Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С S–ДОБАВЛЯЕМЫМИ p–ПОДГРУППАМИ

Н. Ян, В. Го, О. Л. Шеметкова

Аннотация. Пусть G — конечная группа. *S-квазинормальной* называют подгруппу, перестановочную со всеми силовскими подгруппами из G. Через B_{sG} обозначают наибольшую S-квазинормальную подгруппу группы G, содержащуюся в B. Подгруппа B называется *S-добавляемой* в G, если найдется подгруппа T такая, что $G = BT$ и $B \cap T \leq B_{sG}$. Подгруппа L называется *кватернионной* в G, если G имеет секцию A/B, изоморфную группе кватернионов порядка 8, причем $L \leq A$ и $L \cap B = 1$. Статья посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема. *Пусть E — нормальная подгруппа из G и p — простой делитель $|E|$ такой, что $(p-1, |E|) = 1$. Пусть P — силовская p-подгруппа из E. Предположим, что S-добавляемыми в G являются либо все максимальные подгруппы из P, не имеющие p-сверхразрешимых добавлений в G, либо все подгруппы порядка p и кватернионные подгруппы порядка 4 из P, не имеющие p-сверхразрешимых добавлений в G. Тогда E p-нильпотентна и все ее G-главные p-факторы циклические.*

Ключевые слова: конечная группа, S-квазинормальная подгруппа, циклический главный фактор.

1. Введение

В статье рассматриваются только конечные группы, G обозначает некоторую группу.

Если подгруппа A группы G перестановочна с каждой силовской подгруппой из G, то A называется *S-квазинормальной в G*. Это понятие, введенное Кегелем [1], оказалось удобным инструментом в изучении групп (см. [2–7]). Если $B \leq G$, то B_{sG} — S-ядро подгруппы B в G, т. е. подгруппа, порожденная всеми теми подгруппами из B, которые S-квазинормальны в G. Ясно, что B_{sG} S-квазинормальна в G. А. Н. Скиба называет подгруппу B *S-добавляемой* в G (см. [8]), если найдется подгруппа T такая, что $G = BT$ и $B \cap T \leq B_{sG}$. Обобщая результаты статей [2–7], А. Н. Скиба доказал следующую теорему.

Теорема 1.1 [8, теорема A]. *Пусть E — нормальная подгруппа группы G. Предположим, что для каждой нециклической силовской подгруппы P из E выполняется следующее условие: либо все максимальные подгруппы из P, либо все циклические подгруппы из P простого порядка и порядка 4 S-добавляемы в G. Тогда каждый G-главный фактор подгруппы E является циклическим.*

В настоящей статье мы доказываем следующий результат, усиливающий теорему 1.

Исследования второго автора поддержаны NNSF-грантом Китая (грант # 11071229).

Теорема 1.2. *Пусть E — нормальная подгруппа из G и p — простой делитель $|E|$ такой, что $(p-1, |E|) = 1$. Пусть P — силовская p-подгруппа из E. Предположим, что S-добавляемыми в G являются либо все максимальные подгруппы из P, не имеющие p-сверхразрешимых добавлений в G, либо все подгруппы порядка p и кватернионные подгруппы порядка 4 из P, не имеющие p-сверхразрешимых добавлений в G. Тогда E p-нильпотентна и все ее G-главные p-факторы циклические.*

Подгруппу L из P называем *кватернионной в P* (см. [9]), если P имеет секцию A/B, изоморфную группе кватернионов порядка 8, причем $L \leq A$ и $L \cap B = 1$.

Следствие 1.2.1. *Пусть $E \trianglelefteq G$. Пусть P — силовская 2-подгруппа из E. Предположим, что все подгруппы порядка 2 и кватернионные подгруппы порядка 4 из P S-добавляемы в G. Тогда E 2-нильпотентна и $E/O_{2'}(E)$ содержится в гиперцентре группы $G/O_{2'}(E)$.*

Следствие 1.2.2. *Пусть E — нормальная подгруппа из G. Предположим, что для каждой нециклической силовской подгруппы P из E выполнено следующее условие: S-добавляемыми в G являются либо все максимальные подгруппы из P, не имеющие $\pi(P)$-сверхразрешимых добавлений в G, либо все подгруппы простого порядка и кватернионные подгруппы порядка 4 из P, не имеющие $\pi(P)$-сверхразрешимых добавлений в G. Тогда E сверхразрешима и все ее G-главные факторы циклические.*

Следствие 1.2.3. *Пусть E — нормальная подгруппа из G. Предположим, что для каждой нециклической силовской подгруппы P из E выполнено следующее условие: S-добавляемыми в G являются либо все максимальные подгруппы из P, либо все подгруппы простого порядка и кватернионные подгруппы порядка 4 из P. Тогда E сверхразрешима и все ее G-главные факторы циклические.*

Теорема 1.1 непосредственно вытекает из следствия 1.2.3. Отметим еще, что наши результаты остаются новыми и в случае $E = G$. Согласно [10] группа нечетного порядка сверхразрешима, если каждая ее подгруппа простого порядка нормальна. Из теоремы 1.2 вытекает, что в каждой несверхразрешимой группе обязательно найдется либо не S-добавляемая подгруппа простого порядка, либо не S-добавляемая кватернионная подгруппа порядка 4.

2. Предварительные сведения

В этом разделе приведем результаты, используемые при доказательстве теоремы 1.2. Напомним, что подгруппа T называется *добавлением к подгруппе* L в G, если $G = LT$; $O^p(G)$ — это подгруппа, порожденная всеми p'-элементами из G. Через H_G обозначается ядро подгруппы H в G, т. е. наибольшая G-инвариантная подгруппа, содержащаяся в H. *Группа Шмидта* — это ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Как обычно, через $\pi(G)$ обозначается множество всех различных простых делителей $|G|$. Группу называют *p-сверхразрешимой*, если она p-разрешима и ее главные p-факторы циклические.

Лемма 2.1. *Пусть p — простой делитель порядка группы G такой, что $(p-1, |G|) = 1$.*

(1) *Если $M \leq G$ и $|G : M| = p$, то $M \triangleleft G$.*

(2) *Если силовская p-подгруппа в G циклическая, то G p-нильпотентна.*

(3) *Если G p-сверхразрешима, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. Случай, когда p — наименьший простой делитель G, хорошо известен (см. [11, 1A.1, следствие 5.14; 12, п. VI.9.2]). Утверждения (2) и (3) легко следуют из теоремы Фробениуса о существовании p-замкнутой $\{p,q\}$-группы Шмидта у не p-нильпотентной группы.

Докажем (1) в случае $p>2$. Мы можем считать, что ядро подгруппы M в G равно 1. Значит, G примитивна и по теореме A.15.2 из [13] имеет единственную минимальную нормальную подгруппу L (заметим, что G разрешима, поскольку имеет нечетный порядок). Так как $G=LM$ и $L\cap M=1$, то $|L|=p$. Ввиду того, что L самоцентрализуема, получается, что $|M|$ делит $p-1$. Это противоречит условию $(p-1,|G|)=1$. □

Лемма 2.2 [1; 14, лемма 2.10]. *Пусть $H\le K\le G$.*

(1) *Если H S-квазинормальна (S-добавляема) в G, то H S-квазинормальна (S-добавляема) в K.*

(2) *Пусть H нормальна в G. Тогда K/H S-квазинормальна (S-добавляема) в G/H тогда и только тогда, когда K S-квазинормальна (S-добавляема) в G.*

(3) *Если H S-квазинормальна в G, то H субнормальна в G.*

(4) *Если A и B S-квазинормальны в G, то $A\cap B$ S-квазинормальна в G.*

(5) *Пусть $H\trianglelefteq G$ и E S-добавляема в G. Если $(|H|,|E|=1)$, то HE/H S-добавляема в G/H.*

Лемма 2.3 [15]. *Если p-подгруппа H S-квазинормальна в группе G, то $H\le O_p(G)$ и $O^p(G)\le N_G(H)$.*

Лемма 2.4 [16, теорема 26.1; 13, теорема VII.6.18]. *Если G — группа Шмидта, то*

(1) *G является p-замкнутой $\{p,q\}$-группой для некоторых простых чисел p,q;*

(2) *экспонента силовской p-подгруппы из G равна p или 4;*

(3) *$p^n\equiv 1 \pmod q$, где n — порядок числа p по модулю q.*

Лемма 2.5 [9, лемма 3]. *Пусть $R\trianglelefteq G$ и $R/O_{p'}(R)$ не содержится в гиперцентре группы $G/O_{p'}(R)$. Тогда G обладает p-замкнутой подгруппой Шмидта S со следующим свойством: силовская p-подгруппа $S_p\neq 1$ из S содержится в R.*

Лемма 2.6 [9, лемма 4]. *Пусть S — группа Шмидта с неабелевой нормальной силовской 2-подгруппой P. Тогда всякая циклическая подгруппа порядка 4 является кватернионной в P. В частности, если $|Z(P)|=2$, то всякий элемент порядка 4 из S содержится в подгруппе, изоморфной группе кватернионов Q_8.*

Лемма 2.7. *Пусть P — нециклическая силовская p-подгруппа из G, p — простой делитель $|G|$ такой, что $(p-1,|G|)=1$. Если каждая максимальная подгруппа из P имеет p-нильпотентное добавление в G, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. Случай $p=2$ рассмотрен в [7, лемма 2.10]. Предположим, что G не p-нильпотентна и $p>2$. Тогда G разрешима, поскольку имеет нечетный порядок. Пусть M_1 — максимальная подгруппа из P. По условию $G=M_1T_1$, где T_1 p-нильпотентна. Пусть M_2 — максимальная подгруппа из P, содержащая $P\cap T_1$. Тогда $G=M_2T_2$, где T_2 p-нильпотентна. Мы можем считать, что T_1 и T_2 совпадают с нормализаторами p'-холловых подгрупп из G. Но тогда $T_2=T_1^x$ для некоторого $x\in P$. Таким образом, $G=M_1T_1=M_2T_1^x=M_2T_1$. Отсюда следует, что $P=M_1(P\cap T_1)=M_2(P\cap T_1)=M_2$; противоречие. □

Следующий результат является следствием теоремы 3.1 из [17].

Лемма 2.8. *Пусть $H \trianglelefteq G$, p — нечетное простое число. Если каждая подгруппа порядка p из H нормальна в G, то H p-сверхразрешима и каждый G-главный p-фактор подгруппы H является циклическим.*

Лемма 2.9 [12, п. VI.8.1; 18, лемма 15.4]. *Пусть H — нормальная p-подгруппа группы G. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$G/C_G(H)$ является расширением p-группы с помощью абелевой группы экспоненты, делящей $p-1$;*

(2) *каждый G-главный фактор подгруппы H является циклическим.*

Лемма 2.10 [12, п. IV.5.12; 19, теорема 5.3.10]. *Пусть A — p'-группа автоморфизмов p-группы P, $p > 2$. Если A действует тривиально на $\Omega_1(P)$, то $A = 1$.*

Лемма 2.11 [20, лемма 3.2]. *Пусть $G = AB$, A — циклическая 2-подгруппа, $B \neq G$. Тогда $G = AM$, где M — нормальная подгруппа индекса 2.*

3. Доказательство теоремы 1.2

Будем вести доказательство теоремы 1.2 в два приема, разделив ее на две теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть E — нормальная подгруппа из G и p — простой делитель $|E|$ такой, что $(p-1, |E|) = 1$. Пусть P — силовская p-подгруппа из E. Предположим, что S-добавляемыми в G являются все максимальные подгруппы из P, не имеющие p-сверхразрешимых добавлений в G. Тогда E p-нильпотентна и все ее G-главные p-факторы циклические.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна, и рассмотрим контрпример (G, E), для которого $|G| + |E|$ минимально. Доказательство состоит из нескольких шагов.

(1) Подгруппа P не является циклической.

Это вытекает из леммы 2.1.

(2) $O_{p'}(E) = 1$.

Действительно, ввиду леммы 2.2 условие теоремы выполняется для пары $(G/O_{p'}(E), E/O_{p'}(E))$. Поэтому в случае $O_{p'}(E) \neq 1$ из минимальности выбора пары (G, E) следует, что для пары $(G/O_{p'}(E), E/O_{p'}(E))$ теорема верна, а значит, она верна и для (G, E).

(3) Если $E \neq G$, то $E = P$.

Пусть $E \neq G$. В силу леммы 2.2 условие теоремы выполняется для (E, E). Следовательно, E p-нильпотентна. Теперь из (2) вытекает, что $E = P$.

(4) $O_{p'}(G) = 1$.

Предположим, что $V = O_{p'}(G) \neq 1$. Тогда из (2) и (3) имеем $E = P$. Вследствие леммы 2.2 условие теоремы выполняется для $(G/V, EV/V)$. Таким образом, ввиду минимальности (G, E) теорема для $(G/V, EV/V)$ верна, а значит, верна и для (G, E).

(5) $|P| > p^2$.

Допустим, что это неверно. Тогда ввиду (1) $|P| = p^2$. Рассмотрим сначала случай, когда $(p-1, |G|) = 1$. Из леммы 2.1 следует, что подгруппы порядка p не имеют дополнений и p-сверхразрешимых добавлений. Применяя леммы 2.1 и 2.5 и теорему Фробениуса, находим в G p-замкнутую подгруппу Шмидта $S = PQ$, где Q — q-группа для некоторого простого $q \neq p$. Каждая подгруппа порядка

p из P S-добавляема в G, а значит, ввиду леммы 2.2 и в S. Очевидно, из S-добавляемости подгрупп порядка p из S следует их S-квазинормальность. Так как $S = O^p(S)$, по лемме 2.3 подгруппы порядка p нормальны в S, т. е. S p-сверхразрешима и по лемме 2.1 p-нильпотентна, что невозможно.

Теперь предположим, что $(p-1, |G|) \neq 1$. Тогда $E \neq G$ и согласно (3) имеем $E = P$. Если $G = HT$, $|H| = p$ и $H \cap T = 1$, то $P \cap T$ имеет порядок p и нормальна в G. Поэтому из условия следует, что все подгруппы порядка p S-квазинормальны в G. Применяя лемму 2.3, видим, что индекс нормализатора любой подгруппы порядка p делится на p. Значит, число всех подгрупп порядка p в G делится на p, что противоречит [12, п. I.7.2].

(6) Если $E = P$, то E не является минимальной нормальной подгруппой в G.

Допустим, что $E = P$ — минимальная нормальная подгруппа в G. Пусть L — максимальная подгруппа из P, имеющая добавление T в G. Если $T \neq G$, то из $G = LT = PT$ следует $P = L(P \cap T)$, причем $P \cap T \neq 1$ нормальна в G, что приводит к противоречию. Если $T = G$, то T не p-сверхразрешима и по условию $L \cap T = L = L_{sG}$. Значит, все максимальные подгруппы из P S-квазинормальны в G. Применяя лемму 2.3, видим, что индекс нормализатора любой максимальной подгруппы из P делится на p. Значит, число всех подгрупп индекса p в P делится на p, что противоречит [12, п. I.7.2].

(7) Если N — минимальная нормальная p-подгруппа в G и $N \leq E$, то теорема для $(G/N, E/N)$ верна.

Ввиду леммы 2.2 это утверждение очевидно.

(8) $E = G$.

Предположим, что $E \neq G$. Согласно (3) имеем $E = P$. Если $\Phi(P) \neq 1$, то ввиду (7) все G-главные факторы между P и $\Phi(P)$ циклические. По теореме П. Шмида [13, теорема IV.6.7] все G-главные факторы между $\Phi(P)$ и 1 циклические. Поэтому $\Phi(P) = 1$, т. е. P является элементарной абелевой. В силу (7) G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу L, содержащуюся в P. Ввиду (6) и (7) $L \neq P$ и $|L| \neq p$. Пусть M — максимальная подгруппа из P. Допустим, что M обладает p-сверхразрешимым добавлением T в G. Тогда ясно, что $T \neq G$ и $T \cap P$ является неединичной нормальной подгруппой в G. Поэтому $L \leq T \cap P \leq T$, а поскольку T p-сверхразрешима, то минимальная нормальная подгруппа из T, содержащаяся в $T \cap P$, будет циклической нормальной подгруппой группы G; противоречие. Таким образом, будем иметь в виду, что максимальные подгруппы из P не обладают p-сверхразрешимыми добавлениями.

Пусть L_1 — максимальная подгруппа из L. Покажем, что L_1 S-квазинормальна в G. В P найдется, очевидно, такая максимальная подгруппа V, что $V \cap L = L_1$ (это возможно, так как P элементарная абелева). По условию V S-добавляема в G, т. е. $G = VT$ и $V \cap T \leq V_{sG}$. Предположим сначала, что $T = G$. Тогда $V = V_{sG}$ S-квазинормальна в G. Ввиду леммы 2.2 $V \cap L = L_1$ S-квазинормальна в G. Пусть теперь $T \neq G$. Тогда $T \cap P$ — неединичная нормальная подгруппа в G. Ясно, что L содержится в $T \cap P$. Но тогда $L_1 \leq V \cap T \leq V_{sG}$ и теперь из

$$L_1 \leq L \cap V_{sG} \leq L \cap V = L_1$$

ввиду леммы 2.2 следует, что $L_1 = L \cap V_{sG}$ S-квазинормальна. Таким образом, все максимальные подгруппы из L S-квазинормальны в G. Так как теорема для пары (G, L) верна, то $|L| = p$. Полученное противоречие доказывает (8).

(9) В P имеется максимальная подгруппа, не обладающая p-сверхразрешимыми добавлениями в G.

Это непосредственно следует из лемм 2.1 и 2.7.

(10) G p-разрешима.

Если $P_G \neq 1$, то согласно (7) теорема для G/P_G верна, а значит, G p-разрешима. Рассмотрим случай $P_G = 1$. Ввиду леммы 2.3 неединичные подгруппы из P не являются S-квазинормальными в G. Согласно (9) в P найдется максимальная подгруппа M, не имеющая p-сверхразрешимых добавлений в G. Значит, $M_{sG} = 1$. По условию существует такая подгруппа $T \leq G$, что $G = MT$ и $M \cap T = M_{sG} = 1$. Но тогда $|T_p| = p$ и по лемме 2.1 подгруппа T p-нильпотентна; противоречие. Утверждение (10) доказано.

Окончание доказательства теоремы 3.1. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. В силу (4) и (10) $N \subseteq P$. Следовательно, ввиду (7) G/N p-нильпотентна и $|N| > p$. Очевидно, $O_p(G) = N = F(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Стало быть, $G = NM$ для некоторой p-нильпотентной максимальной подгруппы M из G. Заметим еще, что $N \neq P$, так как при $N = P$ теорема верна для пары (G, N), а значит, и для (G, E). Понятно, что все максимальные подгруппы из P, содержащие N, имеют p-нильпотентные добавления в G. Согласно (9) P имеет максимальную подгруппу V, не содержащую N и не имеющую p-сверхразрешимых добавлений в G. По условию V S-добавляема в G, т. е. существует подгруппа T в G такая, что $G = VT$ и $V \cap T \leq V_{sG}$. Положим $V_{sG} = L$. Если $L = 1$, то $|T|_p = p$ и по лемме 2.1 T p-нильпотентна; противоречие. Следовательно, $L \neq 1$ и $V \cap T \leq L \leq O_p(G) = N$. По лемме 2.3 $O^p(G) \leq N_G(L)$. Таким образом, $L \leq V \cap N$ и $L \leq L^G = L^{O^p(G)P} = L^P \leq (V \cap N)^P = V \cap N \leq N$. Получается, что $L^G = V \cap N = N$ и $N \subseteq V$; противоречие. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть E — нормальная подгруппа из G и p — простой делитель $|E|$ такой, что $(p-1, |E|) = 1$. Пусть P — силовская p-подгруппа из E. Предположим, что выполнены два условия:*

(1) *все подгруппы порядка p из P, не имеющие p-сверхразрешимых добавлений в G, S-добавляемы в G;*

(2) *все кватернионные подгруппы порядка 4 из P, не имеющие p-сверхразрешимых добавлений в G, S-добавляемы в G.*

Тогда E p-нильпотентна и все ее G-главные p-факторы циклические.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и пара (G, E) представляет собой контрпример, для которого $|G| + |E|$ минимально. Так же, как и при доказательстве теоремы 3.1, легко проверить справедливость следующих утверждений.

(1) $O_{p'}(G) = 1$.

(2) Если $E \neq G$, то $E = P$.

(3) $(p-1, |G|) = 1$.

Предположим, что (3) неверно. Тогда ввиду (2) $E = P$ и $p > 2$. Из минимальности выбора пары (G, E) получаем, что G не имеет циклических главных факторов вида E/V. Рассмотрим подгруппу L порядка p из P. Допустим, что L имеет p-сверхразрешимое добавление T в G. Понятно, что $T \neq G$. Тогда $G = LT = PT$, откуда следует, что $P \cap T$ нормальна в G и имеет индекс p в P, что невозможно. По условию L S-добавляема в G, т. е. найдется такая подгруппа D, что $G = LD$ и $L \cap D \leq L_{sG}$. Если $L \cap D = 1$, то, как и выше, $D \cap P$ нормальна в G и имеет индекс p в P. Остается принять, что $L \cap D = L = L_{sG}$, т. е. L S-квазинормальна в G. Итак, все подгруппы порядка p S-квазинормальны в G. Если $O^p(G) = G$, то ввиду леммы 2.3 все подгруппы порядка p будут нормальны в G и тогда по лемме 2.8 все G-главные факторы группы E будут циклическими. Значит, $O^p(G) \neq G$. Если P не содержится в $O^p(G)$, то P не содержится и в некоторой максимальной нормальной подгруппе M индекса p и тогда $MP = G$ и $M \cap P$ является G-инвариантной подгруппой, имеющей индекс p в P. Таким образом, $P \leq O^p(G) \neq G$.

Пусть H — произведение всех подгрупп порядка p из P. Учитывая лемму 2.3, видим, что H нормальна в G и является элементарной абелевой. Так как P нециклическая и $p > 2$, то $|H| > p$. Предположим, что $H \neq P$. Поскольку для пары (G, H) теорема верна, по лемме 2.9 $G/C_G(H)$ является расширением p-группы с помощью абелевой группы экспоненты, делящей $p - 1$. Если x — p'-элемент из $C_G(H)$, то $x \in C_G(P)$ по лемме 2.10. Значит, $C_G(P)/C_G(H)$ — p-группа, поэтому $G/C_G(P)$ — расширение p-группы с помощью абелевой группы экспоненты, делящей $p - 1$. Учитывая лемму 2.9, получаем противоречие. Остается рассмотреть случай, когда $P = H$ — нециклическая элементарная абелева группа. Поскольку все максимальные подгруппы из P S-квазинормальны и не нормальны в G, ввиду леммы 2.3 число всех максимальных подгрупп из P делится на p. Но это противоречит [12, п. I.7.2]. Утверждение (3) доказано.

Окончание доказательства теоремы 3.2. Поскольку G не p-нильпотентна и E не гиперцентральна в G, ввиду леммы 2.5 и теоремы Фробениуса G имеет p-замкнутую подгруппу Шмидта $U = P_1Q$, силовская p-подгруппа $P_1 \neq 1$ которой содержится в P. Согласно лемме 2.4 экспонента P_1 равна либо p, либо 4. Пусть L — циклическая подгруппа, порожденная элементом $x \in P_1 \setminus Z(P_1)$. Ввиду лемм 2.4 и 2.6 L либо имеет порядок p, либо является кватернионной в P_1. Допустим, что L имеет p-сверхразрешимое добавление T в G. Тогда $U = L(U \cap T)$. Если $U \cap T = U$, то ввиду (3) и леммы 2.1 U p-нильпотентна; противоречие. Если $U \cap T \neq U$, то, применяя леммы 2.1 и 2.11, видим, что U имеет нормальную подгруппу индекса p, что невозможно.

Таким образом, все подгруппы порядка p и все циклические кватернионные подгруппы из P_1 S-добавляемы в G. Пусть $L = \langle x \rangle$, $x \in P_1 \setminus Z(P_1)$. Ввиду лемм 2.4 и 2.6 L либо имеет порядок p, либо является кватернионной в P_1. Так как L S-добавляема в G, найдется такая подгруппа T, что $G = LT$ и $L \cap T \leq L_{sG}$. Как и выше, с помощью лемм 2.1 и 2.11 убеждаемся, что случай $U \cap T \neq U$ невозможен. Значит, $U \cap T = U$, и приходим к тому, что L S-квазинормальна в U. Согласно лемме 2.3 $U = O^p(U)$ нормализует L, и теперь получается, что $LZ(P_1)/Z(P_1)$ — главный фактор в U. Ввиду леммы 2.4 U сверхразрешима и по лемме 2.1 p-нильпотентна; противоречие. □

Доказательство следствия 1.2.2. Пусть p — наименьший простой делитель порядка E и P — силовская p-подгруппа из E. Если P является циклической, то по лемме 2.1 E p-нильпотентна. Если же P не является циклической, то по теореме 1.2 E p-нильпотентна и все ее G-главные p-факторы циклические. По индукции утверждение верно для G и ее нормальной подгруппы $O_{p'}(E)$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kegel O.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. Bd 78. S. 205–221.
2. *Asaad M.* On maximal subgroups of finite groups // Comm. Algebra. 1998. V. 26. P. 3647–3652.

3. *Asaad M, Csörgő P.* Influence of minimal subgroups on the structure of finite groups // Arch. Math. (Basel). 1999. V. 72. P. 401–404.
4. *Ballester-Bolinches A., Guo X. Y.* On complemented subgroups of finite groups // Arch. Math. (Basel). 1999. V. 72. P. 161–166.
5. *Li Y., Wang Y.* The influence of minimal subgroups on the structure of a finite group // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 131. P. 337–341.
6. *Li Y., Wang Y.* The influence of π-quasinormality of some subgroups of a finite group // Arch. Math. (Basel). 2003. V. 81. P. 245–252.
7. *Shemetkov L. A., Skiba A. N. On the $\mathscr{X}\Phi$-hypercentre of finite groups* // J. Algebra. 2009. V. 322. P. 2106–2117.
8. *Skiba A. N.* On two questions of L. A. Shemetkov concerning hypercyclically embedded subgroups of finite groups // J. Group Theory. 2010. V. 13. P. 841–850.
9. *Шеметкова О. Л.* О конечных группах с Q-центральными элементами простого порядка // Тр. Ин-та математики (Минск). 2008. Т. 16, № 1. С. 97–99.
10. *Buckley J.* Finite groups whose minimal subgroups are normal // Math. Z. 1970. Bd 15. S. 15–17.
11. *Isaacs I. Martin* Finite group theory. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008.
12. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
13. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
14. *Skiba A. N.* On weakly S-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 192–209.
15. *Schmid P.* Subgroups permutable with all Sylow subgroups // J. Algebra. 1998. V. 82. P. 285–293.
16. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
17. *Shemetkova O. L.* Finite groups with a system of generalized central elements // Algebra Discrete Math. 2004. N 4. P. 59–71.
18. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
19. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Chelsea Publ. Comp., 1980.
20. *Al-Sharo Kh. A., Molokova E. A., Shemetkov L. A.* Factorizable groups and formations // Acta Appl. Math. 2005. V. 85. P. 3–10.

Статья поступила 29 марта 2011 г.

Ян Наньин (Yang Nanying), Го Вэньбинь (Guo Wenbin)
Department of mathematics, University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P. R. China
yangny@ustc.edu.cn, wbguo@ustc.edu.cn

Шеметкова Ольга Леонидовна
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова,
Стремянный пер., 36, Москва 117997
olga_she@mail.ru