Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 517.983+517.5

РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ БЕРЛИНГА НОРМАЛЬНОГО ТИПА НА ИНТЕРВАЛЕ

Д. А. Абанина

Аннотация. Установлен критерий разрешимости уравнений свертки в классах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале. Исследован вопрос о вырождении уравнений свертки в дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: ультрадифференцируемая функция, уравнение свертки, теорема деления.

Введение

После классических работ Эренпрайса [1] и Хёрмандера [2] операторы свертки в различных пространствах бесконечно дифференцируемых функций исследовались многими авторами (см. [3–14]). В частности, в [6–14] рассматривались уравнения свертки в классах ультрадифференцируемых функций (УДФ), определяемых в подходе Берлинга — Бьорка через весовую функцию. Настоящая работа посвящена операторам свертки в пространствах УДФ Берлинга нормального типа на интервале. Данные классы являются гораздо более «тонкими» по сравнению с изучавшимися ранее классами Берлинга минимального типа [6–11], а также по сравнению с пространствами нормального типа на всей числовой прямой [13, 14]. Это обстоятельство естественным образом усложняет технику исследования.

Приведем коротко основные результаты работы. Пусть ω — весовая функция (определение весовой функции см. в § 1), $I = (-a, a)$ — заданный конечный интервал в $\mathbb{R}$. *Пространством УДФ Берлинга нормального типа* на интервале I называется пространство

$$\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I) = \left\{ f \in C^\infty(I) : \forall q \in (0,1)\, \forall l \in (0,a)\ |f|_{\omega,q,l} := \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\le l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{q\varphi^*_\omega(j/q)}} < \infty \right\},$$

где φ^*_ω — сопряженная по Юнгу к $\omega(e^x)$ (см. § 2). При этом пространство $\big(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)\big)'_\beta$ реализуется в виде следующего пространства целых функций:

$$H^1_{(\omega),I} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \mid \exists q \in (0,1)\, \exists l \in (0,a)\ \|f\|_{\omega,q,l} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{q\omega(z)+l|\operatorname{Im} z|}} < \infty \right\}.$$

Пусть μ — какой-нибудь мультипликатор пространства $H^1_{(\omega),I}$, а ψ_μ — соответствующий ему линейный непрерывный функционал на $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$. *Оператор свертки* T_μ с характеристической функцией μ определяется следующим образом:

$$(T_\mu f)(x) = \langle \psi_\mu, f(x+y)\rangle_y, \quad f \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I),\ x \in I.$$

Центральным результатом работы является теорема, полностью описывающая все характеристические функции μ, при которых уравнение свертки $T_\mu f = g$ имеет решение в классе $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ при любой правой части $g \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$.

Теорема 1. *Пусть ω — весовая функция, а μ — произвольный нетривиальный мультипликатор пространства $H^1_{(\omega),I}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *уравнение $T_\mu f = g$ разрешимо в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ при любой правой части $g \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$;*

(ii) *μ — делитель $H^1_{(\omega),I}$, т. е. если $f \in H^1_{(\omega),I}$ и $\frac{f}{\mu} \in H(\mathbb{C})$, то $\frac{f}{\mu} \in H^1_{(\omega),I}$;*

(iii) *образ оператора умножения $\Lambda_\mu : f \in H^1_{(\omega),I} \mapsto \mu f \in H^1_{(\omega),I}$ замкнут в $H^1_{(\omega),I}$;*

(iv) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists r_0 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ *с* $|x| \geq r_0\ \exists w \in \mathbb{C}$

$$|w - x| \leq \delta\omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(w)| \geq e^{-\varepsilon\omega(w)};$$

(v) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists r_0 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ *с* $|x| \geq r_0\ \exists t \in \mathbb{R}$ *с* $|t| > |x|$

$$|t - x| \leq \delta\omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(t)| \geq e^{-\varepsilon\omega(t)};$$

(vi) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists r_0 > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ *с* $|x| \geq r_0$, $|y| \leq \delta|x|$ *найдется окружность C_z с радиусом $R_z \leq \delta\omega(x) + \delta|y|$, содержащая точку z внутри себя, для всех точек ζ которой выполняется неравенство $|\mu(\zeta)| \geq e^{-\varepsilon\omega(x) - \varepsilon|y|}$.*

Замечание. В последнем неравенстве утверждения (vi) можно, как легко проверить, заменить x на $\operatorname{Re}\zeta$, а y на $\operatorname{Im}\zeta$, т. е. условие (vi) равносильно следующему: для любых $\varepsilon, \delta > 0$ существует $r_0 > 0$ такое, что для каждой точки $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $|x| \geq r_0$, $|y| \leq \delta|x|$ найдется окружность C_z с радиусом $R_z \leq \delta\omega(x) + \delta|y|$, содержащая точку z внутри себя, для всех точек ζ которой выполняется неравенство $|\mu(\zeta)| \geq e^{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta) - \varepsilon|\operatorname{Im}\zeta|}$.

Отметим, что в работе имеются примеры характеристических функций μ, как удовлетворяющих условиям (i)–(vi), так и не удовлетворяющих им.

Как частный случай уравнений $T_\mu f = g$ в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ рассмотрены дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Во-первых, установлено достаточное условие на вес ω, при котором уравнение свертки представляет собой дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Теорема 2. *Если целая функция $\mu(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(-i)^k z^k$ удовлетворяет условию*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon > 0\ \forall z \in \mathbb{C} \quad |\mu(z)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\omega(z)}, \tag{$*$}$$

то $T_\mu f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}$ для всех $f \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$, т. е. оператор свертки представляет собой дифференциальный оператор бесконечного порядка.

Из теорем 1 и 2 вытекают следующие результаты о разрешимости дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Следствие 1. *Пусть целая функция* $\mu(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(-i)^k z^k$ *удовлетворяет условию* $(*)$. *Для того чтобы дифференциальное уравнение* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)} = g$ *было разрешимо в классе* $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ *при любой правой части* $g \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$, *необходимо и достаточно, чтобы для* μ *выполнялось одно из эквивалентных условий* (iv)–(vi).

Следствие 2. *Дифференциальное уравнение конечного порядка* $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k f^{(k)} = g$ $(a_m \neq 0)$ *имеет решение в* $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ *при любых коэффициентах* $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, m$, *и любой правой части* $g \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$.

Наконец, в случае неквазианалитических весов ω (понятие неквазианалитического веса см. в § 1) полностью исследован вопрос о существовании характеристических функций μ, не удовлетворяющих условию $(*)$. Именно, доказана

Теорема 3. *Если* ω — *неквазианалитический вес такой, что*

$$\exists K > 1 : \limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(Kt)}{\omega(t)} < K, \tag{ε}$$

то для всякого мультипликатора μ *пространства* $H^1_{(\omega),I}$ *выполняется соотношение* $(*)$, *так что все операторы свертки представляют собой дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Если* ω — *неквазианалитический вес, для которого условие* (ε) *нарушено, то существует мультипликатор* μ *пространства* $H^1_{(\omega),I}$, *не удовлетворяющий условию* $(*)$.

Структура работы следующая. В § 1 содержатся необходимые сведения о весовых функциях. В § 2 вводятся рассматриваемые классы $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ УДФ и определяются операторы свертки $T_\mu : \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I) \to \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$. Специфика пространств нормального типа не позволяет, как это было сделано для пространств минимального типа [7, предложение 6.3], непосредственно проверить, что T_μ действует непрерывно в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$. В связи с этим в работе реализуется подход к оператору свертки как к сопряженному к оператору умножения. В § 3 доказывается основной результат работы — теорема 1, § 4 посвящен частному случаю уравнений свертки — дифференциальным уравнениям бесконечного порядка с постоянными коэффициентами: в нем устанавливаются теоремы 2 и 3, а также строится пример характеристической функции, порождающей уравнение, которое не всегда разрешимо в классе $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$.

§ 1. Весовые функции

Весовой функцией будем называть непрерывную неубывающую функцию $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$, удовлетворяющую условиям:

$$\forall p > 1 \ \exists C > 0 \ \forall x, y \geq 0 \quad \omega(x+y) \leq p(\omega(x) + \omega(y)) + C; \tag{α}$$

$$\omega(t) = o(t), \quad t \to \infty; \tag{α'}$$

$$\ln t = o(\omega(t)), \quad t \to \infty; \tag{γ}$$

$$\varphi_\omega(x) := \omega(e^x) \ \text{ выпукла на } [0,\infty). \tag{δ}$$

Если дополнительно известно, что

$$\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt < \infty, \tag{β}$$

то вес ω называется *неквазианалитическим*, а иначе — *квазианалитическим.*

Условие (α) почти полуаддитивности сверху веса ω является естественным при изучении пространств нормального типа. Оно заменило более слабое ограничение

$$\exists K > 1 \ \forall x, y \geq 0 \quad \omega(x+y) \leq K(\omega(x) + \omega(y) + 1), \tag{$\tilde{\alpha}$}$$

использовавшееся для предельных случаев пространств Берлинга минимального типа и пространств Румье максимального типа (см. [6–8, 10–12]). Как недавно установлено в [15], почти полуаддитивные сверху веса достаточны для построения классической теории Румье — Коматсу неквазианалитических пространств УДФ.

Без ограничения общности будем предполагать, что $\omega(1) = 0$. Пусть $\omega(z) := \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Приведем необходимые для дальнейшего свойства весовых функций. Из (α') с учетом $\omega(1) = 0$ вытекает, что при некотором $A > 0$

$$\omega(t) \leq At, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

В [16, неравенство (5)] доказано, что при том же A

$$\omega(t+1) - \omega(t) \leq Ae^2, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Условия $(\tilde{\alpha})$ и (δ) (тем более, (α) и (δ)) влекут (см. [17, лемма 2.2]), что

$$\lim_{r \downarrow 1} \limsup_{t \to \infty} \frac{\omega(rt)}{\omega(t)} = 1. \tag{3}$$

Для неквазианалитического веса ω важную роль, как известно, играет его гармоническое продолжение в открытую верхнюю (и нижнюю) полуплоскость:

$$P_\omega(x+iy) := \begin{cases} \frac{|y|}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt, & \text{если } y \neq 0, \\ \omega(x), & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

Функция P_ω непрерывна и субгармонична в $\mathbb{C}$, причем $P_\omega(z) \geq \omega(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Для $P_\omega(iy)$, где $y > 0$, справедливы следующие оценки. С одной стороны,

$$\begin{aligned} P_\omega(iy) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\omega(yt)}{t^2+1}\,dt + \frac{2}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{\omega(yt)}{t^2+1}\,dt \leq \frac{1}{2}\omega(y) + \frac{2}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{\omega(yt)}{t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\omega(y) + \frac{2y}{\pi}\int\limits_y^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt, \end{aligned} \tag{4}$$

откуда вытекает, что $P_\omega(iy) = o(y)$, $y \to \infty$. С другой стороны,

$$P_\omega(iy) \geq \frac{2}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{\omega(yt)}{t^2}\frac{t^2}{t^2+1}\,dt \geq \frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{\omega(yt)}{t^2}\,dt = \frac{y}{\pi}\int\limits_y^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt. \tag{5}$$

Далее, если K — постоянная из условия $(\tilde{\alpha})$, то

$$P_\omega(x+iy) \leq K(\omega(x) + P_\omega(iy) + 1) \quad \text{для всех } x+iy \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Действительно, при $y \neq 0$

$$P_\omega(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(x+yt)}{t^2+1}\,dt \leq \frac{K}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(x)+\omega(yt)+1}{t^2+1}\,dt = K(\omega(x) + P_\omega(iy) + 1).$$

Наконец, остановимся на важном подклассе класса всех неквазианалитических весов — строгих весах. В соответствии с [18] весовая функция ω называется *строгой*, если для нее выполнено одно из эквивалентных условий:

$$\exists K > 1 \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(Kt)}{\omega(t)} < K; \tag{ε}$$

$$\exists C > 0\ \forall y \geq 0 \quad P_\omega(iy) \leq C\omega(y) + C; \tag{ε_1}$$

$$\exists C > 0\ \forall z \in \mathbb{C} \quad P_\omega(z) \leq C\omega(z) + C. \tag{ε_2}$$

§ 2. Классы УДФ и оператор свертки

Пусть ω — весовая функция, а $\varphi^*_\omega(y) := \sup\{xy - \varphi_\omega(x) : x \geq 0\}$, $y \geq 0$, — сопряженная по Юнгу к функции φ_ω. Далее, пусть $I = (-a, a)$ — заданный конечный интервал в $\mathbb{R}$. Для положительных чисел q и l, где $l < a$, определим следующее пространство бесконечно дифференцируемых на I функций:

$$\mathscr{E}_{\omega,q,l}(I) = \left\{ f \in C^\infty(I) : |f|_{\omega,q,l} := \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\leq l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{q\varphi^*_\omega(j/q)}} < \infty \right\}.$$

Пространством УДФ Берлинга нормального типа на интервале I называется пространство

$$\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I) := \bigcap_{q\in(0,1)} \bigcap_{l\in(0,a)} \mathscr{E}_{\omega,q,l}(I).$$

Очевидно, что если $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ — числовые последовательности такие, что $0 < q_n \uparrow 1$, $\delta_n \downarrow 0$, то $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}_{\omega,q_n,a-\delta_n}(I)$. Пространство $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ наделяется естественной топологией, задаваемой набором преднорм $(|\cdot|_{\omega,q_n,a-\delta_n})_{n=1}^\infty$, и является (FS)-пространством (по поводу (FS)-пространств, а также используемых ниже (DFS)-пространств см. [19]).

Как известно [16, теорема 1], преобразование Фурье — Лапласа функционалов

$$F : \varphi \mapsto \widehat{\varphi}(z) := \varphi_x(e^{-ixz}), \quad z \in \mathbb{C},$$

устанавливает топологический изоморфизм между пространством $\big(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)\big)'_\beta$, сильно сопряженным с $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$, и пространством целых функций $H^1_{(\omega),I}$, где

$$H^1_{(\omega),I} := \bigcup_{q\in(0,1)} \bigcup_{l\in(0,a)} H_{\omega,q,l} = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\omega,q_n,a-\delta_n},$$

$$H_{\omega,q,l} := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{\omega,q,l} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{q\omega(z)+l|\operatorname{Im} z|}} < \infty \right\}.$$

При этом $H^1_{(\omega),I}$ наделяется топологией внутреннего индуктивного предела $\operatorname{ind}\limits_{n} H_{\omega,q_n,a-\delta_n}$ банаховых пространств $H_{\omega,q_n,a-\delta_n}$ и является (DFS)-пространством. Заметим, что из инъективности преобразования Фурье — Лапласа вытекает полнота системы экспонент $\{f_z := e^{-ixz} : z \in \mathbb{C}\}$ в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$. В рассматриваемом случае полноту этой системы можно получить также непосредственно, используя результаты из [20].

Кроме того, поскольку $\omega(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, все функции из $H^1_{(\omega),I}$ имеют порядок не больше 1 и тип при порядке 1 не больше a.

Для того чтобы ввести оператор умножения в пространстве $H^1_{(\omega),I}$, опишем мультипликаторы этого пространства, т. е. те целые функции μ, для которых $\mu H^1_{(\omega),I} \subset H^1_{(\omega),I}$. Напомним, что мультипликатор μ называется *непрерывным*, если оператор умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ действует непрерывно в $H^1_{(\omega),I}$. Поскольку топология в $H^1_{(\omega),I}$ мажорирует топологию поточечной сходимости, для всякого мультипликатора μ оператор Λ_μ имеет замкнутый график. Значит, в силу теоремы Гротендика (см. [21, приложение 1 Д. А. Райкова, теорема 2]) он непрерывен.

Предложение 1. *Множество всех* (*непрерывных*) *мультипликаторов пространства $H^1_{(\omega),I}$ совпадает с*

$$M^1_{(\omega)} := \left\{\mu \in H(\mathbb{C}) : \forall\varepsilon > 0 \ \|\mu\|_{\omega,\varepsilon,\varepsilon} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)+\varepsilon|\operatorname{Im} z|}} < \infty\right\}.$$

Доказательство стандартное, основано на применении предложений 3 и 5 из [22] и в целом повторяет доказательство теоремы 1 из [13], поэтому мы его опускаем.

Отметим, что все функции из $M^1_{(\omega)}$ имеют нулевой тип при порядке 1.

Следующая лемма носит технический характер и необходима для дальнейшего.

Лемма 1. *Если ω — весовая функция, то для любых положительных чисел q, l и ε найдется константа $C > 0$ такая, что при всех $z \in \mathbb{C}$*

$$q\omega(z) + l|\operatorname{Im} z| \le (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z| + C. \tag{7}$$

Доказательство. Зафиксируем q, l и ε из $(0,\infty)$. В силу (3) существуют $\delta \in (0,1)$ и $C_1 > 0$, при которых $\omega((1+\delta)t) \le \frac{q+\varepsilon}{q}\omega(t) + C_1$, $t \ge 0$. На основании (α') заключаем, что имеется $C_2 > 0$ такое, что $\omega(t) \le \frac{\delta\varepsilon}{2q}t + C_2$, $t \ge 0$.

Если точка $z \in \mathbb{C}$ такова, что $|\operatorname{Im} z| \le \delta|\operatorname{Re} z|$, то

$$q\omega(z) + l|\operatorname{Im} z| \le q\omega((1+\delta)\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| \le (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| + qC_1.$$

Если же $|\operatorname{Im} z| > \delta|\operatorname{Re} z|$, то

$$\begin{aligned} q\omega(z) + l|\operatorname{Im} z| &\le \frac{\delta\varepsilon}{2}|z| + l|\operatorname{Im} z| + qC_2 \le \frac{\delta\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{\delta}+1\right)|\operatorname{Im} z| + l|\operatorname{Im} z| + qC_2 \\ &= \left(\frac{\delta+1}{2}\varepsilon + l\right)|\operatorname{Im} z| + qC_2 \le (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z| + qC_2. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (7) выполняется при $C := q(C_1 + C_2)$. $\square$

Следствие. *В определении $M^1_{(\omega)}$ и $H^1_{(\omega),I}$ можно заменить $\omega(z)$ на $\omega(\operatorname{Re} z)$.*

Каждый мультипликатор $\mu \in M^1_{(\omega)}$ стандартным образом порождает оператор свертки в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$. А именно, так как оператор умножения Λ_μ действует непрерывно в $H^1_{(\omega),I}$, то $F^{-1} \circ \Lambda_\mu \circ F$ — линейное непрерывное отображение в $\left(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)\right)'_\beta$. Следовательно, сопряженное отображение $\widetilde{T}_\mu$ — оператор свертки — действует непрерывно в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$:

$$\langle \widetilde{T}_\mu f, \varphi\rangle = \langle f, (F^{-1} \circ \Lambda_\mu \circ F)\varphi\rangle, \quad f \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I),\ \varphi \in \left(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)\right)'.$$

Непосредственно свертка T_μ определяется следующим образом:

$$(T_\mu f)(x) := \langle \psi_\mu, f(x+y)\rangle_y, \quad f \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I),\ x \in I,$$

где $\psi_\mu := F^{-1}(\mu)$. На полной в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ системе $\{f_z = e^{-ixz} : z \in \mathbb{C}\}$ действие T_μ и $\widetilde{T}_\mu$ совпадает:

$$(T_\mu f_z)(x) = \langle \psi_\mu, e^{-i(x+y)z}\rangle_y = e^{-ixz}\widehat{\psi}_\mu(z) = \mu(z) f_z(x), \quad x \in I,\ z \in \mathbb{C}.$$

Из этого и соображений поточечной сходимости образов операторов T_μ и $\widetilde{T}_\mu$ заключаем, что $T_\mu = \widetilde{T}_\mu$, так что оператор свертки T_μ действует непрерывно в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Параграф посвящен доказательству теоремы 1, которое ввиду его громоздкости разбито на отдельные леммы. Сделаем предварительно несколько замечаний.

1. Эквивалентность условий (i) и (iii) вытекает из общей теории двойственности. А именно, в соответствии с [23, теорема 8.6.13, соотношение (c)] оператор T_μ сюръективен тогда и только тогда, когда образ его сопряженного отображения $F^{-1} \circ \Lambda_\mu \circ F$ сильно замкнут в $\big(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)\big)'$. Последнее, очевидно, равносильно тому, что образ оператора Λ_μ замкнут в $H^1_{(\omega),I}$.

Импликация (ii)⇒(iii) тоже, как известно, носит общий характер: она верна для нетривиальных мультипликаторов локально выпуклого пространства целых функций, топология которого мажорирует топологию равномерной сходимости на компактах в $\mathbb{C}$.

2. Доказав равносильность утверждений (ii)–(vi), тем самым установим для пространства $H^1_{(\omega),I}$ теорему деления. Данный шаг необходим при исследовании вопроса о сюръективности оператора T_μ и был проделан во всех рассматривавшихся ранее случаях (см. [1, 6, 9, 13]). Импликация (iv)⇒(v) уже доказана в [13, теорема 1], причем для более широкого класса мультипликаторов.

Оставшееся доказательство проведем по схеме (iii)⇒(iv), (v)⇒(vi)⇒(ii). Сформулируем функциональный критерий замкнутости образа оператора Λ_μ в $H^1_{(\omega),I}$.

Предложение 2. *Пусть ω — весовая функция, а μ — нетривиальный мультипликатор из $M^1_{(\omega)}$. Следующие условия равносильны:*

(i_1) *образ оператора $\Lambda_\mu : H^1_{(\omega),I} \to H^1_{(\omega),I}$ замкнут в $H^1_{(\omega),I}$;*

(i_2) *$\Lambda_\mu : H^1_{(\omega),I} \to H^1_{(\omega),I}$ — топологический изоморфизм «в»;*

(i_3) *если семейство $B \subset H^1_{(\omega),I}$ таково, что множество μB содержится и ограничено в некотором $H_{\omega,q_n,a-\delta_n}$, то найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что B содержится и ограничено в $H_{\omega,q_m,a-\delta_m}$;*

(i_4) *для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{q_m\omega(z)+(a-\delta_m)|\operatorname{Im} z|}} \le C \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)f(z)|}{e^{q_n\omega(z)+(a-\delta_n)|\operatorname{Im} z|}}, \quad f \in H^1_{(\omega),I}.$$

Доказательство этого предложения стандартно (см., например, [13, лемма 2]). Оно основано на свойствах (DFS)-пространств, теореме Гротендика об открытом отображении [21, приложение 1 Д. А. Райкова, теорема 2] и лемме Баернстейна [24]. Заметим еще, что лемма 1 позволяет в условии (i_4) заменить $\omega(z)$ на $\omega(\operatorname{Re} z)$.

Лемма 2. (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Доказательство. Так же, как в [13, лемма 4], доказательство основано на выметании масс субгармонических функций и применении леммы 1 из [25] о существовании специальных семейств целых функций.

Пусть оператор Λ_μ имеет замкнутый образ в $H^1_{(\omega),I}$. Если условие (iv) нарушено, то имеются числа $\varepsilon_0 \in \left(0, \min\left\{1, \frac{a}{4\pi}\right\}\right)$, $\delta_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и последовательность $(a_j)_{j=1}^\infty$ вещественных чисел с $|a_j| \uparrow \infty$ такие, что для каждого $j \in \mathbb{N}$

$$|\mu(w)| < e^{-\varepsilon_0\omega(w)} \quad \text{при всех } w \in \mathbb{C} : |w - a_j| \le \delta_0\omega(a_j). \tag{8}$$

Для определенности будем считать, что все a_j положительны. Кроме того, в силу (3) можно предполагать, что $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{\omega((1-\delta_0)t)} < 1 + \frac{\varepsilon_0}{2}$. Тогда найдется $t_0 > 0$, при котором

$$\omega(t) \le \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\omega((1-\delta_0)t), \quad t \ge t_0. \tag{9}$$

За счет условия (α') можно также считать, что

$$\omega(t) \le \delta_0 t, \quad t \ge t_0. \tag{10}$$

Проредим, если это необходимо, последовательность $(a_j)_{j=1}^\infty$ так, чтобы $a_1 > t_0$ и $a_{j+1} > 2a_j$. При этом круги $|w - a_j| \le \delta_0\omega(a_j)$ не будут пересекаться, поскольку на основании (10)

$$a_{j+1} - \delta_0\omega(a_{j+1}) - (a_j + \delta_0\omega(a_j)) \ge a_{j+1} - a_j - \delta_0^2(a_{j+1} + a_j) \ge \frac{1}{4}(3a_{j+1} - 5a_j) > 0.$$

1. Для субгармонической функции $u(z) = \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|$ и круга $K_{a_j,R_j} = \{z : |z - a_j| < R_j\}$, где $R_j = \frac{\delta_0}{2}\omega(a_j)$, осуществим процедуру выметания масс, положив $U_j(z)$ равным $u(z)$, если $|z-a_j| \ge R_j$, и равным $\frac{R_j^2-r^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{u(a_j+R_je^{i\theta})\,d\theta}{R_j^2+r^2-2R_jr\cos(\varphi-\theta)}$, если $z = a_j + re^{i\varphi}$, $0 \le r < R_j$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Полученная функция $U_j(z)$ непрерывна и субгармонична в $\mathbb{C}$, гармонична в K_{a_j,R_j} и, как проверено в [13, лемма 3], удовлетворяет условиям:

$$U_j(z) = \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|, \ \text{ если } |z - a_j| \ge R_j;$$

$$U_j(a_j) = \varepsilon_0\delta_0\omega(a_j);$$

$$U_j(z) \le \varepsilon_0\delta_0\omega(a_j) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|, \ \text{ если } |z - a_j| < R_j.$$

Поскольку $R_j = \frac{\delta_0}{2}\omega(a_j) \le \frac{\delta_0^2}{2}a_j < \delta_0 a_j$, из (9) вытекает, что для всех $z \in \mathbb{C}$ с $|z - a_j| < R_j$ имеем

$$\left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\omega(z) \ge \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\omega(a_j - R_j) \ge \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\omega((1-\delta_0)a_j) \ge \omega(a_j).$$

Значит, при этих z

$$U_j(z) \le \varepsilon_0\delta_0\left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z| \le \frac{3}{2}\varepsilon_0\delta_0\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|.$$

2. Положим $V_j(z) := (1 - \varepsilon_0\delta_0)\omega(z) + U_j(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда функция $V_j(z)$ непрерывна и субгармонична в $\mathbb{C}$ и удовлетворяет условиям:

$$V_j(z) = (1 - \varepsilon_0\delta_0)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|, \ \text{ если } |z - a_j| \ge R_j; \tag{11}$$

$$V_j(a_j) = \omega(a_j);$$

$$V_j(z) \le \left(1 + \frac{\varepsilon_0\delta_0}{2}\right)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z| \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}. \tag{12}$$

3. С помощью леммы 1 из [25] по функции $V_j(z)$ и точке a_j построим целую функцию f_j такую, что

$$f_j(a_j) = e^{V_j(a_j)} = e^{\omega(a_j)}; \tag{13}$$

$$|f_j(z)| \le \widetilde{A}(1 + |z|^2)^2 \exp V_j^1(z) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}, \tag{14}$$

где $\widetilde{A}$ — абсолютная постоянная, которая от j не зависит, а $V_j^1(z) := \sup\{V_j(z + w) : |w| \le 1\}$. Заметим сразу, что в силу условия (γ) на вес ω найдется $\widetilde{C} > 0$ такое, что

$$(1 + |z|^2)^2 \le \widetilde{C} \exp \frac{\varepsilon_0\delta_0}{4}\omega(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{15}$$

Оценим $V_j^1(z)$. Будем предполагать, что $R_1 = \frac{\delta_0}{2}\omega(a_1) > 1$. Тогда все R_j больше 1, так что круг $K_{a_j,2R_j}$ содержит 1-расширение круга K_{a_j,R_j}. Рассмотрим отдельно два случая. Если $|z - a_j| \ge 2R_j$, то для всех $w \in \mathbb{C}$ с $|w| \le 1$ точка $z + w$ находится вне K_{a_j,R_j}. Значит, на основании (11) и (2)

$$V_j(z + w) \le (1 - \varepsilon_0\delta_0)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z| + (1 - \varepsilon_0\delta_0)Ae^2 + \pi\varepsilon_0.$$

Если же $|z - a_j| < 2R_j$, то, воспользовавшись неравенствами (12) и (2), получим, что для любого w с $|w| \le 1$

$$V_j(z + w) \le \left(1 + \frac{\varepsilon_0\delta_0}{2}\right)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z| + \left(1 + \frac{\varepsilon_0\delta_0}{2}\right)Ae^2 + \pi\varepsilon_0.$$

Таким образом,

$$V_j^1(z) \le \begin{cases} (1 - \varepsilon_0\delta_0)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z| + C_1, & |z - a_j| \ge 2R_j, \\ \left(1 + \frac{\varepsilon_0\delta_0}{2}\right)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z| + C_1, & |z - a_j| < 2R_j, \end{cases}$$

где $C_1 := \left(1 + \frac{\varepsilon_0\delta_0}{2}\right)Ae^2 + \pi\varepsilon_0$.

Возвращаясь к (14), учитывая (15) и полагая $C_2 := \widetilde{A}\widetilde{C}e^{C_1}$, окончательно получим

$$|f_j(z)| \le \begin{cases} C_2 \exp\left(\left(1 - \frac{3\varepsilon_0\delta_0}{4}\right)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|\right), & |z - a_j| \ge 2R_j, \\ C_2 \exp\left(\left(1 + \frac{3\varepsilon_0\delta_0}{4}\right)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|\right), & |z - a_j| < 2R_j. \end{cases} \tag{16}$$

4. Покажем, что для построенного семейства $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ нарушается условие (i_3) предложения 2. Заметим, во-первых, что из первого неравенства в (16) вытекает, что $f_j \in H^1_{(\omega),I}$, $j \in \mathbb{N}$. Далее, в силу (13) при $j \to \infty$

$$\|f_j\|_{\omega,q_m,a-\delta_m} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f_j(z)|}{e^{q_m\omega(z)+(a-\delta_m)|\operatorname{Im} z|}} \ge \frac{|f_j(a_j)|}{e^{q_m\omega(a_j)}} = e^{(1-q_m)\omega(a_j)} \to \infty.$$

Следовательно, семейство $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ не ограничено ни в одном $H_{\omega,q_m,a-\delta_m}$.

Рассмотрим теперь функции μf_j, $j \in \mathbb{N}$. Поскольку $\mu \in M^1_{(\omega)}$, найдется $C_3 \ge 1$ такое, что $|\mu(z)| \le C_3 \exp\left(\frac{\varepsilon_0\delta_0}{2}\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|\right)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Тогда, используя в случае $|z-a_j|\ge 2R_j$ эту оценку вместе с первым неравенством из (16), а в случае $|z-a_j|<2R_j$ второе неравенство из (16) и (8), получим, что

$$|\mu(z)f_j(z)|\le \begin{cases} C_2C_3\exp\left(\left(1-\frac{\varepsilon_0\delta_0}{4}\right)\omega(z)+2\pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|\right), & |z-a_j|\ge 2R_j,\\ C_2\exp\left(\left(1-\frac{\varepsilon_0}{4}\right)\omega(z)+\pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|\right), & |z-a_j|<2R_j.\end{cases}$$

Значит, $|\mu(z)f_j(z)|\le C_2C_3\exp\left(\left(1-\frac{\varepsilon_0\delta_0}{4}\right)\omega(z)+2\pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|\right)$ для всех $z\in\mathbb{C}$, так что семейство $\{\mu f_j : j\in\mathbb{N}\}$ содержится и ограничено в $H_{\omega,q_n,a-\delta_n}$, где n выбрано так, чтобы $q_n>1-\frac{\varepsilon_0\delta_0}{4}$, $a-\delta_n>2\pi\varepsilon_0$.

Таким образом, не выполняется условие (i$_3$) предложения 2, что противоречит замкнутости $\operatorname{Im}\Lambda_\mu$ в $H^1_{(\omega),I}$. $\square$

Лемма 3. (v)$\Rightarrow$(vi).

Доказательство основано на применении теоремы об оценке снизу модуля аналитической в круге функции (см. [26, гл. 1, теорема 11]). В удобной для нас форме данный результат приведен в [9, лемма 2; 13, лемма 5].

Пусть имеет место (v). Зафиксируем $\varepsilon>0$ и $\delta\in(0,1/7)$. Будем, кроме того, считать δ настолько малым, что $\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{\omega((1+25\delta)t)}{\omega(t)}<2$. Положим $H:=3+\ln 48$, $H_1:=3+\ln\frac{24(2+\delta)}{\delta}$ и возьмем γ: $0<\gamma<\frac{\varepsilon}{16(H+1)(H_1+1)+3H}$.

Поскольку $\mu\in M^1_{(\omega)}$, существует $C>0$, при котором

$$|\mu(u)|\le Ce^{\gamma\omega(\operatorname{Re} u)+\gamma|\operatorname{Im} u|}\quad\text{для всех } u\in\mathbb{C}. \tag{17}$$

Далее, в силу (v) для γ, выступающего сейчас в роли ε, и δ имеется подходящее r_0. Можно сразу предполагать r_0 настолько большим, что $\omega(t)\le t$ для всех $t\ge r_0$ и

$$\omega((1+25\delta)t)\le 2\omega(t),\quad t\ge r_0. \tag{18}$$

Зафиксируем произвольную точку $z=x+iy\in\mathbb{C}$ с $|x|\ge r_0$, $|y|\le\delta|x|$. В соответствии с (v) для x существует $t\in\mathbb{R}$ с $|t|>|x|$ такое, что $|t-x|\le\delta\omega(x)$ и $|\mu(t)|\ge e^{-\gamma\omega(t)}$. Поскольку $|t|\le|x|+|t-x|\le|x|+\delta\omega(x)\le(1+\delta)|x|$, то $\omega(t)\le\omega((1+\delta)x)\le 2\omega(x)$. Следовательно,

$$|\mu(t)|\ge e^{-2\gamma\omega(x)}. \tag{19}$$

Обозначим $r:=|z-t|$ ($r>0$, так как $|t|>|x|$). При этом

$$r\le|y|+|t-x|\le|y|+\delta\omega(x)\le\delta|x|+\delta\omega(x)\le 2\delta|x|. \tag{20}$$

1. Применим сначала лемму о минимуме модуля аналитической функции к функции μ, радиусам r и $R=\left(1+\frac{\delta}{2}\right)r$ и точке t. Получим, что при некотором ρ, $r<\rho<\left(1+\frac{\delta}{2}\right)r$, для всех Z с $|Z-t|=\rho$ выполняется оценка

$$|\mu(Z)|\ge|\mu(t)|^{H_1+1}\left(\max\left\{|\mu(\xi)|:|\xi-t|=2e\left(1+\frac{\delta}{2}\right)r\right\}\right)^{-H_1}. \tag{21}$$

На окружности $|Z-t|=\rho$ выберем точку w такую, что $\arg(w-t)=\arg(z-t)$. Тогда

$$|\operatorname{Re} w|\le|x|,\quad |y|\le|\operatorname{Im} w|\le\left(1+\frac{\delta}{2}\right)|y|. \tag{22}$$

Оценим $|\mu(\xi)|$ для ξ с $|\xi-t|=2e\left(1+\frac{\delta}{2}\right)r$. Имеем

$$|\operatorname{Im}\xi|\le 2e\left(1+\frac{\delta}{2}\right)r\le 12r\le 12(|y|+\delta\omega(x)),$$

$$|\operatorname{Re}\xi| \le |t| + 2e\left(1+\frac{\delta}{2}\right)r \le |t| + 12r \le (1+\delta)|x| + 24\delta|x| = (1+25\delta)|x|.$$

Поэтому на основании (17) и (18)

$$|\mu(\xi)| \le C\exp(\gamma\omega((1+25\delta)x) + \gamma 12(|y| + \delta\omega(x))) \le C\exp(14\gamma\omega(x) + 12\gamma|y|).$$

Подставляя эту оценку и (19) в (21) с $Z = w$, получаем

$$|\mu(w)| \ge C^{-H_1}\exp(-16\gamma(H_1+1)\omega(x) - 12\gamma H_1|y|). \tag{23}$$

2. Теперь применим ту же лемму к μ, $r_1 := |w-z|$, $R_1 = 2r_1$ и точке w. В результате найдем ρ_1, $r_1 < \rho_1 < 2r_1$, такое, что для всех ζ с $|\zeta - w| = \rho_1$

$$|\mu(\zeta)| \ge |\mu(w)|^{H+1}\big(\max_{|\xi-w|=4er_1}|\mu(\xi)|\big)^{-H}. \tag{24}$$

Проверим, что окружность $C_z := \{\zeta\in\mathbb{C} : |\zeta - w| = \rho_1\}$ искомая. Во-первых, ясно, что она содержит точку z внутри себя. Далее, поскольку $r_1 = |w-z| < \frac{\delta}{2}r$, то $\rho_1 < 2r_1 < \delta r \le \delta(|y| + \delta\omega(x)) \le \delta\omega(x) + \delta|y|$.

Для того чтобы продолжить оценку (24) до требуемой в (vi), рассмотрим $|\mu(\xi)|$, где $|\xi - w| = 4er_1$. Для всех таких ξ с учетом (22) и (20)

$$|\operatorname{Re}\xi| \le |\operatorname{Re} w| + 4er_1 \le |x| + 2e\delta r \le |x| + r \le (1+2\delta)|x|,$$

$$\begin{aligned}|\operatorname{Im}\xi| \le |\operatorname{Im} w| + 4er_1 \le \left(1+\frac{\delta}{2}\right)|y| + 2e\delta r \le (1+\delta)|y| + 6\delta(|y| + \delta\omega(x))\\ \le 6\delta\omega(x) + (1+7\delta)|y| \le \omega(x) + 2|y|.\end{aligned}$$

Поэтому в силу (17)

$$|\mu(\xi)| \le C\exp(\gamma\omega((1+2\delta)x) + \gamma(\omega(x) + 2|y|)) \le C\exp(3\gamma\omega(x) + 2\gamma|y|).$$

Возвращаясь к (24) и учитывая (23), имеем $|\mu(\zeta)| \ge C^{-H_1(H+1)-H}e^{-\varepsilon_1\omega(x) - l_1|y|}$, где $\varepsilon_1 := \gamma(16(H_1+1)(H+1)+3H) < \varepsilon$, $l_1 := \gamma(12H_1(H+1)+2H) < \varepsilon$. Увеличив при необходимости r_0 так, чтобы $(\varepsilon - \varepsilon_1)\omega(t) \ge (H_1(H+1)+H)\ln C$, $t \ge r_0$, окончательно получаем, что $|\mu(\zeta)| \ge \exp(-\varepsilon\omega(x) - \varepsilon|y|)$ для любых $\zeta\in C_z$, что и требовалось. $\square$

Лемма 4. (vi)$\Rightarrow$(ii).

Доказательство. Покажем, что если для μ выполнено условие (vi), то μ является делителем пространства $H^1_{(\omega),I}$. Допустим, что $f\in H^1_{(\omega),I}$ и $\frac{f}{\mu}\in H(\mathbb{C})$. Тогда для функции f найдутся числа $q\in(0,1)$ и $C\ge 1$ такие, что

$$|f(w)| \le Ce^{q\omega(\operatorname{Re} w) + qa|\operatorname{Im} w|} \quad \text{для всех } w\in\mathbb{C}. \tag{25}$$

Возьмем $\varepsilon\in(0,1)$ так, чтобы $q_1 := q + 2\varepsilon\big(1 + a + \frac{1}{a}\big) < 1$. Пользуясь условием (3), выберем $\delta\in(0,\varepsilon)$, при котором $\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{\omega((1+4\delta)t)}{\omega(t)} < 1+\varepsilon$. По ε и δ найдем r_0 в соответствии с условием (vi). Считаем его настолько большим, что $\omega(t)\le t$, $t\ge r_0$, и

$$\omega((1+4\delta)t) \le (1+\varepsilon)\omega(t), \quad t \ge r_0. \tag{26}$$

Далее, поскольку $\mu\in M^1_{(\omega)}$, то μ имеет нулевой тип при порядке 1. Значит, μ — функция вполне регулярного роста при порядке 1. Следовательно, индикаторы h_f и $h_{\frac{f}{\mu}}$ целых функций f и $\frac{f}{\mu}$ совпадают. При этом в силу (25) и (α') имеем

$$h_f(\theta) = \limsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r} \le \limsup_{r\to\infty}\frac{\ln C + q\omega(r\cos\theta) + qar|\sin\theta|}{r} = qa|\sin\theta|.$$

Поэтому $h_{\frac{f}{\mu}}(\theta) \leq qa|\sin\theta|$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Увеличив, если это необходимо, r_0, получим, что

$$\ln\left|\frac{f(re^{i\theta})}{\mu(re^{i\theta})}\right| \leq (qa|\sin\theta| + \varepsilon\delta)r \quad \text{для всех } r \geq r_0,\ \theta \in [0, 2\pi). \tag{27}$$

Зафиксируем произвольную точку $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $\max\{|x|, |y|\} \geq r_0$ и рассмотрим два возможных случая.

1. Если $|y| \geq \delta|x|$, то $|z| \leq |x| + |y| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)|y|$, так что на основании (27)

$$\ln\left|\frac{f(z)}{\mu(z)}\right| \leq qa|y| + \varepsilon\delta|z| \leq (qa + \varepsilon(\delta + 1))|y| \leq a\left(q + \frac{2\varepsilon}{a}\right)|y| \leq q_1 a|y|. \tag{28}$$

2. Если $|y| < \delta|x|$, то $\max\{|x|, |y|\} = |x| \geq r_0$, так что точку z можно окружить окружностью C_z из (vi). Для всех $\zeta \in C_z$

$$|\mu(\zeta)| \geq e^{-\varepsilon\omega(x) - \varepsilon|y|}. \tag{29}$$

Далее, так как $|\zeta - z| \leq 2R_z \leq 2\delta\omega(x) + 2\delta|y|$, $\zeta \in C_z$, то

$$|\operatorname{Re}\zeta| \leq |x| + 2\delta\omega(x) + 2\delta|y| \leq |x| + 2\delta|x| + 2\delta^2|x| \leq (1 + 4\delta)|x|,$$

$$|\operatorname{Im}\zeta| \leq |y| + 2\delta\omega(x) + 2\delta|y| \leq 2\varepsilon\omega(x) + (1 + 2\varepsilon)|y|.$$

Тогда с учетом (26)

$$q\omega(\operatorname{Re}\zeta) + qa|\operatorname{Im}\zeta| \leq (q + \varepsilon + 2a\varepsilon)\omega(x) + a(q + 2\varepsilon)|y|.$$

Подставляя эту оценку в (25) и используя (29), получим, что для всех $\zeta \in C_z$

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\mu(\zeta)}\right| \leq C\exp\left((q + 2\varepsilon + 2a\varepsilon)\omega(x) + a\left(q + 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{a}\right)|y|\right) \leq Ce^{q_1\omega(x) + q_1 a|y|}.$$

Следовательно, по принципу максимума модуля

$$\left|\frac{f(z)}{\mu(z)}\right| \leq Ce^{q_1\omega(x) + q_1 a|y|}. \tag{30}$$

Объединяя случаи 1 и 2, заключаем, что оценка (30) верна для всех $z = x + iy$ с $\max\{|x|, |y|\} \geq r_0$. Значит, $\frac{f}{\mu} \in H^1_{(\omega), I}$, что завершает доказательство леммы. □

§ 4. Оператор свертки как дифференциальный оператор

Данный параграф посвящен выяснению тех условий на мультипликатор μ, при которых соответствующий оператор свертки представляет собой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Начнем с доказательства теоремы 2, которая дает достаточное условие в случае произвольного веса ω. Заметим, что вопрос о необходимости этого условия остается на настоящий момент открытым.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mu(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(-i)^k z^k$ удовлетворяет условию $(*)$. Сначала покажем, что для каждой функции $f \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ ряд

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}$ сходится абсолютно в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$. Зафиксируем $q \in (0,1)$, $l \in (0,a)$ и выберем $\varepsilon \in (0, 1-q)$. Поскольку $f \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$, то

$$|f^{(p)}(x)| \le |f|_{\omega,q+\varepsilon,l} \exp\left\{(q+\varepsilon)\varphi^*_\omega\left(\frac{p}{q+\varepsilon}\right)\right\}$$

при всех $p \in \mathbb{N}_0$ и $x \in \mathbb{R}$ с $|x| \le l$. Поэтому для любого $k \in \mathbb{N}_0$

$$|f^{(k)}|_{\omega,q,l} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\le l} \frac{|f^{(k+j)}(x)|}{e^{q\varphi^*_\omega(j/q)}}$$
$$\le |f|_{\omega,q+\varepsilon,l} \exp\sup\left\{(q+\varepsilon)\varphi^*_\omega\left(\frac{k+j}{q+\varepsilon}\right) - q\varphi^*_\omega\left(\frac{j}{q}\right)\right\}.$$

Как известно, функция φ^*_ω выпукла на $[0,\infty)$, так что

$$\varphi^*_\omega\left(\frac{k+j}{q+\varepsilon}\right) = \varphi^*_\omega\left(\frac{\varepsilon}{q+\varepsilon}\cdot\frac{k}{\varepsilon} + \frac{q}{q+\varepsilon}\cdot\frac{j}{q}\right) \le \frac{\varepsilon}{q+\varepsilon}\varphi^*_\omega\left(\frac{k}{\varepsilon}\right) + \frac{q}{q+\varepsilon}\varphi^*_\omega\left(\frac{j}{q}\right).$$

Следовательно, $|f^{(k)}|_{\omega,q,l} \le |f|_{\omega,q+\varepsilon,l} e^{\varepsilon\varphi^*_\omega(k/\varepsilon)}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Возьмем $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$ и найдем, пользуясь $(*)$, константу $C_1 > 0$ такую, что $|\mu(z)| \le C_1 e^{\varepsilon_1\omega(z)}$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда для коэффициентов a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, на основании неравенств Коши имеем

$$|a_k| \le \inf_{r>0}\left(\frac{1}{r^k}\max_{|z|=r}|\mu(z)|\right) \le C_1 \inf_{r>0}\left(\frac{1}{r^k}e^{\varepsilon_1\omega(r)}\right) = C_1 e^{-\varepsilon_1\varphi^*_\omega(k/\varepsilon_1)}.$$

Итак, при всех $k \in \mathbb{N}_0$

$$|a_k||f^{(k)}|_{\omega,q,l} \le C_1|f|_{\omega,q+\varepsilon,l} \exp\left\{\varepsilon\varphi^*_\omega\left(\frac{k}{\varepsilon}\right) - \varepsilon_1\varphi^*_\omega\left(\frac{k}{\varepsilon_1}\right)\right\}. \tag{31}$$

В силу [17, лемма 2.4] при каждом $\alpha \in (0,1)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varepsilon_1\varphi^*_\omega(x/\varepsilon_1) - \varepsilon\varphi^*_\omega(x/\varepsilon)}{x^\alpha} = \infty.$$

Значит, найдется $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\varepsilon_1\varphi^*_\omega\left(\frac{k}{\varepsilon_1}\right) - \varepsilon\varphi^*_\omega\left(\frac{k}{\varepsilon}\right) \ge 2\ln k$ для всех $k \ge k_0$. Возвращаясь к (31), получаем, что $|a_k||f^{(k)}|_{\omega,q,l} \le C_1|f|_{\omega,q+\varepsilon,l}\frac{1}{k^2}$, $k \ge k_0$. Из этого вытекают сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k||f^{(k)}|_{\omega,q,l}$ и оценка

$$\left|\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k f^{(k)}\right|_{\omega,q,l} \le C_1\frac{\pi^2}{6}|f|_{\omega,q+\varepsilon,l}.$$

Таким образом, дифференциальный оператор бесконечного порядка $f \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}$ действует непрерывно в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$. Учитывая теперь, что на системе $\{f_z = e^{-ixz} : z \in \mathbb{C}\}$ действие рассматриваемого дифференциального оператора и оператора T_μ совпадает, заключаем, что $T_\mu f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}$ для всех $f \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$. $\square$

В свете доказанной теоремы 2 назовем мультипликатор μ *сильным*, если он удовлетворяет условию $(*)$. Естественным образом возникает вопрос о существовании несильных мультипликаторов. Эта задача полностью решена в случае неквазианалитического веса. Соответствующий результат сформулирован в теореме 3, доказательство которой разбито на две леммы.

Лемма 5. *Если ω — строгий вес, то любой мультипликатор пространства $H^1_{(\omega),I}$ сильный.*

Доказательство. Покажем, что каждый мультипликатор μ из $M^1_{(\omega)}$ удовлетворяет соотношению $(*)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку ω — строгий вес, для него выполняется условие (ε_2) из § 1, в соответствии с которым существует $C > 0$ такое, что $P_\omega(z) \le C\omega(z) + C$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Так как $\mu \in M^1_{(\omega)}$, найдется $C_1 > 0$, при котором

$$|\mu(z)| \le C_1 \exp\left(\frac{\varepsilon}{C}\omega(z) + \frac{\varepsilon}{C}|\operatorname{Im} z|\right), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{32}$$

По принципу Фрагмена — Линделефа [27, 6.5.4] для любой точки $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $y \neq 0$ справедлива оценка

$$\ln|\mu(x+iy)| \le \frac{|y|}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\mu(t)|}{(t-x)^2 + y^2}\,dt + |y|d, \tag{33}$$

где $d := \limsup\limits_{r\to\infty} \frac{2}{\pi r}\int\limits_0^\pi \ln|\mu(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta$.

В силу (32) имеем

$$\frac{|y|}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\mu(t)|}{(t-x)^2+y^2}\,dt \le \ln C_1 + \frac{\varepsilon}{C}\frac{|y|}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt$$
$$= \ln C_1 + \frac{\varepsilon}{C}P_\omega(x+iy) \le \varepsilon\omega(x+iy) + \varepsilon + \ln C_1.$$

С другой стороны, поскольку

$$\frac{2}{\pi r}\int\limits_0^\pi \ln|\mu(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta \le \frac{2}{\pi r}\int\limits_0^\pi \left(\ln C_1 + \frac{\varepsilon}{C}\omega(r) + \frac{\varepsilon}{C} r\sin\theta\right)\sin\theta\,d\theta$$
$$= \frac{4\ln C_1}{\pi r} + \frac{4\varepsilon}{C}\frac{\omega(r)}{r} + \frac{\varepsilon}{C},$$

с учетом условия (α') заключаем, что $d \le \frac{\varepsilon}{C}$. Следовательно, $d \le 0$.

Возвращаясь к (33), окончательно получим, что $|\mu(z)| \le C_1 e^{\varepsilon} e^{\varepsilon\omega(z)}$, причем это неравенство выполняется для всех $z \in \mathbb{C}$ из-за непрерывности функций. □

Лемма 6. *Если ω — нестрогий неквазианалитический вес, то в $M^1_{(\omega)}$ имеются мультипликаторы, не являющиеся сильными.*

Доказательство. 1. Поскольку вес ω нестрогий, условие (ε_1) из § 1 нарушено, т. е. $\limsup\limits_{y\to\infty} \frac{P_\omega(iy)}{\omega(y)} = \infty$. Учитывая неравенство (4), заключаем, что

$$\limsup_{y\to\infty} \frac{y}{\pi\omega(y)}\int\limits_y^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt = \infty.$$

Возьмем $y_1 \ge 1$ так, чтобы

$$\frac{y_1}{\pi}\int\limits_{y_1}^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt > \omega(y_1).$$

Затем выберем $y_2 > y_1 + 1$, для которого одновременно

$$\frac{y_1}{\pi}\int\limits_{y_1}^{y_2}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt > \omega(y_1), \quad \frac{y_2}{\pi}\int\limits_{y_2}^{\infty}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt > 2^2\omega(y_2).$$

Продолжая этот процесс далее, получим возрастающую последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{y_n}{\pi}\int\limits_{y_n}^{y_{n+1}}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt > n^2\omega(y_n). \tag{34}$$

2. Положим

$$g(t) := \begin{cases} \omega(t), & t \in [0, y_2], \\ \frac{1}{n}\omega(t), & t \in (y_n, y_{n+1}],\ n \geq 2. \end{cases}$$

Поскольку $g(t) = o(\omega(t))$ при $t \to \infty$, по лемме 1.7 из [7] найдется функция $\sigma(t)$, удовлетворяющая $(\tilde{\alpha})$, (β), (γ), (δ) и такая, что $g(t) = o(\sigma(t))$ и $\sigma(t) = o(\omega(t))$, $t \to \infty$.

Рассмотрим функцию $P_\sigma(z)$. Будем для удобства предполагать, что $g(t) \leq \sigma(t)$ при всех $t \geq 0$. Тогда на основании (5) и (34) имеем

$$P_\sigma(iy_n) \geq \frac{y_n}{\pi}\int\limits_{y_n}^{\infty}\frac{\sigma(t)}{t^2}\,dt \geq \frac{y_n}{\pi}\int\limits_{y_n}^{\infty}\frac{g(t)}{t^2}\,dt \geq \frac{1}{n}\frac{y_n}{\pi}\int\limits_{y_n}^{y_{n+1}}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt > n\omega(y_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку в силу условия (2) можно считать, что $\omega(y+1) \leq 2\omega(y)$ при всех $y \geq y_1$, при каждом $n \in \mathbb{N}$ для $w \in [0,1]$

$$P_\sigma(i(y_n + w)) \geq P_\sigma(iy_n) > n\omega(y_n) \geq \frac{n}{2}\omega(y_n + 1) \geq \frac{n}{2}\omega(y_n + w). \tag{35}$$

С другой стороны, так как для P_σ выполняется аналог неравенства (6) и $\sigma(x) = o(\omega(x))$, а $P_\sigma(iy) = o(y)$, то

$$P_\sigma(x + iy) = o(\omega(x) + y), \quad x + iy \to \infty. \tag{36}$$

Итак, $P_\sigma(z)$ — непрерывная субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция, удовлетворяющая (35) и (36).

3. В соответствии с известным результатом Р. С. Юлмухаметова о приближении субгармонических функций целыми [28, теорема 5] имеется целая функция $\mu(z)$ такая, что вне некоторого исключительного множества, которое может быть покрыто кружками $e_j = \{z : |z - z_j| < r_j\}$ с конечной общей суммой радиусов $\sum\limits_j r_j$, выполняется оценка

$$|P_\sigma(z) - \ln|\mu(z)|| \leq C_1 \ln|z|.$$

На основании [29, лемма 1, замечание 2] кружки e_j можно считать попарно не пересекающимися.

Покажем, что μ принадлежит $M^1_{(\omega)}$ и не удовлетворяет условию $(*)$. Понятно, что содержательным является только случай, когда множество кружков e_j бесконечно и $|z_j| \to \infty$. Имеем $|\mu(z)| \leq \exp(P_\sigma(z) + C_1 \ln|z|)$, $z \notin \bigcup\limits_j e_j$. Тогда с учетом (36) и (γ) для любого $\varepsilon \in (0,1)$ найдется $C_2 > 0$, при котором

$|\mu(z)| \le C_2 \exp(\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + \varepsilon|\operatorname{Im} z|)$ для $z \notin \bigcup_j e_j$. Отсюда с помощью стандартных рассуждений, основанных на малости радиусов r_j кружков e_j и свойстве (2) функции ω, по принципу максимума модуля получаем, что эта же оценка верна во всей плоскости при соответствующем увеличении C_2. Значит, $\mu \in M^1_{(\omega)}$.

С другой стороны, $|\mu(z)| \ge \exp(P_\sigma(z) - C_1 \ln|z|)$, $z \notin \bigcup_j e_j$. В силу малости r_j на отрезках $[iy_n, i(y_n+1)]$ имеются точки $i\tilde{y}_n$, не принадлежащие $\bigcup_j e_j$, так что на основании (35) $|\mu(i\tilde{y}_n)| \ge \exp\left(\frac{n}{2}\omega(\tilde{y}_n) - C_1 \ln \tilde{y}_n\right)$. Очевидно, это означает, что μ не может удовлетворять условию $(*)$. $\square$

В заключение приведем пример сильного мультипликатора μ пространства $H^1_{(\omega),I}$, который не является его делителем и соответственно порождает уравнение свертки — дифференциальное уравнение бесконечного порядка, которое не при любой правой части g из $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ имеет решение в этом классе. Заметим, что данный пример построен в [14] и использовался для более грубых пространств $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$.

Пример 1. Пусть $\omega(t) = t^\rho$, $0 < \rho < 1$,

$$\mu(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{x_j}\right)^{p_j}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ и $\{p_j\}_{j=1}^\infty$ — возрастающие последовательности соответственно положительных и натуральных чисел, удовлетворяющие условиям

$$x_1 \ge 2^{\frac{1}{1-\rho}} + 1; \quad p_j \ge \frac{x_j^\rho}{\ln x_j},\ j \in \mathbb{N}; \quad x_j \ge 2^{j+1} p_j x_k,\ j \ge k+1,\ k \in \mathbb{N}; \tag{37}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{x_k^\rho} = 0; \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{k-1} p_j}{p_k} = 0. \tag{38}$$

Примерами последовательностей, удовлетворяющих перечисленным условиям, служат

$$x_1 = 2^{\frac{1}{1-\rho}} + 1, \quad x_{j+1} = (2^{j+2} x_j)^{\frac{1}{1-\rho}}, \quad p_j = \left[\frac{x_j^\rho}{\sqrt{\ln x_j}}\right] + 1, \quad j \in \mathbb{N},$$

где, как обычно, $[a]$ обозначает целую часть числа a.

Проверим, что указанная функция μ является сильным мультипликатором $H^1_{(\omega),I}$. Из (38) вытекает, что $\sum_{j=1}^{k} p_j = o(x_k^\rho)$, $k \to \infty$. Следовательно, функция μ имеет при порядке ρ минимальный тип, так что μ удовлетворяет $(*)$ с $\omega(t) = t^\rho$.

Покажем, что утверждение (iv) теоремы 1 нарушено. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, возьмем произвольное $w \in \mathbb{C}$ с $|w - x_k| \le x_k^\rho$ и рассмотрим

$$\ln|\mu(w)| = \sum_{j=1}^{k-1} p_j \ln\left|1 - \frac{w}{x_j}\right| + p_k \ln\left|1 - \frac{w}{x_k}\right| + \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j \ln\left|1 - \frac{w}{x_j}\right|. \tag{39}$$

Во-первых, $p_k \ln|1 - \frac{w}{x_k}| = p_k \ln \frac{|w-x_k|}{x_k} \le p_k(\rho - 1)\ln x_k$. Во-вторых,

$$\sum_{j=1}^{k-1} p_j \ln\left|1 - \frac{w}{x_j}\right| \le \sum_{j=1}^{k-1} p_j \ln\left(1 + \frac{|w|}{x_j}\right) \le \sum_{j=1}^{k-1} p_j \ln\left(1 + \frac{2x_k}{x_j}\right) \le \sum_{j=1}^{k-1} p_j \ln x_k.$$

В силу условия (38) найдется $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum\limits_{j=1}^{k-1} p_j < \frac{1-\rho}{2} p_k$ при всех $k \geq k_0$. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{k-1} p_j \ln|1 - \frac{w}{x_j}| < \frac{1-\rho}{2} p_k \ln x_k.$$

Наконец, пользуясь третьим условием в (37), получаем, что

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} p_j \ln\left|1 - \frac{w}{x_j}\right| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j \ln\left(1 + \frac{|w|}{x_j}\right) \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j \frac{|w|}{x_j}$$
$$\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j \frac{2x_k}{x_j} \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq 1.$$

Возвращаясь к (39) и применяя второе неравенство из (37), при $k \geq k_0$ имеем

$$\ln|\mu(w)| < -\frac{1-\rho}{2} p_k \ln x_k + 1 \leq -\frac{1-\rho}{2} x_k^{\rho} + 1.$$

Следовательно, увеличив, если это необходимо, k_0, можно считать, что

$$\ln|\mu(w)| < -\frac{1-\rho}{3} x_k^{\rho} \leq -\frac{1-\rho}{3} \left(\frac{|w|}{2}\right)^{\rho}, \quad k \geq k_0.$$

Итак, при $k \geq k_0$ для всех w с $|w - x_k| \leq x_k^{\rho}$

$$|\mu(w)| < e^{-\varepsilon_0 |w|^{\rho}},$$

где $\varepsilon_0 = \frac{1-\rho}{3 \cdot 2^{\rho}}$. Значит, условие (iv) теоремы 1 нарушено. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ehrenpreis L.* Solution of some problems of division // Amer. J. Math. 1960. V. 82. P. 522–588.
2. *Hörmander L.* On the range of convolution operators // Ann. Math. 1962. V. 76. P. 148–170.
3. *Chin-Cheng Chou.* La transformation de Fourier complexe et l'équation de convolution. Berlin; New York: Springer-Verl., 1973. (Lect. Notes Math.; V. 325).
4. *Коробейник Ю. Ф.* Разрешимость уравнений свертки в некоторых классах аналитических функций // Мат. заметки. 1991. Т. 49, № 2. С. 76–83.
5. *Напалков В. В., Рудаков И. А.* Оператор свертки в пространстве вещественно аналитических функций // Мат. заметки. 1991. Т. 49, № 3. С. 57–65.
6. *Meise R., Taylor B. A., Vogt D.* Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions // Indiana Univ. Math. J. 1987. V. 36, N 4. P. 729–756.
7. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results Math. 1990. V. 17. P. 206–237.
8. *Meise R., Taylor B. A., Vogt D.* Existence of fundamental solutions and surjectivity of convolution operators on classes of ultradifferentiable functions // Proc. London Math. Soc. 1990. V. 61. P. 344–370.
9. *Momm S.* Closed principal ideals in nonradial Hörmander algebras // Arch. Math. 1992. V. 58. P. 47–55.
10. *Bonet J., Galbis A., Meise R.* On the range of convolution operators on non-quasianalytic ultradifferentiable functions // Stud. Math. 1997. V. 126, N 2. P. 171–198.
11. *Bonet J., Galbis A., Momm S.* Nonradial Hörmander algebras of several variables and convolution operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2001. V. 353, N 6. P. 2275–2291.
12. *Meyer T.* Surjectivity of convolution operators on spaces of ultradifferentiable functions of Roumieu type // Stud. Math. 1997. V. 125, N 2. P. 101–129.
13. *Абанин А. В., Абанина Д. А.* Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций // Владикавк. мат. журн. 2010. Т. 12, № 3. С. 3–21.

14. *Абанина Д. А.* Разрешимость уравнений свертки в классах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа // Мат. форум. Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2009. Т. 3. Исследования по мат. анализу. С. 34–47.

15. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Almost subadditive weight functions form Braun–Meise–Taylor theory of ultradistributions // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 363. P. 296–301.

16. *Абанин А. В., Филипьев И. А.* Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 485–500.

17. *Abanina D. A.* On Borel's theorem for spaces of ultradifferentiable functions of mean type // Results Math. 2003. V. 44. P. 195–213.

18. *Meise R., Taylor B. A.* Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type // Ark. Mat. 1988. V. 26, N 2. P. 265–287.

19. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 4. С. 97–131.

20. *Neymark M.* On the Laplace transform of functionals on classes of infinitely differentiable functions // Ark. Mat. 1968. V. 8. P. 577–594.

21. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.

22. *Коробейник Ю. Ф.* О мультипликаторах весовых функциональных пространств // Anal. Math. 1989. V. 15, N 2. P. 105–114.

23. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.

24. *Baernstein A. II.* Representation of holomorphic functions by boundary integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 160. P. 27–37.

25. *Абанин А. В.* Густые пространства и аналитические мультипликаторы // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. 1994. № 4. С. 3–10.

26. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.

27. *Boas R. P.* Entire functions. New York: Acad. Press, 1954.

28. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций // Anal. Math. 1985. V. 11, N 3. P. 257–282.

29. *Красичков-Терновский И. Ф.* Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 4. С. 531–546.

Статья поступила 15 июня 2011 г.

Абанина Дарья Александровна
Южный федеральный университет,
факультет математики, механики и компьютерных наук,
ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону 344090;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
abanina@math.rsu.ru