Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 512.54

О КОНЕЧНЫХ 2–ГРУППАХ АЛЬПЕРИНА С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ АБЕЛЕВЫМИ ВТОРЫМИ КОММУТАНТАМИ

Б. М. Веретенников

Аннотация. Группой Альперина назовем группу, в которой коммутант любой 2-порожденной подгруппы цикличен. Д. Л. Альперин доказал, что при нечетном простом p все конечные p-группы с указанным свойством метабелевы. В настоящее время актуальным является построение примеров неметабелевых конечных 2-групп Альперина. Отметим, что ранее автор привел примеры конечных 2-групп Альперина со вторыми коммутантами, изоморфными Z_2 и Z_4, доказал существование конечных 2-групп Альперина с циклическими вторыми коммутантами сколь угодно большого порядка и привел соответствующие примеры. В данной статье доказывается существование конечных 2-групп Альперина со вторыми абелевыми коммутантами сколь угодно большого ранга.

Ключевые слова: 2-группа, группа Альперина, коммутант, задание группы образующими и определяющими соотношениями.

Посвящается памяти моего сына Дениса Веретенникова

Группой Альперина назовем группу, в которой коммутант любой 2-порожденной подгруппы цикличен. Д. Л. Альперин в [1] доказал, что при нечетном простом p все конечные p-группы с указанным свойством метабелевы. В настоящее время актуальным является построение примеров неметабелевых конечных 2-групп Альперина. Отметим, что ранее в [2, 3] автор привел примеры конечных 2-групп Альперина со вторыми коммутантами, изоморфными Z_2 и Z_4, а в [4] доказал существование конечных 2-групп Альперина с циклическим вторым коммутантом сколь угодно большого порядка и привел соответствующие примеры. В данной статье решается вопрос о существовании конечных 2-групп Альперина со вторым коммутантом сколь угодно большого ранга.

Теорема. *Пусть n — натуральное число, $n \geq 3$, и группа G задана образующими $a_1, a_2, \dots, a_n$ и определяющими соотношениями:*
$a_k^2 = 1$ *для любого* $k = \overline{1, n}$,
$[a_i, a_j, a_k] = [a_j, a_k]^2 [a_k, a_i]^2$ *для любых* $i, j, k = \overline{1, n}$,
$[[a_i, a_j], [a_k, a_l]] = [a_i, a_k]^4 [a_i, a_l]^4 [a_j, a_k]^4 [a_j, a_l]^4$ *для любых* $i, j, k, l = \overline{1, n}$,
$[a_i, a_j]^8 = 1, [[a_i, a_j]^4, a_k] = 1$ *для любых* $i, j, k = \overline{1, n}$.
Тогда

1) $|G| = 2^{3C_n^2 + n} = 2^{\frac{n(3n-1)}{2}}$ *и если обозначить* $f_{ij} = [a_i, a_j], \tau_{ij} = f_{ij}^4$ *для любых* i, j *таких, что* $1 \leq i, j \leq n$, $K = \langle \tau_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle$, $H = \langle K, f_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle$, *то* K *— элементарная абелева 2-группа порядка* $2^{C_n^2}$ *и* G *имеет следующий нормальный ряд длины* $\frac{n(n-1)}{2} + n$: $K < K\langle f_{12} \rangle < K\langle f_{12} \rangle \langle f_{13} \rangle < \dots < K\langle f_{12} \rangle \langle f_{13} \rangle \dots \langle f_{n-1,n} \rangle = H < H\langle a_1 \rangle < H\langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle < \dots < H\langle a_1 \rangle \dots \langle a_n \rangle =$

G, в котором первые $\frac{n(n-1)}{2}$ фактор-группы — циклические группы порядка 4, а остальные — порядка 2;

2) G'' — элементарная абелева группа ранга C^2_{n-1};

3) G — группа Альперина.

Следствие 1. *Существуют конечные 2-группы Альперина, порожденные инволюциями, с элементарным абелевым вторым коммутантом сколь угодно большого порядка.*

Следствие 2. *Существует 2-группа Альперина с бесконечным элементарным абелевым вторым коммутантом.*

Доказательство теоремы. **П. 1.** Из определяющих соотношений группы G следует очевидным образом, что G имеет нормальный ряд

$$K \le K\langle f_{12}\rangle \le K\langle f_{12}\rangle\langle f_{13}\rangle \le \dots \le K\langle f_{12}\rangle\langle f_{13}\rangle\dots\langle f_{n-1,n}\rangle$$
$$= H \le H\langle a_1\rangle \le H\langle a_1\rangle\langle a_2\rangle \le \dots \le H\langle a_1\rangle\dots\langle a_n\rangle = G$$

с циклическими фактор-группами порядка ≤ 4 до подгруппы H и остальными фактор-группами порядка ≤ 2, причем $|K| \le 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Из этого следует, что $|G| \le 2^{C^2_n + 2C^2_n + n} = 2^{3C^2_n + n}$.

Таким образом, для доказательства п. 1 теоремы надо построить группу $\widehat{G}$ порядка $2^{3C^2_n+n}$, порожденную элементами $a_1, a_2, \dots, a_n$, для которых выполнены все соотношения, указанные в формулировке теоремы.

Лемма 1. *Пусть конечная группа H задана образующими $b_1, \dots, b_k$ и множеством определяющих соотношений: $w_1(b_1, \dots, b_k) = 1, \dots, w_s(b_1, \dots, b_k) = 1$. Пусть задано отображение φ, определенное на множестве $\{b_1, \dots, b_k\} : b_i \overset{\varphi}{\mapsto} v_i(b_1, \dots, b_k)$, $i = \overline{1,k}$, где $v_i(b_1, \dots, b_k)$ для каждого i есть групповое слово, построенное из $b_1, \dots, b_k$, причем выполнены два условия:*

(1) $\langle v_1(b_1, \dots, b_k), \dots, v_k(b_1, \dots, b_k)\rangle = H$,

(2) φ сохраняет все определяющие соотношения группы H, указанные выше, т. е. $w_i\big(b_1^{\varphi}, \dots, b_k^{\varphi}\big) = 1$ для любого $i = \overline{1,s}$.

Тогда отображение φ однозначно продолжается до автоморфизма ψ группы H, причем для любого x из H если x представлен словом $w(b_1, \dots, b_k)$ от образующих $b_1, \dots, b_k$, то $x^{\psi} = w\big(b_1^{\varphi}, \dots, b_k^{\varphi}\big)$.

Доказательство. То, что последняя формула в формулировке леммы правильно определяет гомоморфизм ψ группы H в себя, является достаточно известным фактом (см., например, следствие 1.1.2 в [5]). Ввиду условия (1) леммы этот гомоморфизм сюръективен и, значит, в силу конечности H биективен. Таким образом, ψ — автоморфизм группы H.

Лемма 2. *Пусть m — натуральное число и H — группа, заданная образующими $b_1, \dots, b_k$ и множеством определяющих соотношений: $w_1(b_1, \dots, b_k) = 1, \dots, w_s(b_1, \dots, b_k) = 1$.*

Рассмотрим группу G с образующими $b_1, \dots, b_k, b$, множество определяющих соотношений которой состоит из соотношений, указанных выше, и новых соотношений $b^m = w(b_1, \dots, b_k), b_i^b = v_i(b_1, \dots, b_k)$ для $i = \overline{1,k}$, где w и v_i для $i = \overline{1,k}$ — некоторые групповые слова от $b_1, \dots, b_k$, причем

$$\langle v_1(b_1, \dots, b_k), \dots, v_k(b_1, \dots, b_k)\rangle = H$$

и отображение φ, определенное формулой $b_i \mapsto v_i(b_1, \dots, b_k)$ на множестве $\{b_1, \dots, b_k\}$, сохраняет все определяющие соотношения группы H, указанные *выше. Пусть ψ — автоморфизм группы H, индуцированный отображением φ, как в предыдущей лемме, и выполнены два условия:*

(1) $w(b_1^\varphi, \dots, b_k^\varphi) = w(b_1, \dots, b_k)$, т. е. $w(b_1, \dots, b_k)$ остается неподвижным под действием ψ;

(2) ψ^m — внутренний автоморфизм группы H, индуцированный элементом $w(b_1, \dots, b_k)$.

Тогда G — циклическое расширение группы H с фактор-группой G/H порядка m, причем $G/H = \langle bH \rangle$.

Доказательство леммы 2 вытекает из теорем 15.1.1 и 15.3.1 в [6].

Лемма 3. *Пусть группа H задана образующими τ_{ij}, f_{ij}, где $1 \le i, j \le n$, и определяющими соотношениями:*

$f_{ij}^4 = \tau_{ij}$, $\tau_{ij}^2 = 1$, $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$ для всех $i, j = \overline{1, n}$,

$[\tau_{ij}, f_{ks}] = 1$, $[f_{ij}, f_{ks}] = \tau_{ik}\tau_{is}\tau_{jk}\tau_{js}$ для всех $i, j, k, s = \overline{1, n}$.

Тогда $|H| = 2^{3C_n^2}$ и если через K обозначить $\langle \tau_{ij} \mid 1 \le i, j \le n \rangle$, то K — элементарная абелева группа порядка $2^{C_n^2}$ и H имеет нормальный ряд

$$K < K\langle f_{12}\rangle < K\langle f_{12}\rangle\langle f_{13}\rangle < \dots < K\langle f_{12}\rangle\langle f_{13}\rangle \dots \langle f_{n-1,n}\rangle = H$$

длины C_n^2, каждая фактор-группа которого — циклическая группа порядка 4.

Доказательство. Очевидно, что H имеет нормальный ряд

$$K \le K\langle f_{12}\rangle \le K\langle f_{12}\rangle\langle f_{13}\rangle \le \dots \le K\langle f_{12}\rangle\langle f_{13}\rangle \dots \langle f_{n-1,n}\rangle = H$$

длины C_n^2, каждая фактор-группа которого — циклическая группа порядка ≤ 4, откуда следует, что $|H| \le 2^{3C_n^2}$. Из 1.1.2 в [5] вытекает, что если какая-то группа A порождается множеством M, для элементов которого выполняется некоторое множество соотношений N, то A является фактор-группой группы, заданной множеством образующих M и множеством определяющих соотношений N. Поэтому для доказательства леммы надо построить группу $\widehat{H}$ порядка $2^{3C_n^2}$, порожденную элементами τ_{ij}, f_{ij}, $1 \le i, j \le n$, для которых выполнены все соотношения, указанные в формулировке леммы.

Построение группы $\widehat{H}$ начнем с группы $\widehat{K} = \langle \tau_{12} \rangle \times \langle \tau_{13} \rangle \times \dots \times \langle \tau_{n-1,n} \rangle$ — элементарной абелевой группы порядка $2^{C_n^2}$.

Для дальнейшего сразу обозначим $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$ при $\alpha > \beta$ и $\tau_{\alpha\alpha} = 1$ для любого α. Кроме того, на множестве $\{(i, j) \mid 1 \le i < j \le n\}$ упорядоченных пар индексов введем лексикографический порядок: $(i, j) < (i', j') \Leftrightarrow i < i'$ либо $i = i'$, $j < j'$.

Заметим также, что $\widehat{K} = \langle \tau_{ij} \mid 1 \le i, j \le n \rangle$ имеет следующие определяющие соотношения:

$$[\tau_{ij}, \tau_{ks}] = 1, \quad \tau_{ij}^2 = 1, \quad \tau_{ji} = \tau_{ij}, \quad \tau_{ii} = 1,$$

где $i, j, k, s = \overline{1, n}$. Построение группы $\widehat{K}$ можно назвать нулевым шагом построения $\widehat{H}$. На первом шаге построим группу $\widehat{K}_{12} = \langle \widehat{K}, f_{12} \rangle$ с добавленными определяющими соотношениями $\tau_{ij}^{f_{12}} = \tau_{ij}$ для всех $i, j = \overline{1, n}$ и $f_{12}^4 = \tau_{12}$, на втором шаге построим группу $\widehat{K}_{13} = \langle \widehat{K}_{12}, f_{13} \rangle$ с определяющими соотношениями группы $\widehat{K}_{12}$ и с добавленными определяющими соотношениями $\tau_{ij}^{f_{13}} = \tau_{ij}$ для всех $i, j = \overline{1, n}$, $f_{12}^{f_{13}} = f_{12}\tau_{11}\tau_{13}\tau_{21}\tau_{23}$ и $f_{13}^4 = \tau_{13}$, и т. д.

Допустим, что на шаге с номером $h = (n-1) + (n-2) + \dots + (n-(\alpha-1)) + \beta - \alpha$ построили нужную группу $\widehat{K}_{\alpha\beta}$, где $\alpha < \beta$, $(\alpha, \beta) \ne (n-1, n)$, с нормальным рядом $\widehat{K} < \widehat{K}_{12} = \langle \widehat{K}, f_{12}\rangle < \cdots < \widehat{K}_{\alpha\beta} = \langle \widehat{K}, f_{12}, \dots, f_{\alpha\beta}\rangle$ длины h, причем $\widehat{K}_{\alpha\beta}$ порождена элементами τ_{ij}, $1 \le i, j \le n$, и f_{ks}, где $(k,s) \le (\alpha,\beta)$, $k < s$, каждая фактор-группа данного ряда циклическая порядка 4 и $\widehat{K}_{\alpha\beta}$ имеет следующие определяющие соотношения:

$$[\tau_{ij}, \tau_{ks}] = 1, \quad \tau_{ij}^2 = 1, \quad \tau_{ji} = \tau_{ij}, \quad \tau_{ii} = 1 \quad \text{для всех } i, j, k, s = \overline{1, n},$$

$$\tau_{ij}^{f_{ks}} = \tau_{ij} \quad \text{для всех } i, j = \overline{1, n} \text{ и всех } k, s \text{ таких, что } (k,s) \le (\alpha,\beta),\ k < s,$$

$$f_{ij}^{f_{ks}} = f_{ij}\tau_{ik}\tau_{is}\tau_{jk}\tau_{js} \quad \text{для всех пар } (i,j) \text{ и } (k,s)$$

таких, что $(i,j), (k,s) \le (\alpha,\beta),\ i < j,\ k < s$, а также

$$f_{ij}^4 = \tau_{ij} \quad \text{для всех пар } (i,j) \text{ таких, что } (i,j) \le (\alpha,\beta).$$

Рассмотрим группу $\widehat{K}_{lt}$, порожденную образующими τ_{ij}, $1 \le i, j \le n$, f_{ks}, где $k < s$ и $(k,s) \le (\alpha,\beta)$, группы $\widehat{K}_{\alpha\beta}$ и f_{lt}, где упорядоченная пара (l,t) с $l < t$ непосредственно следует по возрастанию за парой (α,β) относительно рассматриваемого нами лексикографического порядка, т. е. $l = \alpha, t = \beta + 1$ при $\beta < n$ и $l = \alpha + 1, t = \alpha + 2$ при $\beta = n$. При этом определяющими соотношениями этой группы помимо определяющих соотношений группы $\widehat{K}_{\alpha\beta}$ являются добавленные определяющие соотношения:

$$\tau_{ij}^{f_{lt}} = \tau_{ij} \quad \text{для всех } i, j = \overline{1, n},$$

$$f_{ij}^{f_{lt}} = f_{ij}\tau_{il}\tau_{it}\tau_{jl}\tau_{jt} \quad \text{для всех } i, j \text{ таких, что } (i,j) \le (l,t),\ i < j,$$

а также

$$f_{lt}^4 = \tau_{lt}.$$

Таким образом, находимся в условиях применения леммы 2, если буквой φ обозначить следующее отображение множества порождающих элементов группы $\widehat{K}_{\alpha\beta}$ в $\widehat{K}_{\alpha\beta}$:

$$\tau_{ij}^{\varphi} = \tau_{ij} \quad \text{для всех } i, j = \overline{1, n},$$

$$f_{ij}^{\varphi} = f_{ij}\tau_{il}\tau_{it}\tau_{jl}\tau_{jt} \quad \text{для всех } i, j \text{ таких, что } (i,j) < (l,t), i < j.$$

Во-первых, заметим, что указанные образы порождающих элементов группы $\widehat{K}_{\alpha\beta}$ под действием φ порождают $\widehat{K}_{\alpha\beta}$.

Во-вторых, проверим, что φ сохраняет все определяющие соотношения группы $\widehat{K}_{\alpha\beta}$.

Однако то, что φ сохраняет соотношения видов

$$[\tau_{ij}, \tau_{ks}] = 1, \quad \tau_{ij}^2 = 1, \quad \tau_{ji} = \tau_{ij}, \quad \tau_{ii} = 1, \quad \tau_{ij}^{f_{ks}} = \tau_{ij},$$

очевидно.

Проверим сохранение соотношения

$$f_{ij}^{f_{ks}} = f_{ij}\tau_{ik}\tau_{is}\tau_{jk}\tau_{js} \quad ((i,j), (k,s) \le (\alpha,\beta),\ i < j,\ k < s),$$

т. е. соотношения

$$[f_{ij}, f_{ks}] = \tau_{ik}\tau_{is}\tau_{jk}\tau_{js}.$$

Для этого надо проверить, что

$$[f_{ij}^{\varphi}, f_{ks}^{\varphi}] = \tau_{ik}^{\varphi}\tau_{is}^{\varphi}\tau_{jk}^{\varphi}\tau_{js}^{\varphi}$$

в группе $\widehat{K}_{\alpha\beta}$. Левая часть этого равенства равна

$$[f_{ij}\tau_{il}\tau_{it}\tau_{jl}\tau_{jt}, f_{ks}\tau_{kl}\tau_{kt}\tau_{sl}\tau_{st}] = [f_{ij}, f_{ks}],$$

так как все $\tau_{\gamma\delta}$ лежат в центре $\widehat{K}_{\alpha\beta}$, а правая часть рассматриваемого равенства под действием φ остается неподвижной, т. е. снова $[f_{ij}, f_{ks}]$.

Проверим сохранение соотношения $f_{ij}^4 = \tau_{ij}$ $((i,j) \leq (\alpha,\beta),\ i < j)$. Надо проверить равенство $\left(f_{ij}^{\varphi}\right)^4 = \tau_{ij}^{\varphi}$. Однако в левой части имеем $(f_{ij}\tau_{ik}\tau_{is}\tau_{jk}\tau_{js})^4 = f_{ij}^4 = \tau_{ij} = \tau_{ij}^{\varphi}$, так как все $\tau_{\gamma\delta}$ имеют порядок ≤ 2.

Итак, φ сохраняет все определяющие соотношения группы $\widehat{K}_{\alpha\beta}$ и, значит, индуцирует автоморфизм ψ группы $\widehat{K}_{\alpha\beta}$ (в силу леммы 1).

Далее, $\tau_{ij}^{\psi} = \tau_{ij}$ при $1 \leq i < j \leq n$, в частности, $\tau_{lt}^{\psi} = \tau_{lt}$ и $f_{ij}^{\psi^4} = f_{ij}\tau_{il}^4\tau_{it}^4\tau_{jl}^4\tau_{jt}^4 = f_{ij}$ при $(i,j) < (l,t)$, откуда следует, что τ_{lt} неподвижен под действием ψ и ψ^4 — автоморфизм $\widehat{K}_{\alpha\beta}$, индуцированный τ_{lt}, т. е. совпадающий с тождественным автоморфизмом.

Значит, по лемме 2 фактор-группа $\widehat{K}_{lt}/\widehat{K}_{\alpha\beta}$ циклическая порядка 4.

Продолжая рассматриваемый процесс, на $\frac{n(n-1)}{2}$-м шаге получим требуемую группу $\widehat{H}$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть H — группа из леммы 3 и $\widehat{G}$ — группа, заданная образующими τ_{ij}, f_{ij}, $1 \leq i,j \leq n$, $a_1,\dots,a_n$, определяющими соотношениями группы $\widehat{H}$, сформулированными в лемме 3, и добавленными определяющими соотношениями:*

$a_j^2 = 1$ *для всех* $j = \overline{1,n}$,

$[a_i,a_j] = f_{ij}, \quad [\tau_{ij}, a_l] = 1, \quad [f_{ij}, a_l] = f_{jl}^2 f_{li}^2$ *для всех* $i,j,l = \overline{1,n}$.

Тогда $|\widehat{G}| = |H| \cdot 2^n$ *и*

$$\widehat{G} = (\dots(H \leftthreetimes \langle a_1\rangle) \leftthreetimes \dots \leftthreetimes \langle a_n\rangle).$$

Доказательство. Достаточно в силу леммы 2 проверить, что отображение φ на множестве образующих группы $\widehat{G}$, заданное при фиксированном k формулами

$$\tau_{ij}^{\varphi} = \tau_{ij}, \quad f_{ij}^{\varphi} = f_{ij}f_{jk}^2 f_{ki}^2, \quad a_i^{\varphi} = a_i f_{ik}, \quad \text{где } 1 \leq i,j \leq n, \tag{1}$$

сохраняет все определяющие соотношения группы $\widehat{G}$ и что индуцированный отображением φ автоморфизм ψ группы $\widehat{G}$ имеет порядок 2.

Очевидно, что φ сохраняет все определяющие соотношения группы H, выписанные в формулировке леммы 3.

Рассмотрим соотношение $a_j^2 = 1$:

$$\left(a_j^{\varphi}\right)^2 = (a_j f_{jk})^2 = a_j^2 f_{jk}^{a_j} f_{jk} = f_{jk} f_{kj}^2 f_{jj}^2 f_{jk} = 1,$$

что и требовалось.

Соотношение вида $[\tau_{ij}, a_l] = 1$ сохраняется очевидным образом.

Докажем теперь, что $\left[a_i^{\varphi}, a_j^{\varphi}\right] = f_{ij}^{\varphi}$ для всех $i,j = \overline{1,n}$. Левая часть данного равенства равна

$$\begin{aligned}[a_i f_{ik}, a_j f_{jk}] &= [a_i, a_j f_{jk}]^{f_{ik}}[f_{ik}, a_j f_{jk}] = ([a_i, f_{jk}] f_{ij}[f_{ij}, f_{jk}])^{f_{ik}}[f_{ik}, f_{jk}][f_{ik}, a_j] \\ &= \left(f_{ij}^{-2} f_{ki}^{-2} f_{ij}\tau_{ik}\tau_{jk}\tau_{ij}\right)^{f_{ik}}\tau_{ik}\tau_{ij}\tau_{kj}\left(f_{kj}^2 f_{ji}^2\right)^{f_{jk}} = f_{ij}^{-2} f_{ki}^{-2} f_{ij}\tau_{ik}\tau_{ji}\tau_{jk} f_{kj}^2 f_{ji}^2 \\ &= f_{ij} f_{ki}^{-2}\tau_{ik} f_{kj}^2 \tau_{jk} = f_{ij} f_{jk}^2 f_{ki}^2 = (f_{ij})^{\varphi},\end{aligned}$$

что и требовалось.

Осталось проверить равенство

$$[f_{ij}^{\varphi}, a_l^{\varphi}] = \left(f_{jl}^{\varphi}\right)^2 \left(f_{li}^{\varphi}\right)^2$$

для любых $i, j, l = \overline{1, n}$. Для левой части данного равенства имеем

$$\begin{aligned}[f_{ij} f_{jk}^2 f_{ki}^2, a_l f_{lk}] &= [f_{ij}, f_{lk}] [f_{ij} f_{jk}^2 f_{ki}^2, a_l]^{f_{lk}} \\ &= \tau_{ik} \tau_{jk} \tau_{il} \tau_{jl} \left([f_{ij}, a_l] [f_{jk}^2, a_l] [f_{ki}^2, a_l]\right)^{f_{lk}} \\ &= \tau_{ik} \tau_{jk} \tau_{il} \tau_{jl} f_{jl}^2 f_{li}^2 f_{kl}^4 f_{lj}^4 f_{il}^4 f_{lk}^4 = f_{jl}^2 f_{li}^2 \tau_{ik} \tau_{jk},\end{aligned}$$

для правой —

$$f_{jl}^2 \tau_{lk} \tau_{kj} f_{li}^2 \tau_{ik} \tau_{kl} = f_{jl}^2 f_{li}^2 \tau_{ik} \tau_{kj}.$$

Получили совпадение обеих частей рассматриваемого равенства.

Таким образом, равенства (1) при фиксированном k задают автоморфизм ψ группы $\widehat{G}$. Докажем, что этот автоморфизм имеет порядок 2.

Это действительно так, потому что $a_i^{\psi^2} = a_i^{\varphi^2} = a_i^{\varphi} f_{ik}^{\varphi} = a_i f_{ik} f_{ik} f_{ki}^2 = a$ для любого $i = \overline{1, n}$. Лемма 4 доказана.

Далее, группа $\widehat{G}$ из леммы 4 порождена инволюциями $a_i, \dots, a_n$, имеет порядок $2^{3C_n^2 + n}$, и порождающие инволюции a_i удовлетворяют всем соотношениям в формулировке доказываемой теоремы. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

П. 2. Во-первых, ясно, что G'' — элементарная абелева группа, которая порождается элементами вида $\tau_{ik} \tau_{is} \tau_{jk} \tau_{js}$, где $1 \le i, j, k, s \le n$.

Далее $\tau_{ik} \tau_{is} \tau_{jk} \tau_{js} = (\tau_{ik} \tau_{jk} \tau_{ij})(\tau_{ij} \tau_{js} \tau_{is})$, откуда следует, что G'' порождается элементами вида $\tau_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\gamma} \tau_{\beta\gamma}$.

Обозначим $\tau_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\gamma} \tau_{\beta\gamma} = \tau_{\alpha\beta\gamma}$, где $1 \le \alpha, \beta, \gamma \le n$. Очевидно, что $\tau_{\alpha\beta\gamma}$ не зависит от порядка расположения индексов α, β, γ в записи этого элемента, а при совпадении хотя бы двух из индексов α, β, γ имеем $\tau_{\alpha\beta\gamma} = 1$. Следовательно, $G'' = \langle \tau_{\alpha\beta\gamma},\ 1 \le \alpha < \beta < \gamma \le n \rangle$.

Обозначим $T = \{\tau_{1\beta\gamma} \mid 1 < \beta < \gamma \le n\rangle$ и докажем, что T — минимальное множество образующих G''. Для этого удобно, используя аддитивную запись для операции в K, рассматривать эту подгруппу как векторное пространство над полем F_2 и доказать, что T — базис G'' как подпространства пространства K.

Сначала заметим, что $\tau_{\alpha\beta\gamma} = \tau_{1\alpha\beta} + \tau_{1\alpha\gamma} + \tau_{1\beta\gamma}$. Действительно, для правой части этого равенства имеем $\tau_{1\alpha} + \tau_{1\beta} + \tau_{\alpha\beta} + \tau_{1\alpha} + \tau_{1\gamma} + \tau_{\alpha\gamma} + \tau_{1\beta} + \tau_{1\gamma} + \tau_{\beta\gamma} = \tau_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\gamma} + \tau_{\beta\gamma} = \tau_{\alpha\beta\gamma}$.

С другой стороны, если $\sum\limits_{1 < \beta < \gamma \le n} \omega_{\beta\gamma} \tau_{1\beta\gamma} = 0$, где $\omega_{\beta\gamma} \in \{0, 1\}$, то

$$\sum_{1 < \beta < \gamma \le n} \omega_{\beta\gamma} (\tau_{1\beta} + \tau_{1\gamma} + \tau_{\beta\gamma}) = 0,$$

откуда $\omega_{\beta\gamma} = 0$ при всех рассматриваемых β, γ в силу того, что элементы вида τ_{ij}, где $1 \le i < j \le n$, образуют базис K. Значит, система элементов T линейно независима и, следовательно, является базисом G''. Поскольку $|T| = C_{n-1}^2$, ранг G'' равен C_{n-1}^2, что и требовалось доказать.

П. 3. В доказательстве этого пункта будет использоваться следующее обозначение: если u, v — элементы группы G, а $N \trianglelefteq G$, то $u \equiv v \operatorname{mod}(N)$ будет означать, что $uN = vN$. Условимся прежде всего, что G_k означает k-й член нижнего центрального ряда группы G. Буква K всюду ниже будет означать $\langle\tau_{12}\rangle \times \langle\tau_{13}\rangle \times \dots \times \langle\tau_{n-1,n}\rangle$.

Лемма 5. $[G_2, G_3] = G_5 = 1$.

Доказательство леммы сразу следует из определяющих соотношений группы G.

Лемма 6. *Для любых индексов $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, 2, \dots, n\}$ справедливо равенство $[a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}] = \tau_{i_1 i_4}\tau_{i_2 i_4}$, в частности, $[a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}a_{i_4}] \equiv [a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}] \cdot [a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_4}] \operatorname{mod}(K)$.*

Доказательство. Имеем

$$[a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}] = [[a_{i_2}, a_{i_3}]^2[a_{i_3}, a_{i_1}]^2, a_{i_4}] = [a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}]^2[a_{i_3}, a_{i_1}, a_{i_4}]^2$$
$$= [a_{i_3}, a_{i_4}]^4[a_{i_4}, a_{i_2}]^4[a_{i_1}, a_{i_4}]^4[a_{i_4}, a_{i_3}]^4 = \tau_{i_1 i_4}\tau_{i_2 i_4}.$$

Лемма 6 доказана.

Заметим, что для доказательства п. 3 теоремы достаточно показать, что $[x, y, x]$ и $[x, y, y]$ являются степенями коммутатора $[x, y]$ для любых элементов $x, y \in G$. В самом деле, если это условие выполнено, то $\langle[x, y]\rangle \trianglelefteq \langle x, y\rangle$, а тогда $\langle[x, y]\rangle = \langle x, y\rangle'$.

Лемма 7. *Коммутант $\langle a_{i_1} \dots a_{i_m}, a_{i_{m+1}}\rangle'$ цикличен для любых индексов $i_1, \dots, i_m, i_{m+1} \in \{1, 2, \dots, n\}$ и для любого $m \geq 1$.*

Доказательство. Обозначим $a_{i_s} = b_s$ для любого $s = \overline{1, m+1}$, а также $\sigma_{kl} = [b_k, b_l]^4$ для всех $k, l = \overline{1, m+1}$.

Отметим сначала, что $[x, b_{m+1}]^2[x, b_{m+1}, b_{m+1}] = \left[x, b_{m+1}^2\right] = 1$ для любого $x \in G$, откуда $[x, b_{m+1}, b_{m+1}]{=}[x, b_{m+1}]^{-2}$. Следовательно, $[b_1 \dots b_m, b_{m+1}, b_{m+1}] = [b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^{-2}$. Осталось доказать, что $[b_1 \dots b_m, b_{m+1}, b_1 \dots b_m]$ — степень коммутатора $[b_1 \dots b_m, b_{m+1}]$.

Считаем коммутатор $[b_1 \dots b_m, b_{m+1}]$:

$$\begin{aligned}
[b_1 \dots b_m, b_{m+1}] &= [b_1 \dots b_{m-1}, b_{m+1}]^{b_m}[b_m, b_{m+1}] \\
&= [b_1 \dots b_{m-2}, b_{m+1}]^{b_{m-1}b_m}[b_{m-1}, b_{m+1}]^{b_m}[b_m, b_{m+1}] = \dots \\
&= [b_1, b_{m+1}]^{b_2 \dots b_m}[b_2, b_{m+1}]^{b_3 \dots b_m} \dots [b_{m-1}, b_{m+1}]^{b_m}[b_m, b_{m+1}] \\
&= [b_1, b_{m+1}][b_1, b_{m+1}, b_2 \dots b_m][b_2, b_{m+1}][b_2, b_{m+1}, b_3 \dots b_m] \\
&\quad \dots [b_{m-1}, b_{m+1}][b_{m-1}, b_{m+1}, b_m][b_m, b_{m+1}] \\
&\equiv [b_{m+1}, b_2]^2[b_2, b_1]^2[b_{m+1}, b_3]^2[b_3, b_1]^2 \dots [b_{m+1}, b_m]^2[b_m, b_1]^2[b_{m+1}, b_3]^2[b_3, b_2]^2 \\
&\quad \dots [b_{m+1}, b_m]^2[b_m, b_2]^2 \dots [b_{m+1}, b_m]^2[b_m, b_{m-1}]^2[b_1, b_{m+1}][b_2, b_{m+1}] \\
&\quad \dots [b_{m-1}, b_{m+1}][b_m, b_{m+1}] \operatorname{mod}(K),
\end{aligned}$$

так как $G_4 \leq K$. Таким образом,

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1}] \equiv [b_1, b_{m+1}][b_2, b_{m+1}] \dots [b_m, b_{m+1}]$$
$$\cdot [b_{m+1}, b_2]^2[b_{m+1}, b_3]^4 \dots [b_{m+1}, b_m]^{2(m-1)} \prod_{m \geq i > j \geq 1} [b_i, b_j]^2 \operatorname{mod}(K).$$

Теперь считаем квадрат коммутатора $[b_1 \dots b_m, b_{m+1}]$:

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^2 = [b_1, b_{m+1}][b_2, b_{m+1}] \dots [b_{m-1}, b_{m+1}][b_m, b_{m+1}]$$

$$\cdot [b_1, b_{m+1}][b_2, b_{m+1}] \dots [b_{m-1}, b_{m+1}][b_m, b_{m+1}]\sigma_{2,m+1}\sigma_{3,m+1}^2 \dots \sigma_{m,m+1}^{m-1} \prod_{1 \le i < j \le m} \sigma_{ij}$$

$$= [b_1, b_{m+1}]^2(\sigma_{1,m}\sigma_{1,m+1}\sigma_{m,m+1})(\sigma_{1,m-1}\sigma_{1,m+1}\sigma_{m-1,m+1}) \dots (\sigma_{1,2}\sigma_{1,m+1}\sigma_{2,m+1})$$

$$\cdot [b_2, b_{m+1}]^2(\sigma_{2,m}\sigma_{2,m+1}\sigma_{m,m+1})(\sigma_{2,m-1}\sigma_{2,m+1}\sigma_{m-1,m+1}) \dots (\sigma_{2,3}\sigma_{2,m+1}\sigma_{3,m+1})$$

$$\cdot [b_3, b_{m+1}]^2(\sigma_{3,m}\sigma_{3,m+1}\sigma_{m,m+1})(\sigma_{3,m-1}\sigma_{3,m+1}\sigma_{m-1,m+1}) \dots (\sigma_{3,4}\sigma_{3,m+1}\sigma_{4,m+1})$$

$$\dots [b_{m-1}, b_{m+1}]^2(\sigma_{m-1,m}\sigma_{m-1,m+1}\sigma_{m,m+1})[b_m, b_{m+1}]^2$$

$$\cdot \sigma_{2,m+1}\sigma_{3,m+1}^2 \dots \sigma_{m,m+1}^{m-1} \prod_{1 \le i < j \le m} \sigma_{ij}$$

$$= [b_1, b_{m+1}]^2[b_2, b_{m+1}]^2 \dots [b_m, b_{m+1}]^2\sigma_{1,m+1}^{m-1}\sigma_{2,m+1}^{m-1}\sigma_{3,m+1}^{m-1} \dots \sigma_{m,m+1}^{m-1}$$

$$\cdot \sigma_{2,m+1}\sigma_{3,m+1}^2 \dots \sigma_{m,m+1}^{m-1}$$

$$= [b_1, b_{m+1}]^2[b_2, b_{m+1}]^2 \dots [b_m, b_{m+1}]^2\sigma_{1,m+1}^{m-1}\sigma_{2,m+1}^{m} \dots \sigma_{m-1,m+1}^{2m-3}\sigma_{m,m+1}^{2m-2}. \qquad (2)$$

Считаем тройной коммутатор $[b_1 \dots b_m, b_{m+1}, b_1 \dots b_m]$:

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1}, b_1 \dots b_m] = [[b_1, b_{m+1}][b_2, b_{m+1}] \dots [b_m, b_{m+1}], b_1 \dots b_m]$$

$$\cdot [[b_{m+1}, b_2]^2[b_{m+1}, b_3]^4 \dots [b_{m+1}, b_m]^{2(m-1)}, b_1 \dots b_m]\Big[\prod_{1 \le i < j \le m} [b_i, b_j]^2, b_1 \dots b_m\Big].$$

Сначала посчитаем последний коммутатор:

$$\Big[\prod_{1 \le i < j \le m} [b_i, b_j]^2, b_1 \dots b_m\Big] = \prod_{1 \le i < j \le m, 1 \le k \le m} [b_i, b_j, b_k]^2$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le m, 1 \le k \le m} [b_j, b_k]^4[b_k, b_i]^4.$$

Последнее произведение при фиксированном k равно

$$\prod_{1 \le i < j \le m} [b_j, b_k]^4[b_k, b_i]^4 = [b_2, b_k]^4[b_k, b_1]^4[b_3, b_k]^4[b_k, b_1]^4$$

$$\dots [b_m, b_k]^4[b_k, b_1]^4[b_3, b_k]^4[b_k, b_2]^4 \dots [b_m, b_k]^4[b_k, b_2]^4 \dots [b_m, b_k]^4[b_k, b_{m-1}]^4$$

$$= [b_k, b_1]^{4(m-1)}[b_k, b_2]^{4(m-3)} \dots [b_k, b_m]^{4(1-m)} = \prod_{1 \le l \le m} [b_k, b_l]^{4(m-1)}.$$

Следовательно,

$$\Big[\prod_{1 \le i < j \le m} [b_i, b_j]^2, b_1 \dots b_m\Big] = \prod_{1 \le k, l \le m} [b_k, b_l]^{4(m-1)} = 1.$$

При фиксированном j считаем коммутатор $[[b_1, b_{m+1}] \dots [b_m, b_{m+1}], b_j]$. Он равен

$$\prod_{i=1}^{m}[b_i, b_{m+1}, b_j] = \prod_{i=1}^{m}[b_{m+1}, b_j]^2[b_j, b_i]^2 = [b_{m+1}, b_j]^{2m}\prod_{i=1}^{m}[b_j, b_i]^2.$$

Тогда

$$\prod_{j=1}^{m}[[b_1, b_{m+1}] \dots [b_m, b_{m+1}], b_j] = \prod_{j=1}^{m}[b_{m+1}, b_j]^{2m} = [b_{m+1}, b_1]^{2m} \dots [b_{m+1}, b_m]^{2m}.$$

Обозначим $A = [b_1, b_{m+1}] \dots [b_m, b_{m+1}]$. Тогда имеем следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
&[[b_1, b_{m+1}] \dots [b_m, b_{m+1}], b_1 \dots b_m] = [A, b_m][A, b_1 \dots b_{m-1}]^{b_m} \\
&= [A, b_m][A, b_{m-1}]^{b_m}[A, b_1 \dots b_{m-2}]^{b_{m-1}b_m} \\
&= \dots = [A, b_m][A, b_{m-1}]^{b_m}[A, b_{m-2}]^{b_{m-1}b_m} \dots [A, b_1]^{b_2 \dots b_m} \\
&= \left(\prod_{j=1}^{m}[A, b_j]\right)[A, b_{m-1}, b_m][A, b_{m-2}, b_{m-1}b_m] \dots [A, b_1, b_2 \dots b_m] \\
&= \prod_{j=1}^{m}[b_{m+1}, b_j]^{2m}(\sigma_{1m}\sigma_{m+1,m}\sigma_{2m}\sigma_{m+1,m} \dots \sigma_{mm}\sigma_{m+1,m})^{m-1} \\
&\cdot (\sigma_{1,m-1}\sigma_{m+1,m-1}\sigma_{2,m-1}\sigma_{m+1,m-1} \dots \sigma_{m,m-1}\sigma_{m+1,m-1})^{m-2} \\
&\cdot (\sigma_{1,m-2}\sigma_{m+1,m-2}\sigma_{2,m-2}\sigma_{m+1,m-2} \dots \sigma_{m,m-2}\sigma_{m+1,m-2})^{m-3} \\
&\cdot \dots (\sigma_{12}\sigma_{m+1,2}\sigma_{22}\sigma_{m+1,2} \dots \sigma_{m2}\sigma_{m+1,2}) \\
&= \prod_{j=1}^{m}[b_{m+1}, b_j]^{2m}(\sigma_{1m}\sigma_{2m} \dots \sigma_{mm})^{m-1}(\sigma_{1,m-1}\sigma_{2,m-1} \dots \sigma_{m,m-1})^{m-2} \\
&\cdot \dots \sigma_{12}\sigma_{22} \dots \sigma_{m2}((\sigma_{m+1,m})^{(m-1)m}(\sigma_{m+1,m-1})^{(m-2)m} \dots (\sigma_{m+1,2})^{1\cdot m}).
\end{aligned}
$$

Заметим, что при получении предпоследнего равенства использовались леммы 5 и 6. Далее,

$$
\begin{aligned}
&[[b_{m+1}, b_2]^2[b_{m+1}, b_3]^4 \dots [b_{m+1}, b_m]^{2(m-1)}, b_1 \dots b_m] \\
&= [b_{m+1}, b_2, b_1 \dots b_m]^2[b_{m+1}, b_3, b_1 \dots b_m]^4 \dots [b_{m+1}, b_m, b_1 \dots b_m]^{2(m-1)} \\
&= (\sigma_{21}\sigma_{1,m+1}\sigma_{22}\sigma_{2,m+1} \dots \sigma_{2m}\sigma_{m,m+1}) \\
&\cdot (\sigma_{31}\sigma_{1,m+1}\sigma_{32}\sigma_{2,m+1} \dots \sigma_{3m}\sigma_{m,m+1})^2 \\
&\dots (\sigma_{m1}\sigma_{1,m+1}\sigma_{m2}\sigma_{2,m+1} \dots \sigma_{mm}\sigma_{m,m+1})^{m-1} \\
&= (\sigma_{21}\sigma_{22} \dots \sigma_{2m})(\sigma_{31}\sigma_{32} \dots \sigma_{3m})^2 \dots (\sigma_{m1}\sigma_{m2} \dots \sigma_{mm})^{m-1} \\
&\cdot (\sigma_{1,m+1}\sigma_{2,m+1} \dots \sigma_{m,m+1})^{\frac{m(m-1)}{2}}.
\end{aligned}
$$

Итак, имеем

$$
\begin{aligned}
&[b_1 \dots b_m, b_{m+1}, b_1 \dots b_m] = \prod_{j=1}^{m}[b_{m+1}, b_j]^{2m} \\
&\cdot (\sigma_{1m}\sigma_{2m} \dots \sigma_{mm})^{m-1}(\sigma_{1,m-1}\sigma_{2,m-1} \dots \sigma_{m,m-1})^{m-2} \dots (\sigma_{12}\sigma_{22} \dots \sigma_{m2}) \\
&\cdot (\sigma_{21}\sigma_{22} \dots \sigma_{2m})(\sigma_{31}\sigma_{32} \dots \sigma_{3m})^2 \dots (\sigma_{m1}\sigma_{m2} \dots \sigma_{mm})^{m-1} \\
&\cdot (\sigma_{1,m+1}\sigma_{2,m+1} \dots \sigma_{m,m+1})^{\frac{m(m-1)}{2}} \\
&\cdot (\sigma_{m+1,m})^{(m-1)m}(\sigma_{m+1,m-1})^{(m-2)m} \dots (\sigma_{m+1,2})^{1\cdot m} \\
&= \prod_{j=1}^{m}[b_{m+1}, b_j]^{2m}(\sigma_{1,m+1}\sigma_{2,m+1} \dots \sigma_{m,m+1})^{\frac{m(m-1)}{2}} \\
&\cdot \sigma_{m+1,m}^{m(m-1)}\sigma_{m+1,m-1}^{(m-2)m} \dots \sigma_{m+1,2}^{1\cdot m}\sigma_{m+1,1}^{0\cdot m}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Заметим, что из (2) следует

$$
\begin{aligned}
&[b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^2 = \sigma_{1,m+1}^{m-1}\sigma_{2,m+1}^{m} \dots \sigma_{m-1,m+1}^{2m-3}\sigma_{m,m+1}^{2m-2}[b_1, b_{m+1}]^2 \dots [b_m, b_{m+1}]^2 \\
&= [b_1, b_{m+1}]^2 \dots [b_m, b_{m+1}]^2\sigma_{1,m+1}^{m-1}\sigma_{2,m+1}^{m-2} \dots \sigma_{m,m+1}^{0}.
\end{aligned}
$$

Значит, учитывая (3), при четном $\frac{m(m-1)}{2}$ имеем

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^{-2m} = \prod_{j=1}^{m}[b_{m+1}, b_j]^{2m}\sigma_{1,m+1}^{m(m-1)}\sigma_{2,m+1}^{m(m-2)}\dots\sigma_{m-1,m+1}^{m}\sigma_{m,m+1}^{0\cdot m}$$
$$= [b_1 \dots b_m, b_{m+1}, b_1 \dots b_m],$$

так как $m(m-i) - m(i-1) = m(m+1-2i)$ — четное число для любого $i = \overline{1,m}$. Тем самым $[b_1 \dots b_m, b_{m+1}, b_1 \dots b_m] = [b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^{-2m}$ при четном $\frac{m(m-1)}{2}$.

Докажем далее, что $[b_1 \dots b_m, b_{m+1}, b_1 \dots b_m] = [b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^{2m}$ при нечетном $\frac{m(m-1)}{2}$ и нечетном m, т. е. что

$$\prod_{j=1}^{m}[b_{m+1}, b_j]^{2m}(\sigma_{1,m+1}\dots\sigma_{m,m+1})\cdot\sigma_{m+1,m}^{m(m-1)}\sigma_{m+1,m-1}^{(m-2)m}\dots\sigma_{m+1,2}^{m}$$
$$= \prod_{j=1}^{m}[b_j, b_{m+1}]^{2m}\sigma_{1,m+1}^{m(m-1)}\sigma_{2,m+1}^{m(m-2)}\dots\sigma_{m-1,m+1}^{m}.$$

Выражения $\sigma_{m+1,m}^{m(m-1)}\dots\sigma_{m+1,2}^{m}$ слева в данном равенстве и $\sigma_{1,m+1}^{m(m-1)}\dots\sigma_{m-1,m+1}^{m}$ справа равны, как только что доказано выше, и, значит, доказываемое равенство равносильно равенству $\prod\limits_{j=1}^{m}[b_{m+1}, b_j]^{4m} = \sigma_{1,m+1}\dots\sigma_{m,m+1}$, которое в силу нечетности m является верным.

Осталось рассмотреть случай, когда m четно, $\frac{m(m-1)}{2}$ нечетно. В этом случае m не делится на 4 и

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1}, b_1 \dots b_m] = \prod_{j=1}^{m}[b_{m+1}, b_j]^{2m}(\sigma_{1,m+1}\dots\sigma_{m,m+1}) = 1,$$

$[b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^{2m} = \prod\limits_{j=1}^{m}[b_j, b_{m+1}]^{2m} = \prod\limits_{j=1}^{m}\sigma_{j,m+1}$. Можно, в частности, записать, что $[b_1 \dots b_m, b_{m+1}, b_1 \dots b_m] = [b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^{2(m-2)}$. Таким образом,

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1}, b_1 \dots b_m] = \begin{cases} [b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^{-2m} \text{ при четном } \frac{m(m-1)}{2}, \\ [b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^{2m} \text{ при нечетных } m \text{ и } \frac{m(m-1)}{2}, \\ [b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^{2(m-2)} \text{ при четном } m \\ \qquad\qquad \text{и нечетном } \frac{m(m-1)}{2}. \end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что в последнем случае $[b_1 \dots b_m, b_{m+1}, b_1 \dots b_m] = 1$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Коммутант $\langle a_{i_1}\dots a_{i_m}, a_{i_{m+1}}\dots a_{i_{m+l}}\rangle'$ цикличен для любых индексов $i_1, \dots, i_{m+l} \in \{1, 2, \dots, n\}$ при любых $m, l \geq 1$.*

Доказательство. Снова, как в доказательстве леммы 7, обозначим $a_{i_j} = b_j$ для любого $j = \overline{1, m+l}$, $\sigma_{st} = [b_s, b_t]^4$ для всех $s, t = \overline{1, m+l}$.

Преобразуем основной коммутатор $[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}]$:

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}] = [b_1 \dots b_m, b_{m+l}][b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l-1}]^{b_{m+l}}$$
$$= [b_1 \dots b_m, b_{m+l}][b_1 \dots b_m, b_{m+l-1}]^{b_{m+l}}[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l-2}]^{b_{m+l-1}b_{m+l}}$$
$$= \dots = [b_1 \dots b_m, b_{m+l}][b_1 \dots b_m, b_{m+l-1}]^{b_{m+l}} \dots [b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^{b_{m+2} \dots b_{m+l}}$$
$$= \left(\prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}] \right) [b_1 \dots b_m, b_{m+l-1}, b_{m+l}]$$
$$\cdot [b_1 \dots b_m, b_{m+l-2}, b_{m+l-1} b_{m+l}] \dots [b_1 \dots b_m, b_{m+1}, b_{m+2} \dots b_{m+l}].$$

Для дальнейшего необходимо посчитать коммутатор $[[b_1 \dots b_m, b_i], [b_1 \dots b_m, b_j]]$. Имеем

$$[[b_1 \dots b_m, b_i], [b_1 \dots b_m, b_j]] = \left[\prod_{k=1}^{m} [b_k, b_i], \prod_{s=1}^{m} [b_s, b_j] \right]$$
$$= \prod_{1 \le k,s \le m} \sigma_{ks}\sigma_{kj}\sigma_{is}\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})^{m^2} \prod_{1 \le k,s \le m} \sigma_{ks}\sigma_{kj}\sigma_{is} = (\sigma_{ij})^{m^2} \prod_{1 \le k,s \le m} \sigma_{kj}\sigma_{is}$$
$$= (\sigma_{ij})^{m^2} \prod_{1 \le k,s \le m} \sigma_{kj} \prod_{1 \le k,s \le m} \sigma_{is} = (\sigma_{ij})^{m^2} \prod_{k=1}^{m} \sigma_{kj}^m \prod_{s=1}^{m} \sigma_{is}^m$$
$$= (\sigma_{ij})^{m^2} \prod_{k=1}^{m} \sigma_{kj}^m \prod_{k=1}^{n} \sigma_{ik}^m = \begin{cases} 1 & \text{при четном } m, \\ \sigma_{ij} \prod\limits_{k=1}^{m} \sigma_{kj} \prod\limits_{k=1}^{m} \sigma_{ik} & \text{при нечетном } m. \end{cases} \tag{5}$$

Кроме того, необходимо посчитать $[b_1 \dots b_m, b_i, b_j]^2$. Имеем

$$[b_1 \dots b_m, b_i, b_j]^2 = \prod_{k=1}^{m} [b_k, b_i, b_j]^2 = \prod_{k=1}^{m} [b_i, b_j]^4 [b_j, b_k]^4$$
$$= \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{ij}\sigma_{jk}) = (\sigma_{ij})^m \prod_{k=1}^{m} \sigma_{jk} = \begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{m} \sigma_{jk} & \text{при четном } m, \\ \sigma_{ij} \prod\limits_{k=1}^{m} \sigma_{jk} & \text{при нечетном } m. \end{cases} \tag{6}$$

Дальнейшее доказательство леммы разобьем на два случая: m четно и m нечетно.

Пусть сначала m и $\frac{m(m-1)}{2}$ четны. Тогда с учетом (4) и лемм 5 и 6

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}, b_1 \dots b_m] = \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}, b_1 \dots b_m]$$
$$\cdot [b_1 \dots b_m, b_{m+l-1}, b_{m+l}, b_1 \dots b_m][b_1 \dots b_m, b_{m+l-2}, b_{m+l-1}b_{m+l}, b_1 \dots b_m]$$
$$\dots [b_1 \dots b_m, b_{m+1}, b_{m+2} \dots b_{m+l}, b_1 \dots b_m]$$
$$= \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}]^{-2m} \prod_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{m} \sigma_{ij}\sigma_{m+l-1,j} \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{m} \sigma_{ij}\sigma_{m+l-2,j} \right) \right)^2$$
$$\dots \left(\prod_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{m} \sigma_{ij}\sigma_{m+1,j} \right) \right)^{l-1} = \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}]^{-2m} \prod_{j=1}^{m} (\sigma_{m+l-1,j})^m$$
$$\cdot \prod_{j=1}^{m} (\sigma_{m+l-2,j})^{2m} \cdots \prod_{j=1}^{m} (\sigma_{m+1,j})^{m(l-1)} = \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}]^{-2m}.$$

Поскольку из (5) следует, что коммутаторы вида $[b_1 \dots b_m, b_i]$, $[b_1 \dots b_m, b_j]$ перестановочны при четном m, с учетом (6) имеем

$$
\begin{aligned}
[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}]^2 &= \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}]^2 \\
&\cdot \left(\prod_{k=1}^{m} \sigma_{m+l,k} \right) \left(\prod_{k=1}^{m} (\sigma_{m+l-1,k} \sigma_{m+l,k}) \right) \dots \left(\prod_{k=1}^{m} (\sigma_{m+2,k} \dots \sigma_{m+l,k}) \right) \\
&= \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}]^2 \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{m+l,k})^{l-1} \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{m+l-1,k})^{l-2} \cdots \prod_{k=1}^{m} \sigma_{m+2,k}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Следовательно, при четных m и $\frac{m(m-1)}{2}$

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}, b_1 \dots b_m] = [b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}]^{-2m}.$$

Если же m четно, $\frac{m(m-1)}{2}$ нечетно, то, как и в предыдущем случае, учитывая (4), получим

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}, b_1 \dots b_m] = \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}]^{2(m-2)},$$

а выражение (7), полученное ранее для $[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}]^2$, не изменится.

Значит, $[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}, b_1 \dots b_m] = [b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}]^{2(m-2)}$, так как «хвост» в выражении для $[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}]^2$, состоящий из σ_{ij}, снова пропадет при возведении в степень $m-2$ ввиду четности m.

Рассмотрим теперь случай нечетного m, который несколько сложнее предыдущего случая, поскольку здесь коммутаторы вида $[b_1 \dots b_m, b_i]$ и $[b_1 \dots b_m, b_j]$ уже неперестановочны при $i \neq j$.

Считаем $\left(\prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}] \right)^2$:

$$
\begin{aligned}
&[b_1 \dots b_m, b_{m+l}][b_1 \dots b_m, b_{m+l-1}] \dots [b_1 \dots b_m, b_{m+1}] \\
&\qquad \cdot [b_1 \dots b_m, b_{m+l}][b_1 \dots b_m, b_{m+l-1}] \dots [b_1 \dots b_m, b_{m+1}] \\
&\qquad = [b_1 \dots b_m, b_{m+l}]^2 \left(\prod_{k=1}^{m} \sigma_{k,m+1} \prod_{k=1}^{m} \sigma_{k,m+l} \right) \sigma_{m+1,m+l} \\
&\qquad \cdot \dots \left(\prod_{k=1}^{m} \sigma_{k,m+l} \prod_{k=1}^{m} \sigma_{k,m+l-1} \right) \sigma_{m+l,m+l-1} \dots \\
&= [b_1 \dots b_m, b_{m+l}]^2 \left(\prod_{k=1}^{m} \sigma_{k,m+l} \right)^{l-1} \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+1} \dots \sigma_{k,m+l-1}) \prod_{k=m+1}^{m+l-1} \sigma_{k,m+l} \\
&\qquad \cdot [b_1 \dots b_m, b_{m+l-1}][b_1 \dots b_m, b_{m+l-2}] \dots [b_1 \dots b_m, b_{m+1}] \\
&\qquad \cdot [b_1 \dots b_m, b_{m+l-1}][b_1 \dots b_m, b_{m+l-2}] \dots [b_1 \dots b_m, b_{m+1}] \\
&= [b_1 \dots b_m, b_{m+l}]^2 [b_1 \dots b_m, b_{m+l-1}]^2 \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+l})^{l-1} \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+1} \dots \sigma_{k,m+l-1}) \\
&\cdot \prod_{k=m+1}^{m+l-1} \sigma_{k,m+l} \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+l-1})^{l-2} \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+1} \dots \sigma_{k,m+l-2}) \cdot \prod_{k=m+1}^{m+l-2} \sigma_{k,m+l-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\cdot [b_1 \dots b_m, b_{m+l-2}] \dots [b_1 \dots b_m, b_{m+1}] \\
\cdot [b_1 \dots b_m, b_{m+l-2}] \dots [b_1 \dots b_m, b_{m+1}] \\
= \dots = [b_1 \dots b_m, b_{m+l}]^2 \dots [b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^2 \\
\cdot \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+l})^{l-1} \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+l-1})^{l-2} \cdots \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+2}) \\
\cdot \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+1} \dots \sigma_{k,m+l-1}) \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+1} \dots \sigma_{k,m+l-2}) \cdots \prod_{k=1}^{m} \sigma_{k,m+1} \\
\cdot \prod_{k=m+1}^{m+l-1} \sigma_{k,m+l} \prod_{k=m+1}^{m+l-2} \sigma_{k,m+l-1} \cdots \prod_{k=m+1}^{m+1} \sigma_{k,m+2} \\
= [b_1 \dots b_m, b_{m+l}]^2 \dots [b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^2 \\
\cdot \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+l})^{l-1} \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+l-1})^{l-2} \cdots \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+2}) \\
\cdot \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+1})^{l-1} (\sigma_{k,m+2})^{l-2} \dots (\sigma_{k,m+l-1}) \\
\cdot \prod_{k=m+1}^{m+l-1} \sigma_{k,m+l} \prod_{k=m+1}^{m+l-2} \sigma_{k,m+l-1} \cdots \prod_{k=m+1}^{m+1} \sigma_{k,m+2} \\
= [b_1 \dots b_m, b_{m+l}]^2 \dots [b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^2 \\
\cdot \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+1})^{l-1} (\sigma_{k,m+2})^{l-1} \dots (\sigma_{k,m+l-1})^{l-1} (\sigma_{k,m+l})^{l-1} \\
\cdot \prod_{k=m+1}^{m+l-1} \sigma_{k,m+l} \prod_{k=m+1}^{m+l-2} \sigma_{k,m+l-1} \cdots \prod_{k=m+1}^{m+1} \sigma_{k,m+2}.
\end{gathered}
$$

Теперь с учетом формулы (6) для нечетного m считаем $[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}]^2$ полностью:

$$
\begin{gathered}
[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}]^2 = \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}]^2 \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+1} \dots \sigma_{k,m+l})^{l-1} \\
\cdot \prod_{k=m+1}^{m+l-1} \sigma_{k,m+l} \prod_{k=m+1}^{m+l-2} \sigma_{k,m+l-1} \cdots \prod_{k=m+1}^{m+1} \sigma_{k,m+2} \\
\cdot \left(\prod_{k=1}^{m} \sigma_{m+l,k}^{l-1} \right) (\sigma_{m+l,m+l-1} \dots \sigma_{m+l,m+1}) \\
\cdot \left(\prod_{k=1}^{m} \sigma_{m+l-1,k}^{l-2} \right) (\sigma_{m+l-1,m+l-2} \dots \sigma_{m+l-1,m+1}) \dots \left(\prod_{k=1}^{m} \sigma_{m+2,k} \right) \sigma_{m+2,m+1} \\
= \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}]^2 \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+1})^{l-1} \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+2})^{l} \cdots \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+l-1})^{2l-3} \\
= \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}]^2 \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+1})^{l-1} \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+2})^{l-2} \cdots \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+l-1}). \quad (8)
\end{gathered}
$$

Заметим, что при $l = 1$ полученное равенство тривиально:

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^2 = [b_1 \dots b_m, b_{m+1}]^2.$$

Выше при рассмотрении случая четного m получили равенство

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}, b_1 \dots b_m] = \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}, b_1 \dots b_m] \prod_{j=1}^{m} (\sigma_{m+l-1,j})^m \cdot \prod_{j=1}^{m} (\sigma_{m+l-2,j})^{2m} \cdots \prod_{j=1}^{m} (\sigma_{m+1,j})^{m(l-1)}$$

независимо от четности m. Учитывая теперь, что m нечетно, имеем

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}, b_1 \dots b_m] = \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}, b_1 \dots b_m] \prod_{j=1}^{m} \sigma_{m+l-1,j} \cdot \prod_{j=1}^{m} (\sigma_{m+l-2,j})^2 \cdots \prod_{j=1}^{m} (\sigma_{m+1,j})^{l-1}.$$

Из (4) следует, что $[b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}, b_1 \dots b_m] = [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}]^{\pm 2m}$ в зависимости от четности $\frac{m(m-1)}{2}$. Тогда

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}, b_1 \dots b_m] = \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}]^{\pm 2m} \cdot \prod_{j=1}^{m} \sigma_{m+l-1,j} \prod_{j=1}^{m} \sigma^2_{m+l-2,j} \cdots \prod_{j=1}^{m} \sigma^{l-1}_{m+1,j}.$$

Однако из (8) вытекает, что

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}]^{\pm 2m} = \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}]^{\pm 2m} \cdot \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+1})^{\pm m(l-1)} \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+2})^{\pm m(l-2)} \cdots \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+l-1})^{\pm m}$$
$$= \prod_{j=1}^{l} [b_1 \dots b_m, b_{m+l+1-j}]^{\pm 2m} \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+1})^{l-1} \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+2})^{l-2} \cdots \prod_{k=1}^{m} (\sigma_{k,m+l-1}) = [b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}, b_1 \dots b_m],$$

что и требовалось.

Далее, так как

$$[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}, b_{m+1} \dots b_{m+l}] = [b_{m+1} \dots b_{m+l}, b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}]^{-1},$$

по предыдущему коммутатор $[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}, b_{m+1} \dots b_{m+l}]$ тоже является степенью коммутатора $[b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_{m+l}]$. Лемма 8 доказана.

Поскольку очевидно, что из леммы 8 следует п. 3 доказываемой теоремы, теорема доказана полностью.

Следствие 1 вытекает из доказанной теоремы очевидным образом.

Далее, если группу порядка $2^{3C_n^2+n}$ из формулировки теоремы обозначить через A_n, то $A_3 \subset A_4 \subset \dots$ — бесконечная возрастающая цепочка конечных 2-групп Альперина. Очевидно, что $\bigcup\limits_{n=3}^{\infty} A_n$ — 2-группа Альперина с бесконечным элементарным абелевым вторым коммутантом. Таким образом, следствие 2 тоже доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alperin J. L.* On a special class of regular groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 77–99.
2. *Веретенников Б. М.* Об одной гипотезе Альперина // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 1. С. 200–202.
3. *Веретенников Б. М.* О конечных 3-порожденных 2-группах Альперина // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 4. С. 155–168.
4. *Веретенников Б. М.* О конечных 2-группах Альперина с циклическими вторыми коммутантами // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 3. С. 326–350.
5. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
6. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Статья поступила 3 июня 2010 г.

Веретенников Борис Михайлович
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
boris@veretennikov.ru