Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 512.54

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ, НАСЫЩЕННЫХ КОНЕЧНЫМИ ПРОСТЫМИ ГРУППАМИ

К. А. Филиппов

Аннотация. Дано полное описание периодических групп, насыщенных множеством конечных простых групп, в которых любая инволюция лежит в центре содержащей ее силовской 2-подгруппы.

Ключевые слова: насыщенность, группа.

Введение

Группа G *насыщена группами из множества групп* $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$. Множество $\mathfrak{M}$ называется *насыщающим множеством для* G [1].

В [2, теорема 2] утверждается, что периодическая группа G с абелевой силовской 2-подгруппой, насыщенная конечными простыми подгруппами, локально конечна и изоморфна либо $Re(P)$, либо $L_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P. Однако приведенное доказательство содержит неточность, так как предполагает, что из абелевости одной силовской 2-подгруппы вытекает абелевость любой силовской 2-подгруппы G, что не так [3].

В настоящей работе, в частности, устранена эта неточность и получен более общий результат.

Теорема. *Пусть периодическая группа G насыщена конечными простыми неабелевыми группами и в любой ее конечной 2-подгруппе K все инволюции из K лежат в центре K. Тогда G изоморфна одной из следующих групп: $J_1, L_2(Q), Re(Q), U_3(Q), Sz(Q)$ для подходящих локально конечных поля Q.*

1. Используемые результаты

Предложение 1 [4]. *Если периодическая группа G обладает конечной силовской 2-подгруппой, то все силовские 2-подгруппы G конечны и сопряжены.*

Предложение 2 [5]. *Периодическая группа, содержащая инволюцию с конечным централизатором, локально конечна и почти разрешима.*

Предложение 3 [6–9]. *Если локально конечная группа G локально покрывается множеством подгрупп лиевского типа, ранги которых ограничены в совокупности, то и сама G изоморфна группе лиевского типа конечного ранга.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00509–а).

Предложение 4 [10, 11]. *Пусть G — конечная простая неабелева группа и все инволюции из ее силовской 2-подгруппы S содержатся в центре S. Тогда G изоморфна одной из следующих групп: $J_1; Re(3^{2n+1}); L_2(q)$, $q > 3$, $q = 3, 5 (\mathrm{mod}\, 8)$ или $q = 2^n$, $U_3(2^n)$, $Sz(2^{2n+1})$. При этом S не содержит элементов порядка 8 и все инволюции из S сопряжены.*

Предложение 5 [12]. *Периодическая группа G, насыщенная проективными специальными группами размерности 2 над конечными полями, изоморфна группе $L_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P.*

Предложение 6 [13]. *Пусть G — бесконечная локально конечная группа, насыщенная группами диэдра. Тогда в G существует строго возрастающая цепочка конечных групп диэдра $D^{(1)} \subset D^{(2)} \subset \dots \subset D^{(n)} \subset \dots$ такая, что $G = \bigcup\limits_i D^{(i)} = L \leftthreetimes \langle t \rangle$, где L — локально циклическая группа, t — инволюция и $l^t = l^{-1}$ для любого $l \in L$.*

Предложение 7 [10]. *Силовская 2-подгруппа группы J_1 элементарная абелева порядка 8, и все инволюции из J_1 сопряжены.*

Предложение 8 [10]. *Пусть $G = Re(q)$, где $q = 3^{2n+1} > 3$, a — инволюция из G, T — силовская 2-подгруппа в G. Тогда*

(1) T — элементарная абелева группа порядка 8, $C_G(T) = T$ и $H = N_G(T) = T \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle)$, где $\langle b \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle$ — группа Фробениуса порядка 21;

(2) $C_G(a) = \langle a \rangle \times L$, где $L \simeq L_2(q)$;

(3) $G = \langle H, C_G(a) \rangle = \langle S, C_G(a) \rangle$, где S — произвольная силовская 2-подгруппа группы G, не содержащая инволюции a;

(4) все инволюции из G сопряжены в G.

Предложение 9 [14]. *Пусть $G = L_2(q)$, где $q = 2^n > 2$, P — силовская 2-подгруппа группы G, $B = N_G(P)$. Тогда*

(1) P — элементарная абелева группа и любые две силовские 2-подгруппы G пересекаются тривиально, в частности, $C_G(a) = P$ для любой инволюции $a \in P$;

(2) $B = P \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с ядром P и циклическим неинвариантным множителем H порядка $q - 1$, действующим транзитивно на множестве всех инволюций из P;

(3) $N = N_G(H) = H \leftthreetimes \langle \nu \rangle$ — группа диэдра;

(4) G порождается любыми двумя силовскими 2-подгруппами.

Предложение 10 [10]. *Пусть $G = U_3(2^n)$, P — силовская 2-подгруппа группы из G и $B = N_G(P)$. Тогда*

(1) $G = B\langle v \rangle B$, где v — инволюция и $B \cap B^v = H$ — подгруппа Картана;

(2) P — группа периода 4 ступени нильпотентности 2 и $P' = Z(P) = \Phi(P) = \Omega_1(P)$;

(3) любые две силовские 2-подгруппы группы G имеют тривиальное пересечение;

(4) если a — инволюция из P, то $C_G(a) = P \leftthreetimes H_1$, где H_1 — циклическая группа, причем $H_1 \leq B$ и $Z(P) \leq C_G(H_1)$;

(5) $B = P \leftthreetimes H$, где H — циклическая группа порядка $\frac{2^{2n}-1}{d}$, где $d = 3$, если 3 делит число $2^n + 1$, и $d = 1$ в противном случае;

(6) $H = H_0 \times H_1$, где H_1 — подгруппа из утверждения (4), $|H_0| = 2^n - 1$ и $|H_1| = \frac{2^n+1}{d}$, причем v инвертирует H_0 и централизует H_1;

(7) $P \leftthreetimes H_0$ — *группа Фробениуса с неинвариантным множителем* H_0, *действующим транзитивно на множестве инволюций группы* P.

Предложение 11 (теорема Шмидта) [14]. *Расширение локально конечной группы при помощи локально конечной группы — локально конечная группа.*

Предложение 12 [15]. *Пусть* G — *периодическая группа, содержащая инволюцию,* S — *силовская* 2*-подгруппа из* G *и централизатор любой инволюции из* G *абелев. Тогда либо* S — *локально циклическая группа, либо* $S \lhd G$, *либо* $G = R \times L_2(Q)$, *где* R — *абелева группа без инволюций,* Q — *локально конечное поле характеристики* 2.

Предложение 13 (теорема Санова) [16, 17]. *Произвольная группа, порядки элементов которой не превосходят* 4, *локально конечна.*

Предложение 14 [18]. *Пусть* G — *группа, содержащая конечную инволюцию и инволюцию с периодическим централизатором. Если каждая конечная подгруппа четного порядка из* G *содержится в конечной простой неабелевой подгруппе и любые две различные силовские* 2*-подгруппы из* G *пересекаются по тривиальной подгруппе, то* G *изоморфна* $L_2(Q)$, $U_3(Q)$ *или* $Sz(Q)$ *для подходящего локально конечного поля* Q *характеристики* 2.

Предложение 15 [10]. *Пусть* $G = Sz(q)$, P — *силовская подгруппа группы* G, $B = P\lambda H$ — *подгруппа Бореля,* H — *подгруппа Картана из* B. *Тогда*

(1) P — *группа порядка* q^2 *периода* 4 *и* $P' = Z(P) = \Omega_1(P)$;

(2) *все инволюции группы* G *сопряжены и* $C_G(a) = P$ *для любой инволюции* $a \in P$;

(3) *любые две силовские* 2*-подгруппы в* G *имеют тривиальное пересечение;*

(4) H *действует транзитивно на множестве инволюций из* P;

(5) G *порождается любой парой своих силовских* 2*-подгрупп.*

2. Доказательство теоремы

Пусть G удовлетворяет условиям теоремы.

Лемма 1. *Группа* G *является простой.*

Доказательство. Пусть $1 \neq H \lhd G$, a — неединичный элемент из H и $b \in G \setminus H$. По условиям теоремы найдутся конечные простые неабелевы подгруппы K и M из G такие, что $\langle a \rangle \subset K$, $\langle b \rangle \subset M$. Очевидно, что $K \subseteq H$ и $M \cap H = 1$, в частности, в H и в $G \setminus H$ найдутся соответственно инволюции i и j. В силу периодичности группы G подгруппа $R = \langle i, j \rangle$ конечна, и по условиям теоремы $R \subset L \subseteq G$, где L — конечная простая неабелева группа. При этом $L \cap H \neq 1$ и потому $L \subset H$. Получаем противоречие с выбором j. Лемма доказана.

Лемма 2. *Без ограничения общности можно считать, что насыщающее множество для группы* G *следующее:* $\mathfrak{M} = \{J_1;\ L_2(2^n);\ Re(3^{2n+1});\ U_3(2^{2n});\ Sz(2^{2n+1});\ L_2(q),\ q = 3, 5 \bmod 8\}$.

Доказательство. Пусть L — произвольная конечная простая неабелева подгруппа группы G. Обозначим через P некоторую ее силовскую 2-подгруппу. Поскольку P содержится в силовской 2-подгруппе группы G, по условию теоремы все инволюции из P содержатся в центре P. Но тогда L изоморфна одной из групп перечисленных в лемме в силу предложения 4. Лемма доказана.

Лемма 3. *Все инволюции группы G сопряжены, и любая силовская 2-подгруппа из G — локально конечная группа периода ≤ 4.*

Доказательство. Пусть a и b — произвольные инволюции из G. В силу периодичности группы G подгруппа $L = \langle a, b\rangle$ конечна, и по условиям теоремы $L \subset M$, где M — конечная простая группа, изоморфная одной из групп множества $\mathfrak{M}$ (лемма 2), а в каждой из групп, являющихся элементами множества $\mathfrak{M}$, все инволюции сопряжены [10, 11]. Теперь возьмем произвольный 2-элемент $x \in G$. По условию насыщенности $\langle x\rangle < L$, где L — группа, изоморфная одной из групп множества $\mathfrak{M}$. Но тогда по предложению 4 $|\langle x\rangle| \leq 4$. Лемма доказана.

I. Все силовские 2-подгруппы группы G абелевы. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы и все ее силовские 2-подгруппы абелевы. Пусть S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. При доказательстве рассматриваются четыре случая.

Случай 1: $|S| = 2$. Данный случай невозможен. В самом деле, в силу условия S — силовская 2-подгруппа некоторой простой конечной неабелевой группы. Но в любой такой группе порядок силовской 2-подгруппы больше двух.

Случай 2: $|S| = 4$. В этом случае можно считать, что насыщающие множество $\mathfrak{M} = \{L_2(q) \mid q = 3.5 \bmod 8\}$ и по предложению 5 $G \simeq L_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле. Таким образом, в этом случае утверждение теоремы имеет место.

Случай 3: $|S| = 8$. Так как для конечных групп G теорема верна, предполагаем, что $|G| = \infty$.

Пусть $S = \langle a\rangle \times \langle z\rangle \times \langle t\rangle$ — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Положим $C = C_G(a)$; $C_1 = C_C(z)$; $C_2 = C_{C_1}(t)$; $S_1 = \langle a\rangle \times \langle z\rangle$.

Лемма 4. *$C_1 = \langle a\rangle \times \langle z\rangle \times (D \leftthreetimes \langle t\rangle) = C_G(S_1)$, где D — локально циклическая группа без инволюций и $x^t = x^{-1}$ для любого $x \in D$.*

Доказательство. Если C — конечная группа, то по предложению 2 G — локально конечная группа, и теорема верна по предложению 3.

Пусть C — бесконечная группа. Предположим, что C_1 — конечная группа. Тогда C – бесконечная локально конечная группа (предложение 2). Рассмотрим фактор-группу $\overline{C} = C/\langle a\rangle$, являющуюся локально конечной, и пусть $\overline{K}$ — произвольная конечная подгруппа из $\overline{C}$, а K — ее полный прообраз в C. Без ограничения общности можно считать, что $|K| > |J_1|$. Заметим, что $|J_1| > |L_2(8)| > |L_2(4)|$.

Так как C локально конечна, $\langle S, K\rangle$ — конечная группа и в силу условий $\langle S, K\rangle \subset R \simeq R_2(3^{2n+1})$, где R — подгруппа G. Но тогда $\langle S, K\rangle \subset C_R(a) = \langle a\rangle \times L$ и $L_2 \simeq L_2(3^{2n+1})$. Поскольку $C_R(a) \subset C$, переходя к фактор-группе $\overline{C}$, получаем цепочку включений $\overline{K} \subset \overline{\langle S, K\rangle} \subset \overline{L}_2(3^{2n+1})$.

Таким образом, любая конечная подгруппа $\overline{K}$ из $\overline{C}$ содержится в некоторой простой конечной неабелевой подгруппе $\overline{L}_2$ из $\overline{C}$ и $\overline{L}_2 \simeq L_2(3^{2n+1})$. По предложению 5 $\overline{C} \simeq L_2(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 3. Отсюда получаем, что $C = \langle a\rangle \times L$, где $L \simeq L_2(Q)$ и C_1 — бесконечная группа; противоречие с предположением $|C_1| < \infty$.

Итак, C_1 — бесконечная группа. Предположим, что $C_2 = C_{C_1}(t) = C_{C_2}(S)$ — бесконечная группа. Возьмем элемент b нечетного порядка из C_2 (это можно сделать, поскольку S — силовская 2-подгруппа в C_2 и фактор-группа $\overline{C}_2 = C_2/S$ — бесконечная периодическая группа без инволюций). Рассмотрим конечную подгруппу $S \times \langle b\rangle$, которая по условию теоремы лежит в некоторой конечной простой неабелевой подгруппе K. При этом $K \simeq Re(3^{2n+1})$ или $K \simeq J_1$, но и в первом, и во втором случаях $C_K(S) = S$ [10, 11]. Противоречие с тем, что $C_K(S)$ содержат элемент нечетного порядка. Итак, C_2 — конечная группа, и по предложению 2 C_1 — бесконечная локально конечная группа. Рассмотрим фактор-группу $\overline{C}_1 = C_1 / S_1$, и пусть $\overline{K}$ – конечная подгруппа из $\overline{C}_1$ с условием $|\overline{K}| > |J_1|$, а K – ее полный прообраз в C_1. По условию теоремы $K \leq R < G$ и $R \simeq Re(3^{2n+1})$. Так как K лежит в $C_R(a)$, то $K \subset \langle a\rangle \times L \subset R$, где $L \simeq L_2(3^{2n+1})$, и, кроме того, $\langle z\rangle \times \langle t\rangle \leq L$. Следовательно, $K < \langle a\rangle \times C_L(z) = \langle a\rangle \times (D_1 \leftthreetimes t)$, где $C_L(z) = N = D_1 \leftthreetimes \langle t\rangle$ — группа диэдра. Возвращаясь в фактор-группу $\overline{C}_1$, получаем, что $\overline{K} < \overline{N}$ — конечная группа диэдра. По предложению 6 $\overline{C}_1 = \overline{D} \leftthreetimes \langle \overline{t}\rangle$ — локально конечный диэдр, а $C_1 = \langle a\rangle \times (D \leftthreetimes \langle t\rangle) = \langle a\rangle \times \langle z\rangle \times (D \leftthreetimes \langle t\rangle)$, где D — группа без инволюций. Лемма доказана.

Лемма 5. *$N_G(S) = S \leftthreetimes (\langle b\rangle \leftthreetimes \langle d\rangle)$, где $\langle b\rangle \leftthreetimes \langle d\rangle$ — группа Фробениуса порядка 21, $|C_S(d)| = 2$ и $S \leftthreetimes \langle b\rangle$ — группа Фробениуса порядка 56.*

Доказательство. Из предложения 4 вытекает, что $N_G(S)$ — конечная подгруппа. В силу условий теоремы $N_G(S)$ вложим в конечную простую группу, изоморфную $Re(3^{2n+1})$. Теперь достаточно воспользоваться предложением 8. Лемма доказана.

Лемма 6. *Группа G содержит бесконечную локально конечную простую подгруппу R, изоморфную $Re(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 3, не содержащее подполей порядка 9, причем $C_G(a) < R$ для любой инволюции $a \in R$.*

Доказательство. Рассмотрим группу C_1 из леммы 4. Представим C_1 в виде объединения возрастающей цепочки подгрупп $N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots$, где $N_k = \langle a\rangle \times \langle z\rangle \times (D_k \leftthreetimes \langle t\rangle)$, D_i — циклическая группа без инволюций и $D_i \leftthreetimes \langle t\rangle$ — конечная группа диэдра.

По условию теоремы начиная с некоторого достаточно большого m будет $N_k \subset R_k \simeq Re(q)$, где $k > m$. По лемме 5 $N_G(S) \subset R_k$ для любого $k > m$, но тогда $\langle N_C(S), N_k\rangle = R_k$ для любого $k > m$. Отсюда $R_{K_1} \subset R_{K_2} \subset \dots \subset R_{K_i} \subset \dots$ — возрастающая цепочка вложенных друг в друга подгрупп, а $R = \bigcup R_k$ — бесконечно локально конечная подгруппа, изоморфная $Re(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 3 (предложение 3). Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть R — подгруппа из формулировки леммы 6. Тогда $G = R$.*

Доказательство. Предположим, что $G \neq R$. В силу леммы 1 в $G \setminus R$ найдется инволюция t; пусть a — инволюция из R. По условиям теоремы $\langle a, t\rangle < M < G$, где M — конечная простая группа. Убедимся, что $H = M \cap R$ — сильно вложенная подгруппа в M. Пусть $x \in H \cap H^g$, где $g \in M \setminus H$ и $x^2 = 1$. Это означает, что $y^g = x$ для некоторой инволюции $y \in H$. Так как $y, x \in R$ (лемма 6), то $y^r = x$ и $y^{gr^{-1}} = y$ для некоторого $r \in R$. Следовательно, $gr^{-1} \in C_G(y) \subset R$ (лемма 6), т. е. $g \in R$; противоречие с выбором g. Итак, H — сильно вложенная подгруппа в M. Стало быть, $M \simeq L_2(8)$ или $M \simeq L_2(4)$ [3, теорема 4.24].

Предположим, что $M \simeq L_2(4)$. Тогда $H = M \cap R = (\langle a\rangle \times \langle x\rangle) \leftthreetimes \langle d\rangle \simeq A_4$, x — инволюция, а $|d| = 3$. По предложению 8 в R найдется инволюция w такая, что $w \in C_R(H)$. Возьмем в $M \setminus H$ инволюцию v такую, что $d^v = d^{-1}$. Конечная группа $\langle d, v, w\rangle$ содержится в $M_1 \subset G$, где M_1 — конечная простая группа с элементарной абелевой силовской 2-подгруппой и сильно вложенной подгруппой $M_1 \cap R$, поскольку $w \in M_1 \cap R$. Следовательно, M_1 изоморфна $L_2(4)$ или $L_2(8)$. Но ни одна из этих ситуаций невозможна, поскольку M_1 содержит элемент d

порядка 3 и $C_{M_1}(d)$ содержит инволюцию w (предложение 9). Итак, M не может быть изоморфна $L_2(4)$. Пусть $M \simeq L_2(8)$. Тогда $M \cap R = H = S_M \leftthreetimes \langle l \rangle$, где $|S_M| = 2^3$, $|l| = 7$ и H — группа Фробениуса порядка 56. Возьмем в $M \setminus H$ инволюцию y такую, что $l^y = l^{-1}$, а в $R \setminus H$ — инволюцию z такую, что $l^z = l^{-1}$. Конечная группа $\langle l, z, t \rangle$ содержится в M_1, где M_1 — конечная простая группа с элементарной абелевой силовской 2-подгруппой и сильно вложенной подгруппой $M_1 \cap R$, поскольку $z \in M_1 \cap R$. Следовательно, $M_1 \simeq L_2(4)$, $M_1 \simeq L_2(8)$, но ни одна из этих ситуаций невозможна, так как сильно вложенная подгруппа $M_1 \cap R$ содержит группу диэдра вида $\langle l \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle$. Полученное противоречие означает, что $G = R$, и лемма доказана.

Леммы 6 и 7 завершают рассмотрение случая $|S| = 8$.

Случай 4: $|S| > 8$. В силу предложения 4 S — элементарная абелева группа. Возьмем инволюцию $x \in S$, и пусть $C = C_G(x)$.

Лемма 8. *C — абелева группа.*

Доказательство. Пусть C — неабелева группа. Тогда в C существует элемент нечетного порядка d и C — не локально конечная группа. Действительно, если C — локально конечная группа, то возьмем в C конечную подгруппу $S_1 = \langle (\langle x \rangle \times \langle z \rangle \times \langle v \rangle \times \langle t \rangle), d \rangle$, где $x^2 = z^2 = v^2 = t^2 = 1$. По условию $S_1 < L$, где $L \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $L \simeq L_2(2^n)$, $n > 3$. Но $C_L(x)$ — 2-группа; противоречие с тем, что $d \in C_L(x)$. Положим $\overline{C} = C/\langle x \rangle$. Ясно, что $\overline{S} = S/\langle x \rangle$ — силовская 2-подгруппа в $\overline{C}$. Если $C_{\overline{C}_1}(\bar{y})$ для любой инволюции $\bar{y} \in \overline{C}$ является абелевой группой, то по предложению 12 $\overline{S} \lhd \overline{C}$, а $S \lhd C$. Тогда $S \leftthreetimes \langle d \rangle$ — локально конечная подгруппа из C. Повторяя рассуждения, приведенные для доказательства не локальной конечности C, снова приходим к противоречию.

Итак, найдется инволюция $\bar{y} \in \overline{C}$ такая, что $C_{\overline{C}}(\bar{y})$ — неабелева группа, а значит, найдется элемент $1 \neq \bar{d}_1$ нечетного порядка такой, что $\bar{d}_1 \in C_{\overline{C}}(\bar{y})$. Как и для $C_G(x)$, показывается, что $C_{\overline{C}_1}(\bar{y})$ — не локально конечная группа. Обозначим через C_1 полный прообраз $C_{\overline{C}}(\bar{y})$ в C. Пусть d_1 — элемент нечетного порядка из C_1 такой, что $\bar{d}_1 = d_1\langle x \rangle$, а y — инволюция из C такая, что $\bar{y} = y\langle x \rangle$. Тогда $\bar{d}_1^{-1}\bar{y}\bar{d}_1 = \bar{y}$, $d_1^{-1}yd = y_1$ и $C_1 = C_C(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)$. Положим $\overline{C}_1 = C_1/F$, где $F = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ и $\overline{S}_1 = S/F$. Ясно, что $\overline{S}_1 \leq \overline{C}_1$ и $\overline{S}_1$ — силовская 2-подгруппа группы $\overline{C}_1$. Если $C_{\overline{C}_1}(\bar{z})$ — абелева группа для любой инволюции $\bar{z} \in \overline{C}_1$, то по предложению 12 $\overline{S}_1 \lhd \overline{C}_1$ и, значит, $S \lhd C_1$. Поскольку C_1 содержит элемент нечетного порядка d_1, можно рассмотреть локально конечную подгруппу $S \leftthreetimes \langle d_1 \rangle$ и получить противоречие. Следовательно, $C_{\overline{C}_1}(\bar{z})$ — неабелева группа для некоторой инволюции $\bar{z} \in \overline{C}_1$, а значит, она содержит элемент $\bar{d}_2$ нечетного порядка и $\overline{C}_1$ — не локально конечная группа. Возвращаясь в группу C_1, обозначим через C_2 полный прообраз $C_{\overline{C}_1}(\bar{z})$ в C_1 и положим $\bar{d}_2 = d_2(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)$, где d_2 — элемент нечетного порядка. Равенство $\bar{d}_2^{-1}\bar{z}\bar{d}_2 = \bar{z}$ в $\overline{C}_2$ переходит в равенство $d_2^{-1}zd = zv$ в C_2 для некоторого $v \in F$. Так как $F \subset Z(C_2)$, а $|d_2|$ — нечетное число, то $v = 1$ и $d_2^{-1}zd_2 = z$. Рассмотрим конечную подгруппу $M = (\langle x \rangle \times \langle y \rangle \times \langle z \rangle) \times \langle d_2 \rangle$. По условию $M \subset L$, $L \in \mathfrak{M}$. Но ни одна из групп множества $\mathfrak{M}$ не содержит подгрупп такого вида; противоречие. Таким образом, C — абелева группа. Лемма доказана.

Завершим рассмотрение случая 4. В силу последней леммы и предложения 12 $G \simeq L_2(Q)$, где Q — подходящие локально конечное поле характеристики 2. Итак, для п. I доказательство теоремы завешено.

II. Группа G содержит неабелеву силовскую 2-подгруппу. Пусть S — некоторая неабелева силовская 2-подгруппа группы G. При доказательстве рассматриваются два случая.

Случай 1: S — конечная группа. По предложению 1 все силовские 2-подгруппы группы G сопряжены, а в силу условия теоремы и ввиду леммы 2 они изоморфны силовской 2-подгруппе либо группы $Sz(2^{2k+1})$, либо группы $U_3(2^n)$. Если любая отличная от S силовская 2-подгруппа тривиально пересекается с S, то теорема верна в силу предложения 14.

Предположим, что найдется такая силовская 2-подгруппа S_1 группы G, что $S_1 \neq S$ и $K = S \cap S_1 \neq \{1\}$. Понятно, что мы можем предполагать, что если M — любая другая силовская 2-подгруппа группы G и $M \neq S$, то $|M \cap S| \leq |K|$.

Если K — элементарная абелева 2-подгруппа, а значит, K содержится в $Z(S)$, то обозначим через t любой элемент порядка 4 из S, для которого $t^2 \in K$. Если же K содержит элемент порядка 4, то через t обозначим любой элемент разности $N_S(K) \setminus K$ со свойством $t^2 \in K$ (такой элемент найдется, поскольку в S выполняется нормализаторное условие). Итак, в любом случае $T = \langle K, t\rangle$ — группа периода 4, $K \lhd T$ и $|T/K| = 2$. Далее, обозначим через t_1 любой элемент из $N_{S_1}(K) \setminus K$, для которого $t_1^2 \in K$. Тогда K — нормальная подгруппа индекса 2 в группе $T_1 = \langle K, t_1\rangle$. Таким образом, $B = \langle K, t, t_1\rangle$ — конечная группа, содержащая элемент порядка 4.

По условию теоремы и леммы 2 $B < L$, где L изоморфна либо группе $Sz(2^{2^{k+1}})$, либо группе $U_3(2^n)$. В любом случае различные силовские 2-подгруппы из L имеют тривиальное пересечение. Но тогда 2-подгруппы T и T_1 из L содержатся в одной силовской 2-подгруппе группы L. В частности, B является 2-группой. Если S_2 — силовская 2-подгруппа группы G, содержащая B, то $S_2 \neq S$ $(t_1 \in S_2, t_1 \notin S)$, $S_2 \cap S$ содержит T. Но это противоречит выбору подгруппы S_1.

Итак, S тривиально пересекаются с любой другой силовской 2-подгруппой группы G. Как отмечалось выше, это доказывает теорему.

Случай 2: S — бесконечная группа. Если пересечение двух различных силовских 2-подгрупп группы G тривиально, то теорема верна (предложение 14). Предположим, что $M \cap P \neq \{1\}$, где M, P — различные силовские 2-подгруппы группы G. Так как согласно лемме 3 в группе G все инволюции сопряжены, найдется такой элемент $g \in G$, что $M^g \cap P^g \cap S$ содержит инволюцию i. Хотя бы одна из подгрупп M^g, P^g отлична от S. Обозначим ее через S_1. Итак, S_1 — силовская 2-подгруппа группы G, и пересечение $S \cap S_1$ содержит инволюцию i. Покажем, что это приводит к противоречию.

Лемма 9. *Пусть S — произвольная силовская 2-подгруппа группы G. Тогда все инволюции из S лежат в центре S.*

Доказательство. Пусть $1 \neq x \in S$ и $x^2 = 1$, а s — произвольный элемент из S. Если $|s| = 2$, то $\langle s, x\rangle$ — конечная 2-группа и по условию теоремы $sx = xs$. Если $|s| > 2$, то, как показывалось выше, инволюция из $\langle s\rangle$, обозначим ее через s_1, перестановочна с x. В фактор-группе $C_S(s_1)/\langle s_1\rangle$ инволюции $\bar{x}$ и $\bar{s}_2$, где s_2 — элемент порядка 4 из $\langle s\rangle$, порождают конечную 2-группу $\langle \bar{x}, \bar{s}_2\rangle$, полный прообраз которой в $C_S(s_1)$ — конечная 2-группа $\langle x, s_2\rangle$. Следовательно, по условию теоремы $xs_2 = s_2x$. Рассуждая по индукции, получаем, что $sx = xs$ для любого $s \in S$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что либо $K = S \cap S_1$ содержит элемент порядка 4, либо $|K| \geq 8$.*

Доказательство. Действительно, пусть K — элементарная абелева группа порядка 2 или 4. Обозначим: i — инволюция из K; b — элемент порядка 4 из S; $l = b^2$; x — элемент группы G, для которого $i = l^x$. Рассмотрим пересечение $S^x \cap S_1 = Q$, которое содержит i. Допустим, что снова это пересечение есть элементарная абелева 2-подгруппа порядка ≤ 4 (в противном случае лемма верна). Если $a = b^x$, то $a \in S^x$ и $a^2 = i$. Пусть j — любая инволюция из $S_1 \setminus S^x$. По лемме 9 j централизует Q. Рассмотрим теперь группу $T = \langle Q, a, j\rangle$. Поскольку T/Q порождается двумя инволюциями aQ и jQ, то T — конечная группа. По условию теоремы и лемме 2 $T < L$, где L изоморфна либо группе $Sz(2^{2m+1})$, либо группе $U_3(2^s)$.

Так как различные силовские 2-подгруппы из L пересекаются тривиально, 2-подгруппы $\langle Q, a\rangle$ и $\langle Q, j\rangle$ содержатся в одной силовской 2-подгруппе из L. В частности, T является 2-подгруппой. Если S_2 — силовская 2-подгруппа группы G, содержащая T, то $S_2 \neq S^x$ ($j \in T \setminus S^x$). При этом пересечение $S_2 \cap S^x$ содержит элемент a порядка 4. Это доказывает лемму.

В соответствии с леммой 10 считаем далее, что $K = S \cap S_1$ либо содержит элемент порядка 4, либо $|K| \geq 8$.

Лемма 11. *Любые две инволюции из $S \cup S_1$ перестановочны.*

Доказательство. Если найдутся две неперестановочные инволюции, то в силу леммы 9 они не содержатся в одной силовской 2-подгруппе группы G. Предположим, что $t \in (S \setminus S_1)$, $l \in (S_1 \setminus S)$, $|t| = |l| = 2$ и $tl \neq lt$. Обозначим через K_1 подгруппу из K, которая либо циклическая порядка 4, либо элементарная абелева порядка 8, и положим $F = \langle K_1, t, l\rangle$. Заметим, что $K_1 < Z(F)$, а значит, F — конечная группа. Так как подгруппа $\langle K_1, t\rangle$ либо содержит элемент порядка 4, либо является элементарной абелевой порядка 16, по условию теоремы и лемме 2 $F < U$, где U изоморфна либо группе $Sz(2^{2m+1})$, либо группе $U_3(2^n)$. Отсюда, как и выше, выводим, что F является 2-группой и $tl = lt$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть a — элемент порядка 4, j — инволюция; $a, j \in (S \cup S_1)$. Тогда $aj = ja$.*

Доказательство. Если a, j содержатся в одной силовской 2-подгруппе группы G, то лемма верна в силу леммы 9. Пусть, например, $a \in S$, $j \in (S_1 \setminus S)$. По лемме 11 $ja^2 = a^2 j$. Тогда $\langle a, j\rangle$ — конечная группа, содержащая нетривиально пересекающиеся 2-подгруппы: $\langle a\rangle$, $\langle a^2\rangle \times \langle j\rangle$. В этой ситуации, как доказывалось ранее, $\langle a, j\rangle$ является 2-группой. Следовательно, $aj = ja$ по условию теоремы. Лемма доказана.

Лемма 13. *$S_1 \cap S$ содержит все инволюции из $S_1 \cup S$.*

Доказательство. Пусть, например, инволюция j содержится в S. В силу лемм 11, 12 j перестановочна со всеми элементами из S_1, а потому пусть $S_1\langle j\rangle$ — 2-группа. Но S_1 — силовская 2-подгруппа группы G. Значит, $j \in S_1$, т. е. $j \in S \cap S_1$. Лемма доказана.

Лемма 14. *SS_1 является 2-подгруппой группы G.*

Доказательство. Пусть $x \in S$, $y \in S_1$. Если хотя бы один из этих элементов — инволюция, то $xy = yx$ (лемма 12). Пусть $|x| = |y| = 4$. Положим $D = \langle x, y\rangle$. Так как x^2, y^2 содержатся в $Z(D)$, то D — конечная группа, а ее 2-подгруппы $\langle x\rangle$ и $\langle x^2, y^2\rangle$ имеют нетривиальное пересечение. Но тогда (см. доказательство лемм 10, 11) D есть 2-группа, xy является 2-элементом и

$xy = y \times z$, где $|z| \leq 2$. Покажем, что $z \in S$. Тогда будет установлено включение $SS_1 \subset S_1S$. Действительно, если S_2 — силовская 2-подгруппа группы G, содержащая D, то $S_2 \cap S$ содержит элемент x порядка 4. Поэтому для пары (S, S_2) справедливы леммы 11–13, а потому $x \in S$. Аналогично устанавливается включение $S_1S \subset SS_1$. Это доказывает лемму.

Так как S, S_1 — силовские 2-подгруппы группы G, по лемме 14 $S = S_1$; противоречие. Как отмечалось выше, это доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шлёпкин А. К.* Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Третья междунар. конф. по алгебре, 23–28 авг. 1993: Сб. тез. Красноярск, 1993.

2. *Созутов А. И., Шлёпкин А. К.* О некоторых группах с конечной инволюцией, насыщенных конечными простыми подгруппами // Мат. заметки. 2002. Т. 72, № 3. С. 433–447.

3. *Hall P.* Some constructions for locally finite groups // J. London Math. Soc. 1959. V. 34. P. 305–319.

4. *Филиппов К. А.* Группы, насыщенные конечными неабелевыми группами и их расширениями: Дис. канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2006.

5. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–494.

6. *Беляев В. В.* Локально конечные группы Шевалле // Исследования по теории групп. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. С. 39—50.

7. *Боровик А. В.* Вложения конечных групп Шевалле и периодические линейные группы // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 6. С. 26–35.

8. *Hartley B., Shute G.* Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type // Quat. J. Math. 1984. V. 35, N 135. P. 49–71.

9. *Thomas S.* The classification of the simple periodic linear groups // Arch. Math. 1984. V. 41. P. 103–116.

10. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. М.: Мир, 1985.

11. *Мазуров В. Д.* Конечные группы // Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1976. Т. 14. С. 5–56. (Итоги науки и техники).

12. *Филиппов К. А., Рубашкин А. Г.* О периодических группах, насыщенных $L_2(p^n)$ // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1388–1392.

13. *Шлёпкин А. К., Рубашкин А. Г.* Об одном классе периодических групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 110–119.

14. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

15. *Сучков Н. М.* О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 2. С. 153–160.

16. *Лыткина Д. В.* Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4 // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 353–358.

17. *Санов И. Н.* Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. 1940. Т. 10. С. 166–170.

18. *Лыткина Д. В.* О группах, насыщенных конечными простыми группами // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 5. С. 628–653.

Статья поступила 12 января 2012 г.

Филиппов Константин Анатольевич
Красноярский гос. аграрный университет,
пр. Мира, 90, Красноярск 660049
filippov_kostya@mail.ru