтому $\sum\limits_k D_{u_k,v_k}(a)(x_i \otimes x_j) = 0$. Тогда $\sum\limits_k D_{u_k,v_k}(a)f(x_i)x_j = 0$ для любого $f \in M^*$. Существует $f \in M^*$ такой, что $f(x_i) \neq 0$. Поскольку A-модуль M не имеет A-кручений и A — область целостности, то $\sum\limits_k D_{u_k,v_k}(a) = 0$. Следовательно, $\bar{a}\big(\sum\limits_k (u_k \otimes v_k)\big) = 0$.

Определим линейное отображение $^- : A \mapsto (M \otimes M)^*$, заданное правилом $^- : a \mapsto \bar{a}$. Тогда для любых $a, b \in A$ справедливо

$$\overline{ab} = b\bar{a} + a\bar{b},$$

т. е. отображение $^-$ является дифференцированием алгебры A в A-модуль $(M \otimes_A M)^*$.

Пусть A — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля (область целостности) и M — конечно порожденный проективный A-модуль ранга $rk(M) = 1$. Если N — другой конечно порожденный проективный A-модуль ранга 1, то $M \otimes_A N$ — конечно порожденный проективный A-модуль ранга 1. Хорошо известно (см. [23]), что $f(x)y = f(y)x$ для любых $x, y \in M$ и $f \in M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$.

Предложение 1. *Модуль M не имеет A-кручений.*

Доказательство. Пусть $a \in A$, $m \in M$ — ненулевые элементы такие, что $am = 0$. Рассмотрим $f \in M^*$ такой, что $f(m) \neq 0$. Такой элемент существует, так как естественное отображение $M \otimes_A M^* \mapsto A$ — изоморфизм A-модулей. Тогда $f(am) = af(m)$. Следовательно, $af(m) = 0$. Отсюда $f(m) = 0$. Поэтому M не имеет A-кручений.

Предложение 2. *В A-модуле $M \otimes_A M$ имеет место $x \otimes y = y \otimes x$.*

Доказательство. Пусть $u = x \otimes y - y \otimes x$ и $f, g \in M^*$. Тогда

$$\begin{aligned}(f \otimes g)(u) &= (f \otimes g)(x \otimes y) - (f \otimes g)(y \otimes x) = f(x)g(y) - f(y)g(x) \\ &= (x)g(y) - g(f(y)(x)) = f(x)g(y) - g(f(x)(y)) = f(x)g(y) - f(x)g(y) = 0.\end{aligned}$$

Пусть z — элемент из $M \otimes_A M$ такой, что $(f \otimes g)(z) \neq 0$. Тогда

$$(f \otimes g)(z)u = (f \otimes g)(u)z = 0.$$

В силу предложения 1 получаем $x \otimes y = y \otimes x$.

Пусть $^- : A \mapsto (M \otimes_A M)^*$ — ненулевое линейное отображение. Предположим, что

$$\overline{ab} = a\bar{b} + b\bar{a}$$

для любых $a, b \in A$.

Зафиксируем в M элемент y. Тогда $\bar{a}(- \otimes y) \in M^*$. Поэтому для любых $x, z \in M$ справедливо равенство $\bar{a}(x \otimes y)z = \bar{a}(z \otimes y)x$. Заметим, что если $\bar{a}(u) = 0$ для некоторого ненулевого $u \in M \otimes_A M$, то для любых $x, y \in M$

$$\bar{a}(x \otimes y)u = \bar{a}(u)(x \otimes y) = 0.$$

В силу предложения 1 $\bar{a} = 0$.

По определению отображения $^-$ получаем, что каждая пара элементов $x, y \in M$ задает дифференцирование $D_{x,y} : A \mapsto A$ по правилу $D_{x,y}(a) = \bar{a}(x \otimes y)$. Тогда

$$D_{x,y} = D_{y,x}, \quad D_{ax,y} = aD_{x,y}, \quad D_{x,y}(a)z = D_{z,y}(a)x \tag{5}$$

для $a \in A$ и $x, y, z \in M$.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — порождающие A-модуля M, т. е. $M = Ax_1 + \dots + Ax_n$. Положим $D_{ij} = D_{x_i,x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$. Тогда $D_{ij} = D_{ji}$.

Предложение 3. *Для любого $a \in A$ имеют место равенства*

$$D_{ij}(a)D_{kl} = D_{kl}(a)D_{ij}, \quad D_{ij}(a)D_{kl} = D_{kj}(a)D_{il}.$$

Доказательство. Пусть $a, b \in A$. Тогда

$$D_{ij}(a)D_{kl}(b) = \bar{a}(x_i \otimes x_j)\bar{b}(x_k \otimes x_l) = \bar{a}(x_k \otimes x_l)\bar{b}(x_i \otimes x_j) = D_{kl}(a)D_{ij}(b).$$

Аналогично $D_{ij}(a)D_{kl} = D_{kj}(a)D_{il}$.

Зафиксируем в кольце A элементы γ_{ij}, удовлетворяющие условию $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$, где $i, j = 1, \dots, n$.

Предложение 4. *Предположим, что для любых $i, j, k, l = 1, \dots, n$ выполняется равенство*

$$D_{il}D_{jk} + \gamma_{il}D_{jk} = \gamma_{jl}D_{ik} + D_{jl}D_{ik}. \tag{6}$$

Тогда справедливы равенства

$$[D_{ij}, D_{kl}] = D_{ij}D_{kl} - D_{kl}D_{ij} = -\gamma_{il}D_{jk} - \gamma_{jk}D_{il}, \tag{7}$$

$$D_{kl}D_{ij} + \gamma_{ij}D_{kl} = \gamma_{il}D_{kj} + D_{kj}D_{il}. \tag{8}$$

Доказательство. В силу (6) и предложения 3

$$D_{ij}D_{kl} = -\gamma_{ij}D_{kl} + \gamma_{kj}D_{il} + D_{jk}D_{li} = -\gamma_{ij}D_{kl} + \gamma_{kj}D_{il} - \gamma_{jk}D_{li} + \gamma_{lk}D_{ij} + D_{lk}D_{ji}.$$

Отсюда
$$[D_{ij}, D_{kl}] = -\gamma_{ij}D_{kl} + 2\gamma_{kj}D_{il} - \gamma_{kl}D_{ij}.$$
Аналогично
$$[D_{kl}, D_{ij}] = -\gamma_{kl}D_{ij} + 2\gamma_{il}D_{kj} - \gamma_{ij}D_{kl}.$$
Поскольку $[D_{ij}, D_{kl}] = -[D_{kl}, D_{ij}]$, то
$$-\gamma_{ij}D_{kl} - \gamma_{kl}D_{ij} + \gamma_{kj}D_{il} + \gamma_{il}D_{kj} = 0.$$
Поэтому
$$[D_{ij}, D_{kl}] = -\gamma_{ij}D_{kl} + 2\gamma_{kj}D_{il} - \gamma_{kl}D_{ij} = -\gamma_{il}D_{kj} - \gamma_{jk}D_{il}.$$
В силу (6) и (7)
$$D_{kl}D_{ij} = -\gamma_{kl}D_{ij} + \gamma_{il}D_{kj} + D_{il}D_{kj} = \gamma_{il}D_{kj} - \gamma_{ij}D_{kl} + D_{kj}D_{il}.$$
Поэтому
$$D_{kl}D_{ij} + \gamma_{ij}D_{kl} = \gamma_{il}D_{kj} + D_{kj}D_{il}.$$

Предложение 5. *Пусть для любых $i, j, k = 1, \dots, n$ выполняется равенство*
$$[D_{ik}, D_{jk}] = -\gamma_{ij}D_{kk}. \tag{9}$$
Тогда для $i, j, l, k = 1, \dots, n$ имеет место (6). В частности, имеют место (7) и (8).

Доказательство. Пусть $G(i, j, l, k) = D_{il}D_{jk} - D_{jl}D_{ik}$. В силу предложения 3 для любого $a \in A$ получаем
$$D_{kk}(a)G(i, j, l, k) = D_{kk}(a)(D_{il}D_{jk} - D_{jl}D_{ik}) = D_{lk}(a)[D_{ik}, D_{jk}].$$
По условию и предложению 3
$$D_{kk}(a)G(i, j, l, k) = -\gamma_{ij}D_{lk}(a)D_{kk} = -\gamma_{ij}D_{kk}(a)D_{lk}.$$
Поскольку A не имеет делителей нуля, то $G(i, j, l, k) = -\gamma_{ij}D_{lk}$.

Также получаем
$$\begin{aligned} D_{ij}D_{kl} &= D_{kj}D_{il} + G(i, k, j, l) \\ &= D_{jk}D_{li} + G(i, k, j, l) = D_{kl}D_{ij} + G(j, l, k, i) + G(i, k, j, l). \end{aligned}$$
Следовательно, $[D_{ij}, D_{kl}] = G(j, l, k, i) + G(i, k, j, l)$. Отсюда
$$[D_{ij}, D_{kl}] = -\gamma_{jl}D_{ki} - \gamma_{ik}D_{jl}.$$
С другой стороны,
$$[D_{ij}, D_{kl}] = [D_{ji}, D_{kl}] = -\gamma_{il}D_{kj} - \gamma_{jk}D_{li}.$$
Тогда
$$\gamma_{jl}D_{ki} + \gamma_{ik}D_{jl} = \gamma_{il}D_{kj} + \gamma_{jk}D_{li}.$$
Поменяв местами индексы k, j и положив $k = l$, получим
$$\gamma_{ij}D_{ll} = \gamma_{il}D_{lj} + \gamma_{lj}D_{li}.$$
Тогда в силу (5) для любого $a \in A$
$$D_{\gamma_{ij}x_l, x_l}(a) = D_{\gamma_{il}x_j, x_l}(a) + D_{\gamma_{lj}x_i, x_l}(a).$$
Поэтому $D_{\gamma_{ij}x_l - \gamma_{il}x_j - \gamma_{lj}x_i, x_l}(a) = 0$. Применяя снова (5), имеем
$$(\gamma_{ij}x_l - \gamma_{il}x_j - \gamma_{lj}x_i)D_{x, x_l}(a) = xD_{\gamma_{ij}x_l - \gamma_{il}x_j - \gamma_{lj}x_i, x_l}(a) = 0$$
для любого $x \in M$. Если $D_{x, x_l}(a) = 0$, то $\bar{a}(x \otimes x_l) = 0$. Ввиду доказанного $\bar{a} = 0$. Так как $\bar{a} \neq 0$ для некоторого $a \in A$ и M не имеет A-кручений, то
$$\gamma_{ij}x_l = \gamma_{il}x_j + \gamma_{lj}x_i.$$
Как показано, $G(i, j, l, k) = -\gamma_{ij}D_{lk}$. Тогда
$$G(i, j, l, k) = -\gamma_{il}D_{jk} - \gamma_{lj}D_{ik} = \gamma_{li}D_{jk} + \gamma_{jl}D_{ik}$$
и в силу определения $G(i, j, l, k)$ получаем (6).

Следствие. *Равенства* (6), (7) *и* (9) *равносильны. Кроме того, при выполнении одного из этих равенств имеют место*

$$\gamma_{ij}D_{ll} = \gamma_{il}D_{lj} + \gamma_{lj}D_{li}, \tag{10}$$

$$\gamma_{ij}x_l = \gamma_{il}x_j + \gamma_{lj}x_i. \tag{11}$$

Предложение 6. *Пусть $a, b \in A$ и $\Gamma_{ij}(a,b) = \gamma_{ij}ab + D_{ij}(a)b - aD_{ij}(b)$. Предположим, что имеет место* (9). *Тогда в A выполняется*

$$D_{kl}(\Gamma_{ij}(a,b))c - D_{kj}(\Gamma_{il}(a,c))b + D_{ki}(\Gamma_{jl}(b,c))a = 0$$

для любых $i, j, k, l = 1, \ldots, n$, $a, b, c \in A$.

Доказательство. Сначала докажем, что

$$D_{kl}(\gamma_{ij}) + D_{kj}(\gamma_{li}) + D_{ki}(\gamma_{jl}) = 0.$$

Рассмотрим линейное пространство, образованное элементами вида aD_{ij}, где $a \in A$. Тогда в силу (7) оно является алгеброй Ли относительно операции коммутирования. По тождеству Якоби имеем

$$[D_{lk}, [D_{ik}, D_{jk}]] = [D_{ik}, [D_{lk}, D_{jk}]] + [[D_{lk}, D_{ik}], D_{jk}].$$

Согласно (9)

$$(D_{kl}(\gamma_{ij}) + D_{jk}(\gamma_{li}) + D_{ik}(\gamma_{jl}))D_{kk} = (-\gamma_{ij}\gamma_{lk} + \gamma_{ik}\gamma_{lj} - \gamma_{li}\gamma_{jk})D_{kk}.$$

По (10)

$$\begin{aligned}&(-\gamma_{ij}\gamma_{lk} + \gamma_{ik}\gamma_{lj} - \gamma_{li}\gamma_{jk})D_{kk}\\ &= -\gamma_{lk}\gamma_{ik}D_{kj} - \gamma_{lk}\gamma_{kj}D_{ki} + \gamma_{ik}\gamma_{lk}D_{kj} + \gamma_{ik}\gamma_{kj}D_{kl} - \gamma_{jk}\gamma_{lk}D_{ki} - \gamma_{jk}\gamma_{ki}D_{kl} = 0.\end{aligned}$$

Поэтому

$$(D_{kl}(\gamma_{ij}) + D_{jk}(\gamma_{li}) + D_{ik}(\gamma_{jl}))D_{kk} = 0.$$

Так как A без делителей нуля, то

$$D_{kl}(\gamma_{ij}) + D_{jk}(\gamma_{li}) + D_{ik}(\gamma_{jl}) = 0.$$

Отсюда и по (8) непосредственной проверкой получаем

$$D_{kl}(\Gamma_{ij}(a,b))c - D_{kj}(\Gamma_{il}(a,c))b + D_{ki}(\Gamma_{jl}(b,c))a = 0.$$

Теорема 1. *Пусть A — область целостности. Пусть $M = Ax_1 + \cdots + Ax_n$ — конечно порожденный проективный A-модуль ранга 1, отображение $^- : A \mapsto (M \otimes_A M)^*$ — ненулевое дифференцирование алгебры A в A-модуль $(M \otimes_A M)^*$ и $\Delta = \{D_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ — множество дифференцирований алгебры A, где $D_{ij}(a) = \bar{a}(x_i \otimes x_j)$. Зафиксируем в кольце A элементы γ_{ij}, удовлетворяющие условию $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$, где $i, j = 1, \ldots, n$. Рассмотрим пространство $J(A, \Delta) = A \oplus M$ и зададим на нем структуру Z_2-градуированной алгебры, полагая*

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot (bx_i) = (bx_i) \cdot a = (ab)x_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$ax_i \cdot bx_j = \gamma_{ij}ab + D_{ij}(a)b - aD_{ij}(b), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

где $a, b \in A$ и ab — произведение элементов a, b в A. Предположим, что дифференцирования D_{ij} удовлетворяют равенствам (7). Тогда пространство $J(A, \Delta)$ — йорданова супералгебра с четной частью A и нечетной M.

Доказательство. Покажем, что умножение в $J(A, \Delta)$ задано корректно. Действительно, пусть $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. Тогда

$$D = a_1D_{1k} + \cdots + a_nD_{nk} = D_{a_1x_1+\cdots+a_nx_n, x_k} = 0$$

для любого фиксированного $k = 1, \ldots, n$. В силу (7) получаем

$$[D, bD_{kj}] = \sum_{i=1}^{n}[a_iD_{ik}, bD_{kj}] = \sum_{i=1}^{n} -\gamma_{ij}a_ibD_{kk} - bD_{kj}(a_i)D_{ik} + a_iD_{ik}(b)D_{kj} = 0.$$

По предложению 3

$$\sum_{i=1}^{n} -\gamma_{ij}a_ibD_{kk} - bD_{ij}(a_i)D_{kk} + a_iD_{ij}(b)D_{kk}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} -\gamma_{ij}a_ibD_{kk} - bD_{kj}(a_i)D_{ik} + a_iD_{ik}(b)D_{kj} = 0.$$

Так как A — область целостности, то

$$\sum_{i=1}^{n} -\gamma_{ij}a_ib - bD_{ij}(a_i) + a_iD_{ij}(b) = 0.$$

Отсюда

$$(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) \cdot bx_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}a_ib + bD_{ij}(a_i) - a_iD_{ij}(b) = 0.$$

Следовательно, умножение в $J(A, \Delta)$ задано корректно.

По предложению 6 для любых $a, b, c \in A$, справедливо

$$D_{kl}(\Gamma_{ij}(a, b))c - D_{kj}(\Gamma_{il}(a, c))b + D_{ki}(\Gamma_{jl}(b, c))a = 0.$$

В силу (5) получаем $D_{ik}(a)x_j = D_{jk}(a)x_i$. Поэтому по предложению 3 из [9] $J(A, \Delta)$ — йорданова супералгебра.

Пусть $L = AD_{11} + \cdots + AD_{ij} + \cdots + AD_{nn}$. Тогда в силу (7) A-модуль является подалгеброй алгебры Ли $\mathrm{Der}(A)$.

Предложение 7. *Пусть L — простая алгебра Ли. Тогда $J(A, \Delta)$ — простая йорданова супералгебра.*

Доказательство. Так как A — область целостности, аннулятор A-модуля L равен нулю. Супералгебра $J(A, M)$ проста тогда и только тогда, когда алгебра A дифференциально проста относительно множества дифференцирований Δ.

Пусть L — простая алгебра Ли. Рассмотрим идеал I алгебры A, инвариантный относительно дифференцирований из Δ. Пусть $R = IL = \{\sum_{ij} r_{ij}D_{ij} \mid r_{ij} \in I\}$. Тогда

$$[R, AD_{kl}] \subseteq D_{kl}(I)A[D_{ij}, D_{kl}] + IA[D_{ij}, D_{kl}] \subseteq IL \subseteq R.$$

Следовательно, R — идеал алгебры Ли L. Отсюда $L = IL$. Если $I \neq A$, то в силу конечно порожденности A-модуля L существует ненулевой элемент $a \in A$ такой, что $aL = 0$. Поэтому $I = 0$.

Таким образом, супералгебра $J(A,\Delta)$ проста.

Далее будем считать, что все $x_1,\dots,x_n$ не равны нулю и выполняется одно из равенств (6), (7) или (9).

Пусть α — элемент из A такой, что $D_{11}(\alpha)\neq 0$. Так как ${}^- : A\mapsto (M\otimes_A M)^*$ — ненулевое отображение, элемент α существует. Рассмотрим поле частных $Q(A)$ кольца A. Пусть $\alpha_i=(D_{11}(\alpha))^{-1}D_{i1}(\alpha)$, где $i=1,\dots,n$. В силу предложения 3 $D_{11}(\alpha)D_{i1}(\beta)=D_{11}(\beta)D_{i1}(\alpha)$ для любого $\beta\in A$. Поэтому элементы $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ не зависят от выбора элемента α.

Пусть $I=D_{11}(A)A+\dots+D_{n1}(A)A$. Тогда I — идеал в A, инвариантный относительно дифференцирований $D_{11},\dots,D_{n1}$. Рассмотрим дуальный A-модуль $I^*=\mathrm{Hom}_A(I,A)$. Тогда каждое дифференцирование D_{i1} индуцирует отображение $I^*\mapsto I^*$, заданное правилом $D_{i1}(f)=D_{i1}f-fD_{i1}$, где $f\in I^*$, а $D_{i1}f$ и fD_{i1} — суперпозиции соответствующих отображений.

Рассмотрим в $Q(A)$ дробный идеал $K=A\alpha_1+\dots+A\alpha_n$. Поскольку

$$\alpha_iD_{j1}(a)=(D_{11}(\alpha))^{-1}D_{i1}(\alpha)D_{j1}(a)=(D_{11}(\alpha))^{-1}D_{11}(\alpha)D_{ij}(a)=D_{ij}(a),\quad(12)$$

то $IK\subseteq A$. Более того, $(b\alpha_i)(D_{j1}(a)c)=D_{ij}(a)bc$. Поэтому $\sum\limits_{ij}D_{ij}(A)A\subseteq IK$. Следовательно, $K\subseteq I^*$.

Пусть $r=D_{j1}(a)c$. Тогда

$$\begin{aligned}D_{k1}(b\alpha_i)(r)&=D_{k1}(b\alpha_ir)-b\alpha_iD_{k1}(r)=D_{k1}(D_{ij}(a)bc)-bD_{ik}(D_{j1}(a)c)\\&=D_{k1}(D_{ij}(a))bc+D_{ij}(a)D_{k1}(b)c+D_{ij}(a))bD_{k1}(c)-D_{ik}(D_{j1}(a))bc-D_{j1}(a)bD_{ik}(c)\\&=D_{k1}(D_{ij}(a))bc+D_{ij}(a)D_{k1}(b)c-D_{ik}(D_{j1}(a))bc.\end{aligned}$$

В силу (6) и (11)

$$\begin{aligned}&D_{k1}(D_{ij}(a))-D_{ik}(D_{j1}(a))=D_{1k}(D_{ij}(a))-D_{ik}(D_{1j}(a))\\&\quad=-\gamma_{1k}D_{ij}(a)+\gamma_{ik}D_{1j}(a)=D_{\gamma_{ik}x_1-\gamma_{1k}x_i,x_j}(a)=D_{\gamma_{i1}x_k,x_j}(a)=\gamma_{i1}D_{kj}(a).\end{aligned}$$

Тогда

$$D_{k1}(b\alpha_i)(r)=\gamma_{i1}D_{kj}(a)bc+D_{ij}(a)D_{k1}(b)c=\gamma_{i1}b\alpha_kr+D_{k1}(b)\alpha_ir.$$

Поэтому $D_{k1}(K)\subseteq K$ и

$$D_{k1}(b\alpha_i)=\gamma_{i1}b\alpha_k+D_{k1}(b)\alpha_i.$$

Отсюда получаем

$$D_{k1}(b\alpha_i)=D_{k1}(b)\alpha_i+bD_{k1}(\alpha_i).$$

Тем самым D_{k1} — дифференцирование A-модуля K. В частности, $D_{11}(\alpha_i)=\gamma_{i1}\alpha_1=\gamma_{i1}$.

Рассмотрим дробный идеал K^m. По правилу Лейбница каждое отображение D_{i1} можно продолжить до дифференцирования A-модуля K^m и это продолжение будет корректным. Поскольку $\alpha_1=(D_{11}(\alpha))^{-1}D_{11}(\alpha)=1$, имеем последовательность включений $K\subseteq K^2\subseteq\dots\subseteq K^m\subseteq\dots$ в поле частных $Q(A)$.

Пусть $\mathrm{Pic}(A)$ — группа Пикара алгебры A, т. е. множество изоморфных классов конечно порожденных A-модулей ранга 1. Произведение элементов $[M]$ и $[N]$ из $\mathrm{Pic}(A)$ задается равенством $[M][N]=[M\otimes_A N]$. Вложение $\phi:A\mapsto Q(A)$ индуцирует вложение $\phi_*:\mathrm{Pic}(A)\mapsto\mathrm{Pic}(Q(A))$, а именно $\phi_*:[M]\mapsto$

$[M \otimes_A Q(A)]$. Дробный идеал P алгебры называется *обратимым*, если $PP^{-1} = A$, где $P^{-1} = \{r \in Q(A) \mid rP \subseteq A\}$. Каждый обратимый идеал алгебры A является проективным модулем ранга 1. Пусть $\mathbb{I}_A$ — группа обратимых идеалов алгебры A. Обозначим через $U(A)$ множество обратимых элементов A. Тогда (см. например, [23, теорема 2.21]) имеем точную последовательность абелевых групп

$$1 \mapsto U(A) \mapsto U(Q(A)) \mapsto \mathbb{I}_A \mapsto \mathrm{Pic}(A) \mapsto \mathrm{Pic}(Q(A)).$$

Так как A — область целостности, группа $\mathrm{Pic}(Q(A))$ тривиальна. Поэтому каждый конечно порожденный проективный модуль ранга 1 изоморфен обратимому идеалу алгебры A.

Предложение 8. *Для любого m A-модуль K^m изоморфен A-модулю $\underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_{m}$ (тензорное произведение модулей над A). В частности, A-модуль M изоморфен дробному идеалу K. Более того, K — обратимый идеал, т. е. $KK^{-1} = A$, где $K^{-1} = \{r \in Q(A) \mid rK \subseteq A\}$. Если A — дифференциально простая алгебра относительно множества дифференцирований $\Delta = \{D_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$, то $K^* = K^{-1} = I$.*

Доказательство. Определим $\phi : \underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_{m} \mapsto K^m$ следующим образом:

$$\phi\Big(\sum a_i(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_m})\Big) = \sum a_i(\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_m}).$$

Поскольку

$$D_{11}(\alpha)^m \sum a_i(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_m}) = \sum a_i(D_{11}(\alpha)x_{i_1} \otimes \cdots \otimes D_{11}(\alpha)x_{i_m})$$
$$= \sum a_i(D_{i_1 1}(\alpha)x_1 \otimes \cdots \otimes D_{i_m 1}(\alpha)x_1) = \sum a_i D_{i_1 1}(\alpha) \dots D_{i_m 1}(\alpha)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_1),$$

в силу предложения 1 отображение ϕ задано корректно и является изоморфизмом A-модулей.

Как показано выше, $\sum\limits_{ij} D_{ij}(A)A \subseteq IK \subseteq A$. Предположим, что алгебра A Δ-проста. Тогда $\sum\limits_{ij} D_{ij}(A)A = A$. Поэтому $IK = A$. Следовательно, K — обратимый идеал, и $I^* = I^{-1} = K$, а $K^* = K^{-1} = I$.

В силу (11) и (12) получаем, что для $a, b \in A$ справедливы равенства

$$\gamma_{ij}\alpha_1 = \gamma_{i1}\alpha_j - \gamma_{j1}\alpha_i, \tag{13}$$

$$\alpha_j b D_{i1}(a) - \alpha_i a D_{j1}(b) = D_{ij}(a)b - aD_{ij}(b). \tag{14}$$

В частности, $D_{i1}(p) = \alpha_i D_{11}(p)$ для любого $p \in \cup K^m$. Из (13) вытекает, что

$$\gamma_{ij} = \alpha_j D_{11}(\alpha_i) - \alpha_i D_{11}(\alpha_j). \tag{15}$$

Предложение 9. *Положим $\Gamma = \cup K^m$. Тогда $\Gamma^2 \subseteq \Gamma$ и Γ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей 1. Если A — дифференциально простая алгебра относительно множества дифференцирований $\Delta = \{D_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$, то Γ — дифференциально простая алгебра относительно дифференцирования D_{11}.*

Доказательство. Пусть Q — ненулевой идеал Γ, инвариантный относительно дифференцирования D_{11}. Тогда Q — ненулевой идеал Γ, инвариантный относительно множества дифференцирований $\{D_{11}, \dots, D_{n1}\}$.

Пусть $q \in Q$ и $q \neq 0$. Тогда существует такое число m, что $D_{11}(\alpha)^m q \in A$. Поэтому $Q \cap A$ — ненулевой идеал в A. Пусть $r \in Q \cap A$. Тогда $\alpha_i D_{j1}(r) \in Q$. Поскольку $\alpha_i D_{j1}(r) = (D_{11}(\alpha))^{-1} D_{i1}(\alpha) D_{j1}(r) = D_{ij}(r)$, то $D_{ij}(r) \in Q \cap A$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. Поэтому $Q \cap A$ — идеал в A, инвариантный относительно дифференцирований $\{D_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$. Следовательно, $1 \in Q$ и $Q = \Gamma$.

Заметим, что $\Gamma = A\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$, т. е. Γ как A-алгебра порождена элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Если число порождающих A-модуля M n равно 1, то $\Gamma = A$. Через R_p обозначим оператор правого умножения алгебры Γ на элемент p.

Пусть $\operatorname{End}\Gamma$ — алгебра линейных преобразований векторного пространства Γ. Рассмотрим ассоциативную супералгебру $B = M_2^{1,1}(\operatorname{End}\Gamma)$.

Зададим отображение $\phi : J(A, \Delta) \mapsto B$, полагая на четных элементах

$$\phi : a \mapsto \begin{pmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_a \end{pmatrix},$$

а на нечетных элементах

$$\phi : \sum_i b_i x_i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 4\sum_i R_{b_i} D_{i1} + 2\sum_i R_{D_{i1}(b_i)} + 2\sum_i R_{b_i \gamma_{i1}} \\ -\sum_i R_{b_i \alpha_i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Отображение ϕ задано корректно. Действительно, пусть $\sum_i b_i x_i = 0$ и $b \in A$. Тогда

$$D_{11}(b) \sum_i b_i x_i = \sum_i b_i D_{i1}(b) x_1 = 0.$$

Поэтому $\sum_i b_i D_{i1}(b) = 0$ и $\sum_i b_i D_{i1}(p) = 0$ для любого $p \in \Gamma$. По определению умножения в $J(A, \Delta)$

$$\sum_i b_i x_i \cdot x_1 = \sum_i b_i \gamma_{i1} + \sum_i D_{i1}(b_i) = 0.$$

Следовательно, $2\sum_i R_{D_{i1}(b_i)} + 2\sum_i R_{b_i \gamma_{i1}} = 0$.

Непосредственным вычислением, используя (13), (14), получаем, что ϕ — вложение супералгебры $J(A, \Delta)$ в супералгебру $B^{(+)_s}$. Поэтому супералгебра $J(A, \Delta)$ специальная.

Теорема 2. *Пусть Γ как A-алгебра порождена элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Рассмотрим йорданову супералгебру векторного типа $J(\Gamma, D_{11})$. Пусть $x_1 = \alpha_1 x$, $\dots$, $x_n = \alpha_n x$ и $K = Ax_1 + \dots + Ax_n$, т. е. K — A-подмодуль нечетной части, порожденной $x_1, \dots, x_n$. Тогда подпространство $J = A + K$ является подсупералгеброй в $J(\Gamma, D_{11})$ с четной частью A и нечетной K. Умножение нечетных элементов задается равенством (4) с помощью элементов γ_{ij} и дифференцирований $D_{ij}, i, j = 1, \dots, n$. Более того, если супералгебра J проста, то супералгебра $J(\Gamma, D_{11})$ также проста.*

Доказательство. Пусть $a, b \in A$. Тогда

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot (bx_i) = (bx_i) \cdot a = (ab)x_i,$$

где ab — произведение элементов A. Для нечетных элементов имеем

$$\begin{aligned} ax_i \cdot bx_j = (a\alpha_i)x \cdot (b\alpha_j)x = D_{11}(a\alpha_i) \cdot b\alpha_j - a\alpha_i \cdot D_{11}(b\alpha_j) \\ = (ab)(D_{11}(\alpha_i) \cdot \alpha_j - \alpha_i \cdot D_{11}(\alpha_j)) + b\alpha_i\alpha_j D_{11}(a) - a\alpha_i\alpha_j D_{11}(b). \end{aligned}$$

По (14) и (15) получаем

$$ax_i \cdot bx_j = \gamma_{ij}ab + D_{ij}(a)b - aD_{ij}(b).$$

Пусть J — простая супералгебра. Тогда алгебра A — дифференциально простая алгебра относительно множества дифференцирований $\Delta = \{D_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$. По предложению 9 Γ — дифференциально простая алгебра относительно дифференцирования D_{11}. Следовательно, супералгебра $J(\Gamma, D_{11})$ также проста.

Рассмотрим алгебру полиномов $F[x, y]$ от двух переменных x, y. Через $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ обозначим операторы дифференцирования алгебры $F[x, y]$ по переменным x и y. Положим $D = 2y^3\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ и $f(x, y) = x^2 + y^4 - 1$. Тогда D — дифференцирование алгебры $F[x, y]$ и $D(f(x, y)) = 0$. Пусть $\Gamma = F[x, y]/f(x, y)F[x, y]$ — фактор-алгебра алгебры $F[x, y]$ по идеалу $f(x, y)F[x, y]$. Ясно, что дифференцирование D индуцирует дифференцирование алгебры Γ, которое мы также обозначим через D. Отождествим образы элементов x и y при каноническом гомоморфизме $F[x, y] \mapsto \Gamma$ с элементами x и y. Тогда $\Gamma = F[y] + xF[y]$, где $F[y]$ — кольцо полиномов от переменной y.

Пусть A — подалгебра в Γ, порожденная элементами 1, y^2, xy. Тогда $A = F[y^2] + xyF[y^2]$, где $F[y^2]$ — кольцо полиномов от переменной y^2. Алгебра A — область целостности. В алгебре Γ рассмотрим подпространство $M = Ax + Ay$. Тогда M — ассоциативный A-модуль. В [14] показано, что модуль M не является однопорожденным A-модулем ранга 1. Кроме того, в модуле $M \otimes_A M$ имеем

$$\begin{aligned} x \otimes x &= (1 - y^4)(x \otimes x) + y^4(x \otimes x) = (1 - y^4)(x \otimes x) + y^2(y^2 x \otimes x) \\ &= (1 - y^4)(x \otimes x) + y^2((yx)y \otimes x) = (1 - y^4)(x \otimes x) + y^2(y \otimes (yx)x) \\ &= (1 - y^4)(x \otimes x) + (1 - y^4)y^2(y \otimes y) = (1 - y^4)(x \otimes x + y^2(y \otimes y)). \end{aligned}$$

Также получаем

$$x \otimes y = xy(x \otimes x + y^2(y \otimes y)) = y \otimes x \text{ и } y \otimes y = y^2(x \otimes x + y^2(y \otimes y)).$$

Поэтому $M \otimes_A M = A(x \otimes x + y^2(y \otimes y))$.

Пусть D' — произвольное дифференцирование алгебры A. Тогда отображение

$$^- : A \mapsto (M \otimes_A M)^*,$$

определенное как $\bar{a}(b(x \otimes x + y^2(y \otimes y))) = bD'(a)$, является дифференцированием алгебры A в A-модуль $(M \otimes_A M)^*$. Обратно, каждое такое дифференцирование $^- : A \mapsto (M \otimes_A M)^*$ задает дифференцирование $D' : A \mapsto A$ по правилу $D'(a) = \bar{a}(x \otimes x + y^2(y \otimes y))$. Поэтому

$$D'_{11} = D'_{x,x} = (1 - y^4)D', \quad D'_{12} = D'_{x,y} = xyD', \quad D'_{22} = D'_{y,y} = y^2 D'.$$

Как легко видеть, справедливы равенства (5). Дифференцирование D' и элемент γ_{12} могут быть заданы разными способами. Положим, например, $D'(xy) = \frac{1}{2}(xy)(1 - 3y^4)\gamma$, $D'(y^2) = (1 - y^4)y^2\gamma$, где $\gamma \in A$ и $\gamma_{12} = -\frac{1}{2}(xy)(1 + y^4)\gamma$.

Пусть $\Delta' = \{D'_{11}, D'_{12}, D'_{22}\}$. Тогда имеет место (9). По следствию и теореме 7 пространство $J(A, \Delta')$ — йорданова супералгебра с четной частью A и нечетной M.

Пусть α — элемент из A такой, что $D'_{11}(\alpha) \neq 0$. В поле частных $Q(A)$ кольца A рассмотрим $\alpha_i = (D'_{11}(\alpha))^{-1}D'_{i1}(\alpha)$, $i = 1, 2$. Тогда $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = (1 - y^4)^{-1}xy$. Следовательно, $K = A + (1 - y^4)^{-1}xyA$ и $\Gamma_1 = A\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$.

Если $D' = D$, то $D(xy) = 3y^4 - 1$, $D(y^2) = -2xy$. Положим

$$\Delta = \{D_{11} = (1 - y^4)D,\ D_{12} = xyD,\ D_{22} = y^2D\}.$$

Тогда D_{11}, D_{12}, D_{22} — дифференцирования алгебры A. Как показано в [14], алгебра A дифференциально проста относительно множества дифференцирований Δ, и пространство $J(A, \Delta)$ — простая йорданова супералгебра с четной частью A и нечетной M. Элемент γ_{12} равен $1 + y^4$. Аналогично предыдущему

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = (1 - y^4)^{-1}xy, \quad K = A + (1 - y^4)^{-1}xyA, \quad \Gamma_1 = A\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle.$$

Так как A Δ проста, по предложению 9 алгебра Γ_1 дифференциально проста относительно дифференцирования D_{11}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кантор И. Л.* Йордановы и лиевы супералгебры, определенные алгеброй Пуассона // Вторая сибирская школа «Алгебра и анализ». Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1989. С. 55–80.
2. *King D., McCrimmon K.* The Kantor construction of Jordan superalgebras // Comm. Algebra. 1992. V. 20, N 1. P. 109–126.
3. *Пчелинцев С. В.* Первичные алгебры и абсолютные делители нуля // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 1. С. 79–100.
4. *Medvedev Yu. A., Zelmanov E. I.* Some counterexamples in the theory of Jordan algebras // Nonassociative algebraic models (Zaragoza, 1989). Commack, NY: Nova Sci. Publ., 1992. P. 1–16.
5. *Шестаков И. П.* Супералгебры и контрпримеры // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 6. С. 187–196.
6. *McCrimmon K.* Speciality and nonspeciality of two Jordan superalgebras // J. Algebra. 1992. V. 149, N 2. P. 326–351.
7. *Martinez C., Zelmanov E.* Specializations of Jordan superalgebras // Canad. Math. Bull. 2002. V. 45, N 4. P. 653–671.
8. *Желябин В. Н.* Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой четной частью // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 276–310.
9. *Желябин В. Н., Шестаков И. П.* Простые специальные супералгебры с ассоциативной четной частью // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 1046–1072.
10. *Shuen Yuan.* Differentiable simple rings of prime characteristic // Duke Math. J. 1964. V. 31, N 4. P. 623–630.
11. *Swan R. G.* Vector bundles and projective modules // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 105. P. 264–277.
12. *Желябин В. Н.* Дифференциальные алгебры и простые йордановы супералгебры // Мат. тр. 2009. Т. 12, № 2. С. 41–51.
13. *Zhelyabin V. N.* Differential algebras and simple Jordan superalgebras // Sib. Adv. Math. 2010. V. 20, N 3. P. 223–230.
14. *Желябин В. Н.* Новые примеры простых йордановых супералгебр над произвольным полем характеристики нуль // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 4.
15. *Cantarini N., Kac V. G.* Classification of linearly compact simple Jordan and generalized Poisson superalgebras // J. Algebra. 2007. V. 313, N 2. P. 100–124.
16. *Шестаков И. П.* Простые супералгебры типа $(-1, 1)$ // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 721–739.
17. *Kac V. G.* Classification of simple Z-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras // Comm. Algebra. 1997. V. 5, N 13. P. 1375–1400.
18. *Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 701–731.
19. *Zelmanov E.* Semisimple finite-dimensional Jordan superalgebras // Lie algebras and related topics. New York: Springer-Verl., 2000. P. 227–243.
20. *Martinez C., Zelmanov E.* Simple finite-dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic // J. Algebra. 2001. V. 236, N 2. P. 575–629.
21. *Kac V. G., Martinez C., Zelmanov E.* Graded simple Jordan superalgebras of growth one. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 150, N 711).

22. *Racine M., Zelmanov E.* Simple Jordan superalgebras with semisimple even part // J. Algebra. 2003. V. 270, N 2. P. 374–444.
23. *Lam T. Y.* Lectures on modules and rings. New York: Springer-Verl., 1999 (Grad. Texts Math.; V. 189).

Статья поступила 28 марта 2011 г.

Желябин Виктор Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vicnic@math.nsc.ru