Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 517.5

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ А. Г. КОСТЮЧЕНКО

Б. Т. Билалов

Аннотация. Изучена базисность системы типа Костюченко в L_2. В частности, получен критерий базисности системы Костюченко при естественном ограничении на параметр, входящий в эту систему.

Ключевые слова: базисность, полнота, минимальность, система Костюченко.

Введение

В спектральной теории пучков дифференциальных операторов хорошо известна следующая задача А. Г. Костюченко, поставленная в 1969 г.: доказать полноту системы $S_\alpha^+ \equiv \{e^{i\alpha nt}\sin nt\}_{n\geq 1}$ в $L_2(0,\pi)$ с помощью теоретико-функциональных методов и изучить базисные свойства этой системы. В этом направлении первый результат получил Б. Я. Левин [1] в 1971 г. Он доказал полноту системы S_α^+ в $L_2(0,\pi)$ при любом $\alpha \in i\mathbb{R}$. Этот же результат установлен ранее в [2] другим методом. Он использует двукратную полноту системы $S_\alpha \equiv \{e^{i\alpha nt}\sin nt\}_{-\infty}^{+\infty}$ в $L_2(0,\pi)$.

Система S_α является набором собственных функций квадратичного пучка

$$-y''(t) + 2i\alpha\lambda y'(t) + (1-\alpha^2)\lambda^2 y(t) = 0,\ t\in(0,\pi), \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Она двукратно полна в $L_2(0,\pi)$. Это следует из основополагающей работы М. В. Келдыша [3]. Многократная полнота половины собственных функций дифференциальных пучков рассмотрена в работах [4–6], из которых, в частности, следует полнота системы S_α^+ в $L_2(0,\pi)$ при мнимых α (с некоторым ограничением).

В связи с этим интерес к изучению базисных свойств системы S_α^+ сильно возрос. Общий подход к изучению побудил математиков рассмотреть системы вида

$$\left\{\upsilon_n^{\pm}\right\}_{n\geq m} \equiv \{a(t)\varphi^n(t) \pm b(t)\psi^n(t)\}_{n\geq m}, \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, вообще говоря, комплекснозначные функции. Это, в свою очередь, привело к созданию отдельного направления в теории аппроксимации для исследования базисных свойств систем вида (1). Наиболее подробно изучен случай, когда $\psi(t)\equiv\overline{\varphi(t)}$ (черта означает комплексное сопряжение) [7–11]. Этот случай для невещественных значений параметра α не охватывает систему Костюченко. Система (1) оказалась трудной для изучения, так как ее базисные свойства редуцируется к разрешимости краевых задач Римана со сдвигом на границе соответствующей области в пространствах Харди $H_p^{\pm}$ или Смирнова $E_p(D)$. Полученные при этом краевые задачи имеют существенные трудности по сравнению с известными в литературе (см., например, [12, 13]). В связи с этим базисные свойства систем вида (1) не были полностью изучены.

Разные авторы развивали свои подходы к решению полученных задач, поэтому налагали разные условия на функции, входящие в (1). Несмотря на это, системам вида (1) посвящено много работ (см. [14–19] и обзорную статью [18]). Применительно к системе Костюченко S_α^+ итог полученных результатов в перечисленных выше работах был таков: при $\alpha \in \mathbb{R}$ и $|\alpha| < 1$ система S_α^+ полна в $L_p(0,\pi)$ при любом $p \in [1,+\infty)$. При $\alpha \notin (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$, вообще говоря, система S_α^+ переполнена в $L_2(0,\pi)$. Избыток системы S_α^+ неограниченно возрастает при приближении α к $[1,\infty)$ (либо к $(-\infty,-1]$). Если $\alpha \in \mathbb{C}\setminus \{(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)\}$ — произвольное комплексное число, то она полна в $L_2(0,\pi)$; при $\alpha \in i\mathbb{R}$ система S_α^+ также минимальна в $L_2(0,\pi)$. Если $\alpha \notin \mathbb{R}$, то S_α^+ в $L_2(0,\pi)$ не является равномерно минимальной [20] и, значит, в нем не образует базис.

Напомним определение равномерно минимальной системы в банаховом пространстве B с нормой $\|\cdot\|$. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ — некоторая система. Обозначим через B_k замыкание линейной оболочки $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N};n\neq k}$. Если существует $\delta > 0$ такое, что $\inf\limits_{y\in B_k} \|x_k - y\| \geq \delta\|x_k\|$ при любом $k \in \mathbb{N}$, то $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *равномерно минимальной в* B.

Базисности системы S_α^+ посвящена единственная работа А. А. Шкаликова [21], в которой доказано, что при $\alpha \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ система S_α^+ образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$. Однако доказательство опирается не на функционально-теоретические методы, а использует результат общего характера относительно базисности систем корневых элементов квадратичных пучков.

По многим причинам изучение базисных свойств системы Костюченко S_α^+ является сложной задачей. Во-первых, она приводит к краевым задачам с карлемановским сдвигом со специфическими особенностями. Эти задачи, вообще говоря, изучены не полностью, тем более в классах Харди $H_p^\pm$. Во-вторых, полученные задачи в силу соотношения $\psi(t) \not\equiv \overline{\varphi(t)}$ в некотором смысле несимметричны относительно действительной оси. Эта особенность создает дополнительную существенную трудность для исследования на нётеровость полученных задач в соответствующих пространствах. Более того, при $\alpha \neq 0$ соответствующий квадратичный пучок не является самосопряженным. По этим причинам предложенные методы или схемы исследования базисных свойств в случае $\psi(t) \equiv \overline{\varphi(t)}$ непригодны. Авторы работ [15–18] при жестких ограничениях на функции $a(t)$, $b(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ изучали нётеровость соответствующей задачи и нашли ее индекс. Это дало им возможность найти $m \in \mathbb{Z}$ такое, что система $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq m}$ является полной и минимальной в L_2. Это фактически при допустимых ограничениях дает критерий полноты и минимальности системы (1), а также системы S_α^+ в L_2.

В данной работе предлагается иная схема исследования базисных свойств одинарных систем вида (1). А именно, они выводятся из аналогичных свойств двойной системы экспонент со сдвигом, определенной специальным образом. Преимущество предлагаемого подхода в том, что исследование базисных свойств двойных систем приводит к использованию методов теории краевых задач со сдвигом Газемана в классах Харди, более детально изученных (см., например, [13, 22]). Это, в свою очередь, позволяет получить в определенной степени необходимое и достаточное условие базисности Рисса системы S_α^+ в $L_2(0,\pi)$. Определяется двойная система Костюченко K_α и приводится критерий базисности Рисса этой системы в $L_2(-\pi,\pi)$. Частично некоторые результаты работы анонсированы в работах автора [23, 24].

1. Необходимые сведения и основные предположения

Пусть B — комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и $\{x_n^+; x_n^-\}_{n\geq 0} \subset B$ — двойная система.

Определение 1. Систему $\{x_n^+; x_n^-\}_{n\geq 0}$ назовем *базисом в* B, если для любого $x \in B$ существует единственная двойная последовательность $\{a_n^+; a_n^-\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$ такая, что

$$\left\|\sum_{n=0}^{N^+} a_n^+ x_n^+ + \sum_{n=0}^{N^-} a_n^- x_n^- - x\right\| \to 0 \quad \text{при } N^\pm \to \infty,$$

т. е.

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ x_n^+ + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^- x_n^-.$$

Если замыкание линейной оболочки $\overline{L\left[\left\{x_n^\pm\right\}_{n\geq 0}\right]}$ обозначить через $B^\pm$, то можно сказать, что B^+ и B^- топологически дополняемы в B и B представимо в виде прямой суммы: $B = B^+ \oplus B^-$, причем $\left\{x_n^\pm\right\}_{n\geq 0}$ образует шаудеров базис в $B^\pm$. Если классическую систему экспонент $\{e^{int}\}_{-\infty}^{+\infty}$ представить в виде $\{e^{int}; e^{-(n+1)t}\}_{n\geq 0}$, то она образует базис в L_p, $1 < p < +\infty$, в смысле этого определения и в качестве подпространств $B^\pm$ участвуют с точностью до изоморфизма классы Харди $H_p^\pm$. В дальнейшем базисность двойной системы будем понимать в смысле этого определения.

Определение 2. Систему $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset B$ назовем *базисной последовательностью в* B, если любой элемент из замыкания линейной оболочки $\overline{L[\{x_n\}_{n\geq 1}]}$ можно разложить по этой системе.

Совершенно очевидно, что если полная и минимальная в B система $\{x_n\}_{n\geq 1}$ является базисной последовательностью, то она образует базис в B.

Не ограничивая общности, будем считать, что система (1) определена на сегменте $[0,\pi]$. Общий случай можно свести к этому с помощью линейной замены переменных, которая не влияет на базисные свойства систем (1) в L_p. Введем следующие функции:

$$A(t) \equiv \begin{cases} a(t), & t \in [0,\pi], \\ b(-t), & t \in [-\pi, 0), \end{cases} \qquad W(t) \equiv \begin{cases} \varphi(t), & t \in [0,\pi], \\ \psi(-t), & t \in [-\pi, 0). \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим двойную систему $\{W_{n;k}\}_{n\geq n_0; k\geq k_0}$, где через $W_{n,k}(t)$ обозначена пара $W_{n;k}(t) \equiv [A(t)W^n(t); A(-t)W^k(-t)]$.

Исходя непосредственно из определения базисных свойств (полнота, минимальность, базисность), нетрудно установить справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Двойная система* $\{W_{n;k}\}_{n;k\geq m}$ $(1 \cup \{W_{n;k}\}_{n;k\geq m})$ *полна, минимальна, образует базис в* $L_p(-\pi,\pi)$ *или безусловный базис в* $L_2(-\pi,\pi)$ *только тогда, когда каждая из одинарных систем* $\{\upsilon_n^+\}_{n\geq m}$ *и* $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq m}$ $(1 \cup \{\upsilon_n^+\}_{n\geq m}$ *и* $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq m})$ *полна, минимальна, образует базис в* $L_p(0,\pi)$ *или безусловный базис в* $L_2(0,\pi)$ *соответственно,* $1 \leq p < +\infty$.

Доказательство проведем относительно системы $\{W_{n;k}\}_{n;k\geq m}$. Для системы $1 \cup \{W_{n;k}\}_{n;k\geq m}$ оно проводится аналогично. Не ограничивая общности, будем считать, что $m = 1$. Докажем каждый случай отдельно. Везде будем считать, что q — сопряженное к p число: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Полнота. Пусть системы $\{\upsilon_n^+\}_1^\infty$ и $\{\upsilon_n^-\}_1^\infty$ полны в $L_p(0,\pi)$ и для некоторой функции $f \in L_q(-\pi,\pi)$ имеют место

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(t)W^n(t)\bar{f}(t)\,dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} A(t)W^n(-t)\bar{f}(t)\,dt = 0, \quad n \geq 1.$$

Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(t)W^n(t)\bar{f}(t)\,dt = \int_0^{\pi} a(t)\varphi^n(t)\bar{f}(t)\,dt + \int_0^{\pi} b(t)\psi^n(t)\bar{f}(-t)\,dt = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(-t)W^n(-t)\bar{f}(t)\,dt = \int_0^{\pi} a(t)\varphi^n(t)\bar{f}(-t)\,dt + \int_0^{\pi} b(t)\psi^n(t)\bar{f}(t)\,dt = 0.$$

Сначала складывая эти равенства, затем вычитая одно из другого, получаем

$$\int_0^{\pi} \upsilon_n^+(t)[\bar{f}(t) + \bar{f}(-t)]\,dt = 0, \quad \int_0^{\pi} \upsilon_n^-(t)[\bar{f}(t) - \bar{f}(-t)]\,dt = 0, \quad n \geq 1.$$

Из полноты систем $\{\upsilon_n^+\}_1^\infty$ и $\{\upsilon_n^-\}_1^\infty$ в $L_p(0,\pi)$ следует, что $f(t) = 0$ п. в. на $(-\pi,\pi)$ и, значит, система $\{W_{n;k}\}_{n;k\geq 1}$ полна в $L_p(-\pi,\pi)$.

Пусть система $\{W_{n;k}\}_{n;k\geq 1}$ полна в $L_p(-\pi,\pi)$. Предположим, что для некоторой функции $f \in L_q(0,\pi)$ имеет место

$$\int_0^{\pi} \upsilon_n^+(t)\bar{f}(t)\,dt = 0, \quad n \geq 1.$$

Введем в рассмотрение новую функцию $F(t) \equiv \begin{cases} f(t), & t \in [0,\pi], \\ f(-t), & t \in [-\pi,0). \end{cases}$ Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(t)W^n(t)\overline{F}(t)\,dt = \int_0^{\pi} \upsilon_n^+(t)\bar{f}(t)\,dt = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(-t)W^n(-t)\overline{F}(t)\,dt = \int_0^{\pi} \upsilon_n^+(t)\bar{f}(t)\,dt = 0, \quad n \geq 1.$$

Из полноты системы $\{W_{n;k}\}_{n;k\geq 1}$ в $L_p(-\pi,\pi)$ следует, что $F(t) = 0$ п. в. на $(-\pi,\pi)$, т. е. $f(t) = 0$ п. в. на $(0,\pi)$, значит, $\{\upsilon_n^+\}_1^\infty$ полна в $L_p(0,\pi)$.

Аналогично если для некоторой $g \in L_p(0,\pi)$ имеет место

$$\int_0^{\pi} \upsilon_n^-(t)\bar{g}(t)\,dt = 0, \quad n \geq 1,$$

то, вводя функцию

$$G(t) \equiv \begin{cases} g(t), & t \in [0,\pi], \\ -g(-t), & t \in [-\pi,0), \end{cases}$$

имеем
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} G(\pm t)W^n(\pm t)\overline{G}(t)\,dt = \pm\int\limits_{0}^{\pi} \upsilon_n^-(t)\bar{g}(t)\,dt = 0, \quad n \ge 1.$$
Из полноты системы $\{W_{n;k}\}_{n;k\ge 1}$ в $L_p(-\pi,\pi)$ следует также, что $G(t)=0$ п. в. на $(-\pi,\pi)$, т. е. $g(t)=0$ п. в. на $(0,\pi)$, и, значит, $\{\upsilon_n^-\}_1^\infty$ полна в $L_p(0,\pi)$.

2. Минимальность. Пусть системы $\{\upsilon_n^+\}_1^\infty$ и $\{\upsilon_n^-\}_1^\infty$ минимальны в $L_p(0,\pi)$. Тогда существуют биортогональные системы $\{\nu_k^+(t)\}_1^\infty$ и $\{\nu_k^-(t)\}_1^\infty$ соответственно к этим системам, т. е.
$$\int\limits_{0}^{\pi} \upsilon_n^\pm(t)\bar{\nu}_k^\pm(t)\,dt = \delta_{nk}, \quad n,k \ge 1.$$
Введем в рассмотрение следующую систему:
$$\Omega_k^\pm(t) \equiv \begin{cases} \nu_k^\pm(t), & t\in[0,\pi], \\ \pm\nu_k^\pm(-t), & t\in[-\pi,0), \end{cases} \quad k\ge 1.$$
Определим
$$h_k^\pm(t) \equiv \frac{1}{2}[\Omega_k^+(t) \pm \Omega_k^-(t)], \quad k \ge 1. \tag{3}$$
Нетрудно установить справедливость следующих соотношений:
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} A(\pm t)W^n(\pm t)\overline{\Omega}_k^+(t)\,dt = \int\limits_{0}^{\pi} \upsilon_n^+(t)\bar{\nu}_k^+(t)\,dt = \delta_{nk}, \quad n,k\ge 1;$$
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} A(\pm t)W^n(\pm t)\overline{\Omega}_k^-(t)\,dt = \pm\int\limits_{0}^{\pi} \upsilon_n^+(t)\bar{\nu}_k^-(t)\,dt = \pm\delta_{nk}, \quad n,k\ge 1.$$
Учитывая эти равенства, получаем
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} A(t)W^n(t)\bar{h}_k^+(t)\,dt = \delta_{nk}, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} A(t)W^n(t)\bar{h}_k^-(t)\,dt = 0,$$
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} A(-t)W^n(-t)\bar{h}_k^+(t)\,dt = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} A(-t)W^n(-t)\bar{h}_k^-(t)\,dt = \delta_{nk}.$$
Следовательно, система $\{h_k^+(t);\ h_k^-(t)\}_1^\infty$ биортогональна к $\{W_{n;k}\}_{n;k\ge 1}$, т. е. система $\{W_{n;k}\}_{n;k\ge 1}$ минимальна в $L_p(-\pi,\pi)$.

Пусть система $\{W_{n;k}\}_{n;k\ge 1}$ минимальна в $L_p(-\pi,\pi)$ и $\{h_k^+(t);\ h_k^-(t)\}_1^\infty$ — биортогональная к ней система. Рассмотрим систему
$$\nu_k^\pm(t) \equiv h_k^+(t) \pm h_k^+(-t), \quad k \ge 1. \tag{4}$$
Имеем
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} A(-t)W^n(-t)\bar{h}_k^+(t)\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} A(t)W^n(t)\bar{h}_k^+(-t)\,dt = 0, \quad n \ge 1.$$

Также имеют место равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(t)W^n(t)\bar{h}_k^+(t)\,dt = \int_0^{\pi} \pi(t)\varphi^n(t)\bar{h}_k^+(t)\,dt + \int_0^{\pi} b(t)\psi^n(t)h_k^+(-t)\,dt = \delta_{nk},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(t)W^n(t)\bar{h}_k^+(-t)\,dt = \int_0^{\pi} \pi(t)\varphi^n(t)\bar{h}_k^+(-t)\,dt + \int_0^{\pi} b(t)\psi^n(t)h_k^+(t)\,dt = 0.$$

Складывая последние равенства, получаем $\int_0^{\pi} \upsilon_n^+(t)\bar{\nu}_k^+(t)\,dt = \delta_{nk}$ для $n, k \geq 1$. Вычитая из первого равенства второе, имеем $\int_0^{\pi} \upsilon_n^-(t)\bar{\nu}_k^-(t)\,dt = \delta_{nk}$ для $n, k \geq 1$. Следовательно, системы $\{\upsilon_n^+\}_1^\infty$ и $\{\upsilon_n^-\}_1^\infty$ минимальны в $L_p(0, \pi)$.

3. Базисность. Пусть системы $\{\upsilon_n^+\}_1^\infty$ и $\{\upsilon_n^-\}_1^\infty$ образуют базисы в $L_p(0, \pi)$ и $\{\nu_k^+\}_1^\infty$, $\{\nu_k^-\}_1^\infty$ — соответствующие биортогональные системы. Тогда, как уже показано, система $\{W_{n;k}\}_{n;k\geq 1}$ минимальна в $L_p(-\pi, \pi)$ и биортогональная к ней система $\{h_k^+;\, h_k^-\}_1^\infty$ определяется формулой (3). Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(t)W^n(t)\bar{h}_k^+(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} A(-t)W^n(-t)\bar{h}_k^+(-t)\,dt = \delta_{nk},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(-t)W^n(-t)\bar{h}_k^+(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} A(t)W^n(t)\bar{h}_k^+(-t)\,dt = 0.$$

Так как система $\{W_{n;k}\}_{n;k\geq 1}$ полна в $L_p(-\pi, \pi)$, из единственности биортогональной системы следует, что $h_k^-(t) \equiv h_k^+(-t)$. Возьмем произвольно $f \in L_p(-\pi, \pi)$. Имеем ($\|\cdot\|_p$ — обычная норма в $L_p(-\pi, \pi)$)

$$I_N^{(-\pi,\pi)} = \Bigg\| \sum_{n=1}^{N} \Bigg[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{h}_n^+(t)\,dt A(x)W^n(x) + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{h}_n^+(-t)\,dt A(-x)W^n(-x) \Bigg] - f(x) \Bigg\|_p$$

$$= \Bigg\| \sum_1^N \Bigg[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{\Omega}_n^+(t)\,dt\,A(x)W^n(x) + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{\Omega}_n^-(t)\,dt A(x)W^n(x)$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\,\overline{\Omega}_n^+(t)\,dt\,A(-x)W^n(-x) + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\overline{\Omega}_n^-(t)\,dt A(-x)W^n(-x)\Bigg] - f(x) \Bigg\|_p.$$

Введем следующие обозначения:

$$I_{11}^n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{\Omega}_n^+(t)\,dt\,A(x)W^n(x) = \int_0^{\pi} [f(t) + f(-t)]\bar{\nu}_n^+\,dt A(x)W^n(x),$$

$$I_{21}^n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{\Omega}_n^-(t)\,dt\,A(x)W^n(x) = \int\limits_0^{\pi} [f(t) - f(-t)]\bar{\nu}_n^-\,dtA(x)W^n(x),$$

$$I_{31}^n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(-t)\,\overline{\Omega}_n^+(t)\,dt\,A(-x)W^n(-x) = \int\limits_0^{\pi} [f(t) + f(-t)]\bar{\nu}_n^+\,dtA(-x)W^n(-x),$$

$$I_{41}^n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(-t)\,\overline{\Omega}_n^-(t)\,dt\,A(-x)W^n(-x) = -\int\limits_0^{\pi} [f(t) - f(-t)]\bar{\nu}_n^-\,dtA(-x)W^n(-x).$$

Принимая во внимание эти обозначения, получаем следующие соотношения.

1^0. Пусть $x \in (0, \pi)$. Тогда

$$I_{11}^n + I_{31}^n = \int\limits_0^{\pi} [f(t) + f(-t)]\,\bar{\nu}_n^+(t)\,dt\upsilon_n^+(x),$$

$$I_{21}^n + I_{41}^n = \int\limits_0^{\pi} [f(t) - f(-t)]\,\bar{\nu}_n^-(t)\,dt\upsilon_n^-(x).$$

Учитывая эти выражения, имеем

$$\begin{aligned} I_N^{(0,\pi)} = \Bigg\{ \int\limits_0^{\pi} \Bigg| \sum_1^N \Big[\frac{1}{2}\big(I_{11}^n + I_{31}^n\big)\Big] - \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ + \sum_1^N \Big[\frac{1}{2}\big(I_{21}^n + I_{41}^n\big)\Big] - \frac{f(x) - f(-x)}{2} \Bigg|^p dx \Bigg\}^{\frac{1}{p}} \\ \le \Bigg\{ \int\limits_0^{\pi} \Bigg| \sum_1^N \Big[\frac{1}{2}\big(I_{11}^n + I_{31}^n\big)\Big] - \frac{f(x) + f(-x)}{2} \Bigg|^p dx \Bigg\}^{\frac{1}{p}} \\ + \Bigg\{ \int\limits_0^{\pi} \Bigg| \sum_1^N \Big[\frac{1}{2}\big(I_{21}^n + I_{41}^n\big)\Big] - \frac{f(x) - f(-x)}{2} \Bigg|^p dx \Bigg\}^{\frac{1}{p}} \to 0, \quad N \to \infty. \end{aligned}$$

2^0. Пусть $x \in (-\pi, 0)$. В этом случае имеют место равенства

$$I_{11}^n = \int\limits_0^{\pi} [f(t) + f(-t)]\bar{\nu}_n^+\,dt\;b(-x)\psi^n(-x),$$

$$I_{21}^n = \int\limits_0^{\pi} [f(t) - f(-t)]\bar{\nu}_n^-\,dt\;b(-x)\psi^n(-x),$$

$$I_{31}^n = \int\limits_0^{\pi} [f(t) + f(-t)]\bar{\nu}_n^+\,dt\;\pi(-x)\varphi^n(-x),$$

$$I_{41}^n = -\int_0^\pi [f(t) - f(-t)]\bar{\nu}_n^- \, dt \; \pi(-x)\varphi^n(-x),$$

из которых получаем

$$I_{11}^n + I_{31}^n = \int_0^\pi [f(t) + f(-t)] \, \bar{\nu}_n^+(t) \, dt \upsilon_n^+(-x),$$

$$I_{21}^n + I_{41}^n = \int_0^\pi [f(-t) - f(-t)] \, \bar{\nu}_n^-(t) \, dt \upsilon_n^-(-x).$$

Учитывая эти выражения, аналогично устанавливаем, что

$$I_N^{(-\pi,0)} = \left\{ \int_{-\pi}^0 \left| \sum_1^N \left[\frac{1}{2}\bigl(I_{11}^n + I_{31}^n\bigr) \right] - \frac{f(x) + f(-x)}{2} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_1^N \left[\frac{1}{2}\bigl(I_{21}^n + I_{41}^n\bigr) \right] - \frac{f(x) - f(-x)}{2} \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left\{ \int_0^\pi \left| \sum_1^N \left[\frac{1}{2}\bigl(I_{11}^n + I_{31}^n\bigr) \right] - \frac{f(x) + f(-x)}{2} \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left\{ \int_0^\pi \left| \sum_1^N \left[\frac{1}{2}\bigl(I_{21}^n + I_{41}^n\bigr) \right] - \frac{f(-x) - f(x)}{2} \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Следовательно, $I_N^{(-\pi,\pi)} \to 0$ при $N \to \infty$, т. е. биортогональный ряд для любой $f \in L_p(-\pi,\pi)$ сходится к ней в L_p и, стало быть, система $\{W_{n;k}\}_{n;k\geq 1}$ образует базис в $L_p(-\pi,\pi)$.

Пусть теперь система $\{W_{n;k}\}_{n;k\geq 1}$ образует базис в $L_p(-\pi,\pi)$. Докажем, что системы $\{\upsilon_n^+\}_1^\infty$ и $\{\upsilon_n^-\}_1^\infty$ образуют базисы в $L_p(0,\pi)$. Как уже доказано, эти системы полны и минимальны в $L_p(0,\pi)$ и биортогональные к ним системы определяются формулой (4). Возьмем произвольно $g \in L_p(0,\pi)$ и рассмотрим функцию

$$G(t) \equiv \begin{cases} g(t), & t \in (0,\pi), \\ -g(-t), & t \in (-\pi,0). \end{cases}$$

Имеем

$$\int_{-\pi}^\pi \left| \sum_1^N \left[\int_{-\pi}^\pi G(t)\bar{h}_n^+(t) \, dt A(x) W^n(x) \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{-\pi}^\pi G(t)\bar{h}_n^+(-t) \, dt A(-x) W^n(-x) \right] - G(x) \right|^p dx$$

$$= \int_{-\pi}^\pi \left| \sum_1^N \left[\int_0^\pi g(t)\bar{\nu}_n^-(t) \, dt A(x) W^n(x) \right.\right.$$

$$-\int_0^\pi g(t)\bar{\nu}_n^-(t)\,dtA(-x)W^n(-x)\Bigg] - G(x)\Bigg|^p dx$$

$$= 2\int_0^\pi \left|\sum_1^N \int_0^\pi g(t)\bar{\nu}_n^-(t)\,dt\upsilon_n^- - g(x)\right|^p dx \to 0 \quad \text{при } N\to\infty.$$

Продолжая $g(t)$ до четной функции на $[-\pi,\pi]$, можно доказать, что ее биортогональный ряд по системе $\{\upsilon_n^+\}_1^\infty$ сходится к ней в $L_p(0,\pi)$. Итак, базисности систем $\{\upsilon_n^\pm\}_1^\infty$ в $L_p(0,\pi)$ доказаны. Исходя непосредственно из определения безусловной базисности, аналогично можно доказать часть утверждения, касающуюся безусловной базисности.

Подобным образом устанавливается, что если произвольную функцию из $L_p(-\pi,\pi)$ можно разложить по системе $\{W_{n;k}\}_{n;k\geq m}$, то любую функцию из $L_p(0,\pi)$ можно разложить по каждой из систем $\{\upsilon_n^\pm\}_{n\geq m}$. В действительности, возьмем произвольно $g\in L_p(0,\pi)$ и продолжим ее на $[-\pi,\pi]$ до четной функции:

$$G(t)=\begin{cases} g(t), & t\in[0,\pi],\\ g(-t), & t\in[-\pi,0).\end{cases}$$

Снова, не уменьшая общности, будем предполагать, что $m=1$. По предположению существует $\{a_n;b_n\}_{n\geq 1}\subset\mathbb{C}$ такая, что

$$S_N(t)=\sum_{n=1}^N[a_nA(t)W^n(t)+b_nA(-t)W^n(-t)]\to G(t) \quad \text{в } L_p(-\pi,\pi) \text{ при } N\to\infty.$$

Нетрудно заметить, что $S_N(-t)\to G(t)$, $N\to\infty$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}[S_N(t)+S_N(-t)]=\sum_{n=1}^N c_n[A(t)W^n(t)+A(-t)W^n(-t)]\to G(t)$$

в $L_p(-\pi,\pi)$ при $N\to\infty$, где $c_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$. Так как $A(t)W^n(t)+A(-t)W^n(-t)=\upsilon_n^+(t)$ при $t\in[0,\pi]$, отсюда получаем, что

$$\sum_{n=1}^N c_n\upsilon_n^+(t)\to g(t) \quad \text{в } L_p(0,\pi) \text{ при } N\to\infty.$$

Продолжая нечетным образом произвольную $g\in L_p(0,\pi)$ на $(-\pi,\pi)$, устанавливаем разложимость ее в $L_p(0,\pi)$ по системе $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq 1}$.

Пусть теперь система $\{W_{n;k}\}_{n\geq 0;k\geq 1}$ образует базис в $L_p(-\pi,\pi)$. По лемме 1 из минимальности $\{W_{n;k}\}_{n;k\geq 1}$ в $L_p(-\pi,\pi)$ следует минимальность системы $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq 1}$ в $L_p(0,\pi)$. Ясно, что любую функцию из $L_p(-\pi,\pi)$ можно разложить по системе $\{W_{n;k}\}_{n;k\geq 0}$, следовательно, любую функцию из $L_p(0,\pi)$ можно разложить по системе $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq 0}$. Если система $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq 1}$ полна в $L_p(0,\pi)$, то из вышеприведенных соображений получаем базисность ее в $L_p(0,\pi)$. Если же $\{W_{n;k}\}_{n\geq 1;k\geq 2}$ образует базис в $L_p(-\pi,\pi)$, то ясно, что любую функцию из $L_p(0,\pi)$ можно разложить по системе $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq 1}$, и в случае ее минимальности получаем базисность этой же системы в $L_p(0,\pi)$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2. (a) *Пусть система* $\{W_{n;k}\}$ *при* $n \geq 0$, $k \geq 1$ *образует базис в* $L_p(-\pi,\pi)$ (*безусловный базис в* $L_2(-\pi,\pi)$). *Если система* $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq 1}$ *полна в* $L_p(0,\pi)$, *то она образует базис в* $L_p(0,\pi)$ (*безусловный базис в* $L_2(0,\pi)$).

(b) *Пусть система* $\{W_{n;k}\}$ *при* $n \geq 1$, $k \geq 2$ *образует базис в* $L_p(-\pi,\pi)$ (*безусловный базис в* $L_2(-\pi,\pi)$). *Если система* $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq 1}$ *минимальна в* $L_p(0,\pi)$, *то она образует базис в* $L_p(0,\pi)$ (*безусловный базис в* $L_2(0,\pi)$).

Аналогичные соображения справедливы и относительно системы $\{\upsilon_n^+\}_{n\geq 1}$.

Далее будем рассматривать случай системы

$$\omega_n^{\pm}(t) \equiv a(t)e^{i\sigma(t)n} \pm b(t)e^{-i\xi(t)n}, \quad n \geq 1.$$

Относительно функций, входящих в выражения этой системы, сделаем основные предположения:

(a1) $a(t), b(t)$ кусочно непрерывны на $[0,\pi]$, $\{t_k\}_1^m$ — точки разрыва функции $\theta(t) \equiv \arg b(t) - \arg a(t)$ на $(0,\pi)$, причем $a(t)b(t) \neq 0$ для любого $t \in [0,\pi]$;

(a2) $\sigma(t)$, $\xi(t)$ — кусочно дифференцируемые, непрерывные, возрастающие на $[0,\pi]$ функции, $\sigma'(t)$ и $\xi'(t)$ кусочно гёльдеровы на $[-\pi,\pi]$ и $\sigma'(t)\xi'(t) \neq 0$ для любого $t \in [0,\pi]$, причем $\sigma(0) = \xi(0)$, $\sigma(\pi) + \xi(\pi) = 2\pi$. Пусть $\{\tau_k\}_1^l$ — точки разрыва функций $\sigma'(t)$ и $\xi'(t)$ на $(0,\pi)$. Обозначим $\{t_k\}_1^m \cup \{\tau_k\}_1^l = \{s_k\}_1^r$, где $0 < s_1 < \cdots < s_r < \pi$. Определим следующие величины:

$$\begin{aligned} h_k = \theta(s_k+0) - \theta(s_k-0) = \arg b(s_k+0) - \arg b(s_k-0) \\ - \arg a(s_k+0) + \arg a(s_k-0), \quad k = \overline{1,r}; \end{aligned}$$

$$h_0 = \arg b(0) - \arg a(0); \quad h_\pi = \arg b(\pi) - \arg a(\pi);$$

$$\nu_k = \ln\left|\frac{\sigma'(s_k+0)\xi'(s_k-0)}{\sigma'(s_k-0)\xi'(s_k+0)}\right|,\ k = \overline{1,r}; \quad \nu_0 = 2\ln\left|\frac{\sigma'(0)}{\xi'(0)}\right|; \quad \nu_\pi = 2\ln\left|\frac{\xi'(\pi)}{\sigma'(\pi)}\right|;$$

$$\lambda_k = \frac{b(s_k+0)a(s_k-0)}{b(s_k-0)a(s_k+0)},\ k = \overline{1,r}; \quad \lambda_0 = \frac{b^2(0)}{a^2(0)}; \quad \lambda_\pi = \frac{a^2(\pi)}{b^2(\pi)}.$$

Положим

$$\omega_0 = \frac{h_0}{\pi} - \frac{1}{8\pi^2}[\nu_0 + 2\ln|\lambda_0|]\nu_0;$$

$$\omega_k = \frac{h_k}{2\pi} - \frac{1}{8\pi^2}[\nu_k + 2\ln|\lambda_k|]\nu_k,\ k = \overline{1,r}; \quad \omega_\pi = \frac{h_\pi}{\pi} - \frac{1}{8\pi^2}[\nu_\pi + 2\ln|\lambda_\pi|]\nu_\pi.$$

Кроме того, предполагаем выполнение условия

(a3) $\left\{\omega_0 - \frac{1}{2};\ \omega_\pi - \frac{1}{2};\ \omega_k - \frac{1}{2},\ k = \overline{1,r}\right\} \cap \mathbb{Z} = \varnothing$.

Определим $\{n_i\}_0^r \subset \mathbb{Z}$ из соотношений

$$-\frac{3}{2} + 2n_0 < \omega_0 < \frac{1}{2} + 2n_0, \quad -\frac{1}{2} < \omega_k + n_{i-1} - n_i < \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1,r}. \tag{5}$$

Положим

$$\omega_r = \omega_\pi + 2n_r. \tag{6}$$

При доказательстве базисности Рисса системы $\{\omega_n^{\pm}\}$ в $L_2(0,\pi)$ нам понадобится следующая легко доказываемая

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (a1), (a2) *и*

$$\|\omega_n^-\|_2 \neq 0 \ \forall n \geq m \quad (\|\omega_n^+\|_2 \neq 0 \ \forall n \geq m),$$

где $\|\cdot\|_2$ *— обычная норма в* $L_2(0,\pi)$. *Тогда*

$$\inf_{n\geq m} \|\omega_n^-\|_2 > 0, \ \sup_{n\geq m} \|\omega_n^-\|_2 < +\infty \quad (\inf_{n\geq m} \|\omega_n^+\|_2 > 0, \ \sup_{n\geq m} \|\omega_n^+\|_2 < +\infty).$$

Доказательство. Покажем эти соотношения для системы $\{\omega_n^-\}_{n\geq m}$, для $\{\omega_n^+\}_{n\geq m}$ доказательство проводится аналогично. То, что $\sup\limits_{n\geq m} \|\omega_n^-\|_2 < +\infty$, непосредственно следует из условия (a1). Пусть $w(t)$ — определенная выражением (2) функция относительно систем $\{\omega_n^\pm\}$, т. е. $\omega(t) \equiv e^{i\eta(t)}$, где

$$\eta(t) \equiv \begin{cases} \sigma(t), & t \in [0,\pi], \\ -\xi(-t), & t \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{gathered}
\|\omega_n^-\|_2^2 = \int_0^\pi |\omega_n^-|^2\,dt = \int_0^\pi \omega_n^-(t)\overline{\omega_n^-(t)}\,dt \\
= \int_0^\pi [A(t)\omega^n(t) - A(-t)\omega^n(-t)][\overline{A}(t)\overline{\omega}^n(t) - \overline{A}(-t)\overline{\omega}^n(-t)]\,dt \\
= \int_0^\pi |A(t)\omega^n(t)|^2\,dt + \int_0^\pi |A(-t)\omega^n(-t)|^2\,dt \\
- \left[\int_0^\pi A(t)\overline{A}(-t)\omega^n(t)\overline{\omega}^n(-t)\,dt + \int_0^\pi A(-t)\omega^n(-t)\overline{A}(t)\overline{\omega}^n(t)\,dt\right] \\
= \int_{-\pi}^\pi |A(t)|^2\,dt - \int_{-\pi}^\pi A(t)\overline{A}(-t)\omega^n(t)\overline{\omega}^n(-t)\,dt.
\end{gathered}$$

Ясно, что $\overline{\omega}(-t) \equiv e^{-i\eta(-t)}$. Положим $I_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} A(t)\overline{A}(-t)e^{i[\eta(t)-\eta(-t)]n}\,dt$. Нетрудно заметить, что $\gamma(t) = \frac{1}{2}[\eta(t) - \eta(-t)]$ — возрастающая непрерывная кусочно дифференцируемая функция на $[-\pi,\pi]$, более того, $\gamma(\pi) = \frac{1}{2}[\eta(\pi) - \eta(-\pi)] = \pi$, $\gamma(-\pi) = -\pi$. Проведя замену $\tau = \gamma(t)$ в интеграле I_n, получим $I_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)e^{2in\tau}d\tau$, где

$$f(\tau) = A(\gamma_{-1}(\tau))\overline{A}(-\gamma_{-1}(\tau))\frac{1}{\gamma'(\gamma_{-1}(\tau))},$$

$\gamma_{-1}(\tau)$ — обратная к $\tau = \gamma(t)$ функция. Из $\gamma'(t) = \frac{1}{2}[\eta'(t) + \eta'(-t)]$ следует, что $\gamma'(t) \geq \delta > 0$ для $t \in [-\pi,\pi]$. Стало быть, $f(\tau) \in L_2(-\pi,\pi)$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. Тогда утверждение леммы непосредственно вытекает из соотношения

$$\|\omega_n^-\|_2^2 = \|A(t)\|_2^2 - I_n \quad \forall n \geq 1.$$

Лемма доказана.

При доказательстве основной теоремы существенно будем пользоваться результатами автора из [25]. Чтобы облегчить изложение, приведем один результат из этой работы о базисности Рисса в $L_2(-\pi,\pi)$ двойной системы экспонент

$$\{A(t)e^{i\tilde{\nu}(t)n};\ B(t)e^{-ikt}\}_{n\geq 0;k\geq 1}, \tag{7}$$

где $\tilde{\nu}(t)$ — сдвиг отрезка $[-\pi,\pi]$ и комплекснозначные коэффициенты $A(t)\equiv\equiv|A(t)|e^{i\alpha(t)}$, $B(t)\equiv|B(t)|e^{i\beta(t)}$ удовлетворяют следующим условиям:

(A1) $A(t)$, $B(t)$ кусочно непрерывные на $[-\pi,\pi]$, $\{\tilde{t}_k\}_1^l$ — множество точек разрыва этих функций на $(-\pi,\pi)$, причем $A(t)B(t)\neq 0$ для $t\in[-\pi,\pi]$;

(A2) $\tilde{\nu}(t)\in C[-\pi,\pi]$, $\tilde{\nu}(t)$ кусочно дифференцируема и $\tilde{\nu}'(t)$ кусочно гёльдерова на $[-\pi,\pi]$, $\{\tilde{\tau}_k\}_1^m$ — точки разрыва, причем $\tilde{\nu}(\pi)-\tilde{\nu}(-\pi)=2\pi$ и $\tilde{\nu}'(t)>0$ для $t\in[-\pi,\pi]$;

(A3) $\{\widetilde{\varphi}_k\}_0^{\tilde{r}}\cap\mathbb{Z}=\varnothing$, где

$$\widetilde{\varphi}_k=\frac{1}{8\pi^2}[\tilde{\nu}_k+2\ln|\tilde{\lambda}_k|]\tilde{\nu}_k+\frac{\pi-\arg\tilde{\lambda}_k}{2\pi};\quad \tilde{\nu}_0=\ln\left|\frac{\tilde{\nu}'(-\pi+0)}{\tilde{\nu}'(\pi-0)}\right|,$$

$$\tilde{\nu}_k=\ln\left|\frac{\tilde{\nu}'(\tilde{s}_k+0)}{\tilde{\nu}'(\tilde{s}_k-0)}\right|,\quad k=\overline{1,\tilde{r}};$$

$$\tilde{\lambda}_0=\frac{G(-\pi+0)}{G(\pi-0)};\quad \tilde{\lambda}_k=\frac{G(\tilde{s}_k+0)}{G(\tilde{s}_k-0)},\quad k=\overline{1,\tilde{r}};$$

$$G(t)\equiv\frac{B(t)}{A(t)};\quad \{\tilde{t}_k\}_1^l\cup\{\tilde{\tau}_k\}_1^m\equiv\{\tilde{s}_k\}_1^{\tilde{r}},\ -\pi<\tilde{s}_1<\dots<\tilde{s}_{\tilde{r}}<\pi.$$

Положим $\tilde{\theta}(t)\equiv\beta(t)-\alpha(t)$, и пусть $\tilde{h}_k=\tilde{\theta}(\tilde{s}_k+0)-\tilde{\theta}(\tilde{s}_k-0)$, $k=\overline{1,\tilde{r}}$. Возьмем $\tilde{n}_0=0$ и определим $\{\tilde{n}_i\}_1^{\tilde{r}}\subset\mathbb{Z}$ из следующих соотношений:

$$-\frac{1}{2}<\frac{\tilde{h}_k}{2\pi}-\frac{1}{8\pi^2}[\tilde{\nu}_k+2\ln|\tilde{\lambda}_k|]\,\tilde{\nu}_k+\tilde{n}_{k-1}-\tilde{n}_k<\frac{1}{2},\quad k=\overline{1,\tilde{r}}. \tag{8}$$

Обозначим $\widetilde{\omega}_{\tilde{r}}=\frac{1}{2\pi}[\tilde{\theta}(-\pi+0)-\tilde{\theta}(\pi-0)]-\frac{1}{8\pi^2}[\tilde{\nu}_0+2\ln|\tilde{\lambda}_0|]\,\tilde{\nu}_0+\tilde{n}_{\tilde{r}}$.

Теорема [25]. *Пусть функции $A(t)$, $B(t)$ и $\nu(t)$ удовлетворяют условиям* (A1)–(A3). *Тогда система* (7) *образует базис Рисса в $L_2(-\pi,\pi)$ только при $\widetilde{\omega}_{\tilde{r}}\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. При $\widetilde{\omega}_{\tilde{r}}<-\frac{1}{2}$ она полна, но не минимальна, при $\widetilde{\omega}_{\tilde{r}}>\frac{1}{2}$ минимальна, но не полна.*

2. Основные результаты

Будем рассматривать наиболее общий случай. Приведем основной результат работы относительно базисности Рисса систем $\{\omega_n^{\pm}\}$ в $L_2(0,\pi)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* (a1)–(a3), *величина ω_r определена из соотношений* (a2), (5), (6) *и имеет место одно из следующих условий:*

(b1) $-\frac{1}{2}<\omega_0-2n_0<\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}<\omega_r<-\frac{1}{2}$;

(b2) $-\frac{3}{2}<\omega_0-2n_0<-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<\omega_r<\frac{1}{2}$;

(b3) $-\frac{1}{2}<\omega_0-2n_0<\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<\omega_r<\frac{1}{2}$ *и система $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq 1}$ полна в $L_2(0,\pi)$;*

(b4) $-\frac{3}{2}<\omega_0-2n_0<-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}<\omega_r<-\frac{1}{2}$ *и система $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq 1}$ минимальна в $L_2(0,\pi)$.*

Тогда система $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq 1}$ *образует базис Рисса в* $L_2(0,\pi)$.

Доказательство. Сначала предполагаем, что неравенства (5) выполнены при $n_i = 0$, $i = \overline{0,r}$. Рассматриваем каждый случай отдельно. Прежде чем приступить к доказательству, сделаем следующее преобразование.

Пусть $\eta(t)$ — введенная при доказательстве леммы 3 функция, т. е.

$$\eta(t) \equiv \begin{cases} \sigma(t), & t \in [0,\pi], \\ -\xi(-t), & t \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Обратную к $\tau = \eta(t)$ функцию обозначим через $t = \eta_{-1}(\tau)$, $\tau \in (\eta(-\pi), \eta(\pi))$. Из наложенных ограничений на функции $\sigma(t)$ и $\xi(t)$ следует, что замена переменных $t = -\eta_{-1}(-\tau)$ не влияет на базисные свойства системы $\{\omega_{n;k}\}$ в $L_2(-\pi,\pi)$, где $\omega_{n;k}(t) \equiv [A(t)\omega^n(t);\ A(-t)\omega^k(-t)]$. После замены получаем систему $\{A(-\eta_{-1}(-\tau))e^{i\eta(-\eta_{-1}(-\tau))n}; A(\eta_{-1}(-\tau))e^{-i\tau k}\}$, $\tau \in (-\eta(\pi), -\eta(-\pi))$. Замечая, что $\eta(\pi) = \eta(-\pi) + 2\pi$, после повторной замены $t = \tau + \eta(\pi) - \pi$ $\tau \in (-\eta(\pi), -\eta(-\pi))$, получаем систему экспонент со сдвигом $\{E_{n;k}\}$ вида (7):

$$E_{n;k}(t) \equiv [\widetilde{A}(t)e^{i\nu(t)n}; \widetilde{B}(t)e^{-ikt}],$$

где $\widetilde{A}(t) \equiv A(-\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi))$, $\widetilde{B}(t) \equiv A(\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi))$, $\nu(t) \equiv \eta(-\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi))$, $t \in [-\pi,\pi]$. В результате приходим к следующему заключению: базисные свойства (полнота, минимальность, базисность, безусловная базисность и т. п.) систем $\{\omega_{n;k}\}_{n\geq\tilde n_0;k\geq\tilde k_0}$ и $\{E_{n;k}\}_{n\geq\tilde n_0;k\geq\tilde k_0}$ в $L_2(-\pi,\pi)$ эквивалентны. Предположения (a1)–(a3) позволяют применить теорему из [25] к системе $\{E_{n;k}\}_{n\geq\tilde n_0;k\geq\tilde k_0}$. Производная $\nu(t)$ есть

$$\nu'(t) = \frac{\eta'(-\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi))}{\eta'(\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi))}.$$

Если $t \in [\tau_0,\pi]$, то $\tau = -t+\eta(\pi)-\pi \in [\eta(-\pi), -\tau_0+\eta(\pi)-\pi]$, откуда $-\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi) \in [0,\pi]$ и, значит, $\eta'(-\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi)) = \sigma'(-\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi))$, $\eta'(\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi)) = -\xi'\ (-\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi))$. Аналогично $\eta'(-\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi)) = -\xi'(\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi))$, $\eta'(\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi)) = \sigma'(\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi))$ при $t \in [-\pi,\tau_0]$. Учитывая эти соотношения, имеем

$$\nu'(t) = \begin{cases} -\frac{\xi'(-\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi))}{\sigma'(-\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi))}, & t \in (\tau_0,\pi], \\ -\frac{\sigma'(\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi))}{\xi'(\eta_{-1}(-t+\eta(\pi)-\pi))}, & t \in [-\pi,\tau_0). \end{cases}$$

Пусть $\tau(t) = -\eta(-t)+\eta(\pi)-\pi$, $t \in [-\pi,\pi]$. Ясно, что $\tau(t)$ — возрастающая на $[-\pi,\pi]$ функция: $\tau(\pm\pi) = \pm\pi$, т. е. $\tau \in [-\pi,\pi]$. Точками разрыва функций $\widetilde{A}(\tau)$, $\widetilde{B}(\tau)$ и $\nu'(\tau)$ являются $\{\tau_0\} \cup \{\tau_k^\pm\}_1^r$, где $\tau_0 = -\eta(0)+\eta(\pi)-\pi$, $\tau_k^\pm = -\eta(\mp s_k)+\eta(\pi)-\pi$, $k = \overline{1,r}$. Очевидно, что $-\pi < \tau_r^- < \dots < \tau_1^- < \tau_0 < \tau_1^+ < \dots < \tau_r^+ < \pi$. Кроме них функции $\widetilde{A}(t)$, $\widetilde{B}(t)$ и $\nu'(t)$ не имеют точек разрыва. Более того, величины h_k, ν_k и λ_k, найденные согласно теореме из [25] и соответствующие точкам $\{\tau_k^+\}_1^r$ и $\{\tau_k^-\}_1^r$, одинаковы. Учитывая эти обстоятельства, можем приступить к доказательству.

Случай (b1). В этом случае рассматриваем систему $\{E_{n;k}\}$ при $n;k \geq 1$, т. е. $\tilde n_0 = \tilde k_0 = 1$. Представим ее в виде (7): $\{\widetilde{A}_1(t)e^{i\nu(t)n}; \widetilde{B}(t)e^{-ikt}\}_{n\geq 0;k\geq 1}$, где $\widetilde{A}_1(t) \equiv \widetilde{A}(t)e^{i\nu(t)}$. Применим теорему из [25] к базисности этой системы. Нетрудно заметить, что функции $\widetilde{A}_1(t)$, $\widetilde{B}(t)$ и сдвиг $\nu(t)$ удовлетворяют всем условиям (A1)–(A3). Найдем величины $\{h_k^1, \nu_k^1, \lambda_k^1\}$, соответствующие этой системе. Величины, отвечающие точке разрыва $\tau \in \{\tau_0,\ \tau_k^+,\ \tau_k^-,\ k = \overline{1,r}\}$, обозначим через $\{h^1(\tau),\ \nu^1(\tau),\ \lambda^1(\tau)\}$. Таким образом, нетрудно заметить, что $h^1(\tau_k^-) = h^1(\tau_k^+)$, $\nu^1(\tau_k^-) = \nu^1(\tau_k^+)$, $\lambda^1(\tau_k^-) = \lambda^1(\tau_k^+)$, $k = \overline{1,r}$. Найдем величину, соответствующую точке разрыва $\tau = \tau_0$. Пусть $\theta_1(t) \equiv \arg \widetilde{B}(t) - \arg \widetilde{A}_1(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} h^1(\tau_0) &= \theta_1(\tau_0 + 0) - \theta_1(\tau_0 - 0) \\ &= \arg \widetilde{B}(\tau_0 + 0) - \arg \widetilde{A}_1(\tau_0 + 0) - \arg \widetilde{B}(\tau_0 - 0) + \arg \widetilde{A}_1(\tau_0 - 0). \end{aligned}$$

Далее следует обратить внимание на то, что функция $\tau(t) = -\eta(-t) + \eta(\pi) - \pi$ отображает отрезок $[0,\pi]$ ($[-\pi,0]$) на отрезок $[\tau_0,\pi]$ ($[-\pi,\tau_0]$), причем $\tau(0) = \tau_0$. Учитывая эти обстоятельства, получаем $h^1(\tau_0) = 2(\arg b(0) - \arg a(0))$. Аналогичным образом находим величины $\nu^1(0)$ и $\lambda^1(0)$. Имеем

$$\nu^1(0) = \ln\left|\frac{\nu'(+0)}{\nu'(-0)}\right| = 2\ln\left|\frac{\sigma'(0)}{\xi'(0)}\right| = \nu_0, \quad \lambda^1(0) = \frac{\widetilde{G}(+0)}{\widetilde{G}(-0)},$$

где $\widetilde{G} \equiv \frac{\widetilde{B}(t)}{\widetilde{A}_1(t)}$, $t \in [-\pi,\pi]$. Следовательно,

$$\lambda^1(0) = \frac{\widetilde{B}(+0)\widetilde{A}_1(-0)}{\widetilde{A}_1(+0)\widetilde{B}(-0)} = \frac{b^2(0)}{a^2(0)},$$

$$\begin{aligned} \theta_1(-\pi+0)-\theta_1(\pi-0) &= \arg \widetilde{B}(-\pi+0)-\arg \widetilde{A}_1(-\pi+0)-\arg \widetilde{B}(\pi-0)+\arg \widetilde{A}_1(\pi-0) \\ &= 2(\arg a(\pi) - \arg b(\pi)) + \nu(\pi) - \nu(-\pi) = 2(\arg a(\pi) - \arg b(\pi)) + 2\pi. \end{aligned}$$

Следуя теореме из [25] устанавливаем, что

$$\frac{h^1(\tau_0)}{2\pi} - \frac{1}{8\pi^2}[\nu^1(0) + 2\ln|\lambda^1(0)|]\nu^1(0) = \frac{h_0}{\pi} - \frac{1}{8\pi^2}[\nu_0 + 2\ln|\lambda_0|]\nu_0 = \omega_0,$$

и из условия (b1) получаем $n_0 = 0$, $n_r = 0$. Найдем величину $\widetilde{\omega}_{\tilde{r}}$, соответствующую данному случаю:

$$\widetilde{\omega}_{\tilde{r}} = \frac{1}{2\pi}[\theta_1(-\pi + 0) - \theta_1(\pi - 0)] - \frac{1}{8\pi^2}[\nu^1(\pi) + 2\ln|\lambda^1(\pi)|]\nu^1(\pi),$$

где $\nu^1(\pi) = \ln\left|\frac{\nu'(-\pi+0)}{\nu'(\pi-0)}\right|$, $\lambda^1(\pi) = \frac{\widetilde{G}(-\pi+0)}{\widetilde{G}(\pi-0)}$. Таким образом,

$$\nu^1(\pi) = 2\ln\left|\frac{\xi'(\pi)}{\sigma'(\pi)}\right| = \nu_\pi,$$

$$\lambda^1(\pi) = \frac{\widetilde{B}(-\pi + 0)\widetilde{A}_1(\pi - 0)}{\widetilde{A}_1(-\pi - 0)\widetilde{B}(\pi - 0)} = \frac{a^2(\pi)}{b^2(\pi)}e^{i[\nu(\pi)-\nu(-\pi)]} = e^{i2\pi}\frac{a^2(\pi)}{b^2(\pi)},$$

и в результате

$$\widetilde{\omega}_{\tilde{r}} = \frac{h_\pi}{\pi} - \frac{1}{8\pi^2}[\nu_\pi + 2\ln|\lambda_\pi|]\,\nu_\pi + \frac{1}{2\pi}[\nu(\pi) - \nu(-\pi)] = \omega_r + 1.$$

Из условия (b1) получаем $-\frac{1}{2} < \widetilde{\omega}_{\tilde{r}} < \frac{1}{2}$. Применив теорему из [25], в результате получаем, что система $\{E_{n;k}\}_{n;k\geq 1}$, а также система $\{\omega_{n;k}\}_{n;k\geq 1}$ образуют базис

Рисса в $L_2(-\pi,\pi)$. По лемме 1 отсюда следует, что система $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq 1}$ образует безусловный базис в $L_2(0,\pi)$. Принимая во внимание лемму 3, из теоремы Лорча (см. [26]) получаем базисность Рисса $\{\upsilon_n^-\}_{n\geq 1}$ в $L_2(0,\pi)$.

Случай (b2). В этом случае рассматриваем систему $\{E_{n;k}\}$ при $n,k\geq 1$. Представим ее в виде $\{\widetilde{A}_1(t)e^{i\nu(t)n};\widetilde{B}(t)e^{-ikt}\}_{n\geq 0;k\geq 1}$ и применим теорему из [25]. Следуя соотношениям (8), получаем, что $n_r=-1$ и $\widetilde{\omega}_{\tilde{r}}=\omega_r$. Это обеспечивает базисность Рисса системы $\{E_{n;k}\}_{n,k\geq 1}$ в $L_2(-\pi,\pi)$. Дальнейшее идентично случаю (b1).

Случай (b3). В этом случае непосредственное применение теоремы из [25] к системе $\{E_{n;k}\}$ при $n\geq 0$, $k\geq 1$ дает, что она образует базис Рисса в $L_2(-\pi,\pi)$. Таким образом, система $\{\omega_{n;k}\}_{n\geq 0;k\geq 1}$ образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$. Дальнейшее очевидным образом следует из леммы 2.

Случай (b4). Рассмотрим систему $\{E_{n;k}\}$ при $n\geq 1$, $k\geq 2$ и представим ее в виде

$$\{A_0(t)e^{i\nu(t)n};B_0(t)e^{-ikt}\}_{n\geq 0;k\geq 1},\tag{9}$$

где $A_0(t)\equiv\widetilde{A}(t)e^{i\nu(t)}$; $B_0(t)\equiv\widetilde{A}(-t)e^{-it}$. Пусть $\theta_0(t)\equiv\arg B_0(t)-\arg A_0(t)$. Ясно, что точки разрыва и скачки в этих точках функций $\theta_0(t)$ и $\tilde{\theta}(t)$ на $(-\pi,\pi)$ совпадают, где $\tilde{\theta}(t)\equiv\arg\widetilde{B}(t)-\arg\widetilde{A}(t)$. Применим теорему из [25] к системе (9). Следуя этой теореме, из соотношений (8) имеем $n_{\tilde{r}}=-1$. Обратив внимание на выражение $\theta_0(-\pi)-\theta_0(\pi)=\tilde{\theta}(-\pi)-\tilde{\theta}(\pi)+4\pi$, непосредственно из этой теоремы получаем, что система (9) образует базис Рисса в $L_2(-\pi,\pi)$. В результате система $\{E_{n;k}\}_{n\geq 1;k\geq 2}$, а также система $\{\omega_{n;k}\}_{n\geq 1;k\geq 2}$ образует базис Рисса в $L_2(-\pi,\pi)$. Окончательный результат следует из леммы 2.

Рассмотрим общий случай, т. е. когда не все n_i, $i=\overline{1,r}$, в условиях (5) равны нулю. Введем следующую функцию:

$$g(t)\equiv\begin{cases}e^{-i2n_0\pi}, & 0\leq t<s_1,\\ e^{-i2n_1\pi}, & s_1\leq t<s_2,\\ \vdots & \\ e^{-i2n_r\pi}, & s_r\leq t\leq\pi.\end{cases}$$

Ясно, что $g(t)\equiv 1$. Умножим каждый член системы $\{\omega_n^-\}_{n\geq 1}$ на функцию $g(t)$:

$$\omega_n^-(t)\equiv a(t)e^{i\sigma(t)n}-\tilde{b}(t)e^{-\xi(t)n},\quad n\geq 1,$$

где $\tilde{b}(t)\equiv g(t)b(t)$. Примем $\arg\tilde{b}(t)\equiv\arg b(t)+\arg g(t)$. Соответствующие целые числа $\{n_i\}_1^r\subset\mathbb{Z}$, определенные из соотношений (5) по этой системе, равны нулю. А этот случай уже рассмотрен.

Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть выполнены условия

(c1) $a(t),b(t)\in C[0,\pi]$; $a(t)b(t)\neq 0$, $t\in[0,\pi]$;

(c2) $\sigma'(t),\xi'(t)\in C[0,\pi]$; $\sigma'(t)>0$, $\xi'(t)>0$, $t\in[0,\pi]$; $\sigma(0)=\xi(0)$, $\sigma(\pi)+\xi(\pi)=2\pi$;

(c3) $\left\{\omega_0-\frac{1}{2};\omega_\pi-\frac{1}{2}\right\}\cap\mathbb{Z}=\varnothing$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (c1)–(c3), $n_0\in\mathbb{Z}$ *определяем из неравенства*

$$-\frac{3}{2}+2n_0<\omega_0<\frac{1}{2}+2n_0.$$

Пусть $\omega_r = \omega_\pi + 2n_0$, где величина ω_π определена из (a2). *Тогда относительно системы $\{\omega_n^-\}_{n\geq 1}$ справедливы утверждения теоремы* 1.

На самом деле в этом случае из соотношений (5) следует, что $n_r = n_0$.

Рассмотрим систему $e_n(t) = e^{i\sigma(t)n} - e^{-i\xi(t)n}$, $\quad n \geq 1$. Положим $\alpha_0 = -\frac{\nu_0^2}{8\pi^2}$, $\alpha_\pi = -\frac{\nu_\pi^2}{8\pi^2}$ и потребуем выполнение условия

(c4) $\left\{\alpha_0 - \frac{1}{2}; \alpha_\pi - \frac{1}{2}\right\} \cap \mathbb{Z} = \varnothing$.

Следствие 2. *Пусть имеют место условия* (c2), (c4). *Находим $n_0 \in \mathbb{Z}$ из неравенства*

$$-\frac{3}{2} + 2n_0 < \alpha_0 < \frac{1}{2} + 2n_0.$$

Положим $\omega = \alpha_\pi + 2n_0$. Пусть имеет место одно из следующих условий:

(d1) $-\frac{1}{2} < \alpha_0 - 2n_0 < \frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2} < \omega < -\frac{1}{2}$;

(d2) $-\frac{3}{2} < \alpha_0 - 2n_0 < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < \omega < \frac{1}{2}$;

(d3) $-\frac{1}{2} < \alpha_0 - 2n_0 < \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < \omega < \frac{1}{2}$;

(d4) $-\frac{3}{2} < \alpha_0 - 2n_0 < -\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2} < \omega < -\frac{1}{2}$ *и $\{e_n\}_{n\geq 1}$ минимальна в $L_2(0,\pi)$.*

Тогда система $\{e_n\}_{n\geq 1}$ образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$.

При выполнении условий (d1), (d2) и (d4) утверждение следствия непосредственно вытекает из теоремы 1. Если имеет место условие (d3), то в силу того, что $A(t) \equiv 1$, в этом случае получаем, что соответствующая система $1 \cup \{W^n(t); W^n(-t)\}_{n\geq 1}$ образует базис в $L_2(-\pi,\pi)$, и по лемме 1 система $\{e_n\}_{n\geq 1}$ полна в $L_2(0,\pi)$. Дальнейшее очевидно.

3. Критерий базисности системы Костюченко

3.1. Рассмотрим систему Костюченко $S_\alpha^+ \equiv \{e^{i\alpha nt}\sin nt\}_{n\geq 1}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ — действительное число. Применим полученные результаты к базисности этой системы в $L_2(0,\pi)$. Представив ее в виде $\{\omega_n^-\}_{n\geq 1}$, имеем $\sigma(t) = (\alpha+1)t$, $\xi(t) = (1-\alpha)t$. При $|\alpha| < 1$ выполнено условие (c2). Находим

$$\nu_0 = 2\ln\left|\frac{\sigma'(0)}{\xi'(0)}\right| = 2\ln\left|\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right|; \quad \nu_\pi = 2\ln\left|\frac{\xi'(\pi)}{\sigma'(\pi)}\right| = 2\ln\left|\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right| = -\nu_0.$$

Согласно следствию 2 получаем $\alpha_0 = -\frac{\nu_0^2}{8\pi^2}$, $\alpha_\pi = -\frac{\nu_\pi^2}{8\pi^2} = -\frac{\nu_0^2}{8\pi^2} = \alpha_0$. Условие (c4) приобретает вид $\alpha_0 - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Заметив, что $\left|\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right| = \ln\frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}$, отсюда получаем $|\alpha| \neq \frac{e^{\pi\sqrt{2n-1}}-1}{e^{\pi\sqrt{2n-1}}+1} = \pi_n$, $n \in N$. Из основных неравенств для α_0 и ω ($\omega = \alpha_0 + 2n_0$) вытекает, что $-\frac{3}{2} < \alpha_0 - 2n_0 < \frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2} < \alpha_0 + 2n_0 < \frac{1}{2}$, откуда $n_0 = 0$. Следовательно, $\omega = \alpha_0$.

Рассмотрим случай $-\frac{1}{2} < \alpha_0 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{\nu_0^2}{8\pi^2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\nu_0| < 2\pi \Leftrightarrow |\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}| < \pi \Leftrightarrow |\alpha| < \frac{e^\pi - 1}{e^\pi + 1}$. В этом случае выполнено условие (d3) следствия 2, так что система S_α^+ образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$.

Пусть $-\frac{3}{2} < \alpha_0 < -\frac{1}{2}$, т. е.

$$\frac{e^\pi - 1}{e^\pi + 1} < |\alpha| < \frac{e^{\pi\sqrt{3}} - 1}{e^{\pi\sqrt{3}} + 1}. \tag{10}$$

В этом случае выполнено условие (d4) следствия 2. Достаточно показать минимальность системы S_α^+ в $L_2(0,\pi)$. Воспользуемся результатами из [17]. Следуя этой работе, находим числа $r \geq 0$ и $\omega \in (0,1]$ из представления

$$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \exp(r + i\omega\pi) \to \omega = 1, \quad r = \ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $0 \le \alpha < 1$. В обозначениях этой работы имеем $\beta_+ = \beta_+(r,\omega) = -\frac{1}{2}\frac{r^2}{\pi^2}+\frac{1}{2}-4$, $\beta_- = \beta_-(r,\omega) = -\frac{1}{2}\frac{r^2}{\pi^2}+\frac{1}{2}$, $N_0 = N_+ + N_- - 1$, где $N_\pm = [(1-\beta_\pm)/2]$ ($[\cdot]$ — целая часть). Следовательно, $N_0 = \left[\frac{r^2}{4\pi^2}+\frac{1}{4}+2\right] + \left[\frac{r^2}{4\pi^2}+\frac{1}{4}\right] - 1 = 2\left[\frac{r^2}{4\pi^2}+\frac{1}{4}\right]+1$. Учитывая, что $\nu_0 = 2r$, из неравенства (10) получаем $\left[\frac{r^2}{4\pi^2}+\frac{1}{4}\right] = 0$, т. е. $N_0 = 1$. Отсюда и из [17] следует, что система S_α^+ минимальна в $L_2(0,\pi)$. Тогда из следствия 2 вытекает базисность Рисса системы S_α^+ в $L_2(0,\pi)$. Итак, относительно системы S_α^+ получаем

Утверждение 1. *Пусть $\alpha \in (-1,1)$ и $|\alpha| \ne \frac{e^\pi-1}{e^\pi+1}$. Тогда система S_α^+ образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$ только в том случае, если выполнено неравенство*

$$|\alpha| < \frac{e^{\pi\sqrt{3}}-1}{e^{\pi\sqrt{3}}+1}. \tag{11}$$

В самом деле, если выполнено неравенство (11), то S_α^+ образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$. Если (11) не выполнено, то, как следует из результатов работы [17], система $\{e^{i\alpha n t}\sin nt\}_{n\ge N_0}^\infty$ полна и минимальна в $L_2(0,\pi)$ при $N_0 > 1$.

3.2. Приведем еще один результат относительно базисности двойной системы: $K_\alpha \equiv \{e^{i\alpha n|t|}e^{int}; e^{i\alpha k|t|}e^{-ikt}\}_{n\ge 0; k\ge 1}$ в $L_2(-\pi,\pi)$. Эта система получается из системы S_α^+ по вышеприведенной схеме. А именно, представив систему S_α^+ в виде $S_\alpha^+ \equiv c\{\varphi^n(t) - \psi^n(t)\}_{n\ge 1}$, где $\varphi(t) \equiv e^{i(\alpha+1)t}$, $\psi(t) \equiv e^{i(\alpha-1)t}$, $c = \frac{1}{2i}$, имеем

$$W(t) \equiv \begin{cases} \varphi(t), & t \in (0,\pi], \\ \psi(-t), & t \in [-\pi,0] \end{cases} \equiv \begin{cases} e^{i\alpha t}e^{it}, & t \in (0,\pi], \\ e^{-i\alpha t}e^{it}, & t \in [-\pi,0] \end{cases} \equiv e^{it}e^{i\alpha|t|}.$$

Учитывая связи между базисными свойствами одинарных и двойных систем, назовем K_α *двойной системой Костюченко.* Непосредственное применение теоремы из [25] дает следующее

Утверждение 2. *Пусть $|\alpha| < 1$ и $\alpha \ne \pi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Двойная система Костюченко K_α образует базис Рисса в $L_2(-\pi,\pi)$ только тогда, когда $|\alpha| < \pi_1 = \frac{e^\pi-1}{e^\pi+1}$.*

Замечание. Аналогичные результаты можно получить относительно системы $\{e^{i\alpha n t}\sin[(n+\beta)t+\gamma]\}_{n\ge 0}$, где $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ — некоторые параметры. Например, учитывая лемму 1, из утверждения 2 непосредственно получаем, что если $\alpha \in (-\pi_1,\pi_1)$, то система $\{e^{i\alpha n t}\cos nt\}_{n\ge 0}$ образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$.

Подытожив полученные результаты, приходим к заключению, что остаются следующие наиболее интересные с научной точки зрения вопросы.

Вопрос 1. *Изучить базисные свойства системы S_α^+ в $L_2(0,\pi)$ при $\alpha \in i\mathbb{R}$, $|\alpha| \ge 1$.*

Вопрос 2. *Исследовать базисность системы S_α^+ (K_α) в $L_p(0,\pi)$ (в $L_p(-\pi,\pi)$), $1 < p < +\infty$ $(p \ne 2)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левин Б. Я.* Целые функции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971.
2. *Джавадов М. Г.* О полноте некоторой части собственных функций несамосопряженного дифференциального уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159, № 4. С. 723–725.
3. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.
4. *Гасымов М. Г.* К теории полиномиальных операторных пучков // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199, № 4. С. 747—750.

5. *Гасымов М. Г., Джавадов М. Г.* Кратная полнота части собственных и присоединенных функций дифференциальных операторных пучков // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, № 4. С. 1235–1237.
6. *Радзиевский Г. В.* Об одном методе доказательства полноты корневых векторов оператор-функций // Докл. АН СССР. 1974. Т. 214, № 2. С. 291–294.
7. *Шкаликов А. А.* Об одной системе функций // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 6. С. 855–860.
8. *Казьмин Ю. А.* Замыкание линейной оболочки одной системы функций // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 4. С. 799–805.
9. *Барменков А. Н.* Об аппроксимативных свойствах некоторых систем функций: Дис. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1983.
10. *Тумаркин А. Г.* О полноте и минимальности некоторых систем функций // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 1. С. 160–167.
11. *Тумаркин А. Г.* О полноте действительных и мнимых частей степеней комплекснозначных функций // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 6. С. 160–190.
12. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
13. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977.
14. *Любарский Ю. И., Ткаченко В. А.* О системе $\{e^{\alpha nz}\sin nz\}_{n\geq 1}$ // Функцион. анализ и его прил. 1984. Т. 18, № 2. С. 69–70.
15. *Любарский Ю. И., Ткаченко В. А.* Полнота и минимальность специальных систем функций на множествах в комплексной плоскости. Харьков, 1985. 29 с. (Препринт/ФТИНТ АН УССР, № 33–85).
16. *Любарский Ю. И.* О системе $\{e^{-a\lambda_n t}\sin\lambda_n t\}_1^\infty$ // Функцион. анализ. и его прил. 1985. Т. 19, № 4. С. 94.
17. *Любарский Ю. И.* Полнота и минимальность систем функций вида $\{a(t)\psi^n(t)-b(t)\varphi_n(t)\}_N^\infty$ // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1988. № 49. С. 77–86.
18. *Любарский Ю. И.* Свойства систем линейных комбинаций степеней // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, № 6. С. 1–69.
19. *Lyubarski Yu. I., Tkachenko V. A.* Completeness of a system of functions on sets in the complex plane: Transl. from Russ. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1992. P. 137–165.
20. *Крицков Л. В.* К вопросу о базисности системы функций $\{\exp(iant)\sin nt\}$ // Докл. РАН. 1996. Т. 346, № 3. С. 297–298.
21. *Шкаликов А. А.* Сильно демпфированные пучки операторов и разрешимость соответствующих операторно-дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1988. Т. 135, № 1. С. 96–118.
22. *Карлович Ю. И., Кравченко В. Г.* Алгебра сингулярных интегральных операторов с кусочно непрерывными коэффициентами и кусочно гладким сдвигом на сложном контуре // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, № 5. С. 1030–1077.
23. *Билалов Б. Т.* О базисности системы $\{\exp(i\sigma nx)\sin nx\}$ и экспонент со сдвигом // Докл. РАН. 1995. Т. 345, № 2. С. 151–152.
24. *Билалов Б. Т.* Базисные свойства некоторых систем экспонент и степеней со сдвигом // Докл. РАН. 1994. Т. 344, № 4. С. 416–419.
25. *Билалов Б. Т.* Система экспонент со сдвигом и задача Костюченко // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 279–288.
26. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1865.

Статья поступила 13 мая 2009 г., окончательный вариант — 7 декабря 2011 г.

Билалов Билал Тельман оглы
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ул. Ф. Агаева, 9, Баку Az-1141, Азербайджан
b_bilalov@mail.ru