Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 517.956.2

ПРИНЦИП МАКСИМУМА И ПРИНЦИП СРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ

Д. В. Портнягин

Аннотация. Предлагается способ обобщения хорошо известных принципов максимума и сравнения на недиагональную параболическую систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Рассмотрены случаи задач Дирихле и Неймана. Приведены примеры систем, для которых применим данный метод.

Ключевые слова: недиагональная параболическая система, недиагональная эллиптическая система, принцип максимума, принцип сравнения.

1. Введение

Многочисленные примеры недиагональных эллиптических систем уравнений в частных производных с ограниченными коэффициентами, но неограниченным решением позволяют предположить, что высокая регулярность решений недиагональной, переплетенной в старших производных системы дифференциальных уравнений второго порядка может быть получена наложением дополнительных, помимо эллиптичности, условий на матрицу ее коэффициентов.

В [1] рассмотрен вопрос регулярности решений диагональных, т. е. переплетенных в младших членах, параболических систем нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Для диагональных эллиптических систем хорошо известен принцип максимума Бицадзе [2]. Регулярность решений недиагональных квазилинейных эллиптических систем изучена в монографии [3] в предположении так называемых условий кордесовости на матрицу коэффициентов. Разработанная в ней техника итераций находит дальнейшее применение в [4, 5] для эллиптических и параболических систем с контролируемым ростом по градиенту.

Применяемая нами техника заключается в установлении оценок не для самих компонентов решения системы, а для некоторых функций от них, которые можно разрешить и в итоге получить оценки для самих неизвестных. Попытки использовать данный метод делались автором в [6]. В [7] такой подход успешно применяется для установления оценок и доказательства разрешимости задачи о течении двухкомпонентной жидкости с теплопереносом.

Поясним подробнее, в чем заключается предлагаемый метод. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} u_t - a_1\Delta u - b_1\Delta v = 0, \\ v_t - a_2\Delta u - b_2\Delta v = 0, \end{cases} \quad (x,t)\in Q,$$

с постоянными коэффициентами. Если матрицу коэффициентов можно привести к диагональному виду, то и данную систему можно диагонализировать:

$$\begin{cases} H_{1t} - \Lambda_1\Delta H_1 = 0, \\ H_{2t} - \Lambda_2\Delta H_2 = 0, \end{cases} \quad (x,t)\in Q,$$

© 2012 Портнягин Д. В.

где $\Lambda_{1,2}$ — собственные числа матрицы коэффициентов, а $H_1 = \alpha_1 u + v$ и $H_2 = \alpha_2 u + v$ — собственные линейно независимые векторы. Оценки для функций $H_{1,2}$ через их значения на параболической границе области (принцип максимума) можно разрешить в этом случае относительно неизвестных u и v и тем самым получить оценки для последних. Это и является нашим обобщением принципа максимума на недиагональную систему дифференциальных уравнений.

При попытке обобщения данного метода на системы уравнений с переменными коэффициентами возникает трудность, связанная с появлением производных от коэффициентов в выкладках.

Тем не менее существует классический прием в теории дифференциальных уравнений с частными производными, заключающийся в «замораживании» коэффициентов и введении в каждой точке области локального базиса, по координатам которого производится дифференцирование.

Новизна нашего подхода заключается в объединении двух вышеупомянутых идей, благодаря чему возможно локально диагонализировать недиагональную, сильно связанную систему уравнений и свести ее к задаче на собственные значения для матрицы коэффициентов. Зависимость коэффициентов от своих переменных при этом не порождает дополнительных трудностей.

2. Основные обозначения и предположения

В данной работе используются следующие обозначения: $Q = (0,T] \times \Omega$; $S = \partial\Omega \times (0,T]$; $\partial Q \equiv \{\Omega \times \{0\}\} \cup \{\partial\Omega \times (0,T]\}$; Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей; $x \in \Omega$; $T > 0$; $t \in (0,T]$; $n \geq 2$; $i = 1,\dots,n$; $j = 1,2$ (по повторяющимся индексам предполагается суммирование); $u, v \in C(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega))$; $W_0^{1,2}(\Omega)$ — пространство функций в $W^{1,2}(\Omega)$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ в смысле следов для почти всех $t \in (0,T]$.

Сначала рассмотрим параболическую систему двух уравнений следующего вида с коэффициентами, зависящими от неизвестных и пространственных координат:

$$\begin{cases} u_t - \partial(a_1(x,u,v)\nabla u + b_1(x,u,v)\nabla v) = f_1(x,t,u,v), \\ v_t - \partial(a_2(x,u,v)\nabla u + b_2(x,u,v)\nabla v) = f_2(x,t,u,v), \end{cases} \quad (x,t) \in Q, \tag{2.1}$$

с $f_{1,2} \in L^\infty(Q, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Относительно матрицы коэффициентов такой модельной системы предполагается, что

$$a_1(x,u,v)b_2(x,u,v) > a_2(x,u,v)b_1(x,u,v) \quad \forall u, v, x_i \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

при этом существуют две функции $n+2$ переменных $\alpha_1(x,u,v)$ и $\alpha_2(x,u,v)$ такие, что удовлетворяется следующая система уравнений, которую мы предлагаем называть *характеристической системой* исходной системы (2.1):

$$\begin{cases} a_1(x,u,v)\alpha(x,u,v) + a_2(x,u,v) = \Lambda(x,u,v)\alpha(x,u,v), \\ b_1(x,u,v)\alpha(x,u,v) + b_2(x,u,v) = \Lambda(x,u,v) \end{cases} \quad \forall u, v, x_i \in \mathbb{R},$$

где $\alpha(x,u,v)$ обозначает $\alpha_1(x,u,v)$ или $\alpha_2(x,u,v)$,

$$\omega_1 \leq \alpha_1(x,u,v) \leq A_1, \tag{2.3}$$

$$\omega_2 \leq \alpha_2(x,u,v) \leq A_2, \tag{2.4}$$

$$\omega_2 > A_1; \tag{2.5}$$

$\Lambda : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримая функция Каратеодори такая, что

$$0 < L_1 \le \Lambda(x, u, v) \le L_2 \quad \forall u, v, x_i \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

$L_{1,2}$, $\omega_{1,2}$, $A_{1,2}$ — некоторые числа.

Замечание 1. Легко проверить непосредственным вычислением, что из условия параболичности системы следует условие (2.2) (параболичность означает, что система без производных по времени эллиптична). В самом деле, если

$$a_1|\nabla u|^2 + b_1 \nabla u \nabla v + a_2 \nabla u \nabla v + b_2 |\nabla v|^2 > 0,$$

то, решая это квадратное неравенство относительно ∇u или ∇v, придем к тому, что дискриминант должен быть отрицательным:

$$4a_1b_2 > (b_1 + a_2)^2 = b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_1 > 2b_1a_2 + 2b_1a_2 = 4b_1a_2,$$

с учетом того, что ветви параболы смотрят вверх.

Задаются краевые условия либо типа Дирихле:

$$\begin{cases} (u - g_1, v - g_2)(x,t) \in W_0^{1,2}(\Omega) & \text{для почти всех } t \in (0,T), \\ (u,v)(x,0) = (u_0, v_0)(x), \end{cases} \tag{2.7}$$

либо типа Неймана:

$$\begin{cases} \frac{\partial(u,v)}{\partial\vec{\nu}}(x,t) = 0 & \text{для почти всех } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ (u,v)(x,0) = (u_0, v_0)(x), \end{cases} \tag{2.8}$$

где $\vec{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали. Решение системы (2.1) с данными Дирихле (2.7) или с данными Неймана (2.8) понимается в слабом смысле, как в [1].

Определение 2.1. Измеримая вектор-функция $(u^1, u^2) = (u, v)$ называется *слабым решением задачи* (2.1), (2.7) или (2.1), (2.8), если $u^j \in C(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega))$ и при всех $t \in (0,T]$

$$\int_\Omega u^j \varphi_j(x,t)\, dx + \iint_{\Omega\times(0,t]} \{-u^j \varphi_{j\ t} + a_j u_{x_i} \varphi_{j\ x_i} + b_j u_{x_i} \varphi_{j\ x_i}\}\, dx d\tau$$
$$= \int_\Omega u_0^j \varphi_j(x,0)\, dx + \iint_{\Omega\times(0,t]} f^j \varphi_j\, dx d\tau$$

для любой пробной функции φ из $W^{1,2}(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2\big(0,T; W_0^{1,2}(\Omega)\big)$ в случае задачи Дирихле или φ из $W^{1,2}(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2\big(0,T; W^{1,2}(\Omega)\big)$ в случае задачи Неймана. Краевые условия (2.7) или (2.8) выполняются в слабом смысле.

Дополнительно наложим на коэффициенты такие условия роста:

$$(\exists \Lambda_2 > 0 \forall u, v \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n) \quad |a^j(x,u,v)|, |b^j(x,u,v)| \le \Lambda_2. \tag{2.9}$$

О функциях $g_j(x,t)$, $(u_0, v_0)(x)$ в краевых условиях (2.7) или (2.8) предполагается следующее:

$$g_j(x,t) \in L^\infty(S), \quad (u_0, v_0)(x) \in L^\infty(\overline{\Omega} \times \{0\}).$$

3. Принцип максимума

Теорема 3.1. *Пусть (u, v) — слабое решение задачи (2.1), (2.7) или (2.1), (2.8) с нулевыми правыми частями. Для функций $H_1 = u\alpha_1(x, u, v) + v$ и $H_2 = u\alpha_2(x, u, v) + v$ от (u, v) справедливы оценки*

$$\|H_1\|_{L_\infty(Q)} \le \|H_1\|_{L_\infty(\partial Q)}, \quad \|H_2\|_{L_\infty(Q)} \le \|H_2\|_{L_\infty(\partial Q)},$$

т. е. имеет место принцип максимума для комбинаций H_1 и H_2, являющихся функциями от u, v и x. Эти оценки могут быть разрешены относительно неизвестных u, v и

$$\|u\|_{L_\infty(Q)} \le C, \quad \|v\|_{L_\infty(Q)} \le C$$

с постоянной C, зависящей только от n, $L_{1,2}$, Q, $|g_{1,2}|_{\infty,(S)}$, $|u_0, v_0|_{\infty,(\Omega)}$, постоянных $\omega_{1,2}$, $A_{1,2}$ и не зависящей от u и v.

Доказательство. Сначала будем считать, что решение (u, v) системы (2.1) составлено из гладких функций, затем пополним множество всех таких функций по норме того пространства, в котором ищется решение исходной задачи. При этом граничные данные и правые части (см. ниже) также предполагаются достаточно гладкими.

Разобьем нашу область Q на равные $(n+1)$-мерные кубы $\{C_m\}$ с ребром 2δ. Если куб содержит границу области Q, то берется пересечение с областью: $C_m \cap Q$. Размер кубов будет впоследствии устремлен к нулю, а их число — к бесконечности. Зафиксируем в центре каждого такого куба точку (x, t), где для краткости опускаем зависимость от m. В этой точке введем локальную систему координат: $\{O, \vec{\varepsilon}, \eta\}$, $-\delta < \varepsilon_i < \delta$, $0 < \eta < 2\delta$. В каждом из кубов рассмотрим задачу для $(\tilde{u}, \tilde{v})$:

$$\begin{cases} \tilde{u}(x+\varepsilon, t+\eta)_\eta - \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i}(a_1(x+\varepsilon, u(x+\varepsilon, t+\eta), v(x+\varepsilon, t+\eta))\nabla_\varepsilon \tilde{u}(x+\varepsilon, t+\eta) \\ +b_1(x+\varepsilon, u(x+\varepsilon, t+\eta), v(x+\varepsilon, t+\eta))\nabla_\varepsilon \tilde{v}(x+\varepsilon, t+\eta)) \\ = f_1(x+\varepsilon, t+\eta, u(x+\varepsilon, t+\eta), v(x+\varepsilon, t+\eta)), \\ \tilde{v}(x+\varepsilon, t+\eta)_\eta - \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i}(a_2(x+\varepsilon, u(x+\varepsilon, t+\eta), v(x+\varepsilon, t+\eta))\nabla_\varepsilon \tilde{u}(x+\varepsilon, t+\eta) \\ +b_2(x+\varepsilon, u(x+\varepsilon, t+\eta), v(x+\varepsilon, t+\eta))\nabla_\varepsilon \tilde{v}(x+\varepsilon, t+\eta)) \\ = f_2(x+\varepsilon, t+\eta, u(x+\varepsilon, t+\eta), v(x+\varepsilon, t+\eta)), \end{cases} \tag{3.1}$$

где функции в правой части таковы, что $f_{1,2}(x+\varepsilon, t+\eta) \to f_{1,2}(x, t)$ при $\varepsilon \to 0$ по норме L^2 (индексы ε и η обозначают дифференцирование по этим переменным). Краевые условия $(\tilde{u}, \tilde{v})(x+\varepsilon, t+\eta)$ равны заданным краевым и начальным условиям, если куб содержит часть границы ∂Q, или

$$\begin{aligned} &\alpha_1(m-1, u, v)\tilde{u}(x_{m-1}+\varepsilon, t_{m-1}+\eta) + \tilde{v}(x_{m-1}+\varepsilon, t_{m-1}+\eta) \\ &\quad = \alpha_1(m, u, v)\tilde{u}(x_m+\varepsilon, t_m+\eta) + \tilde{v}(x_m+\varepsilon, t_m+\eta), \\ &\alpha_2(m-1, u, v)\tilde{u}(x_{m-1}+\varepsilon, t_{m-1}+\eta) + \tilde{v}(x_{m-1}+\varepsilon, t_{m-1}+\eta) \\ &\quad = \alpha_2(m, u, v)\tilde{u}(x_m+\varepsilon, t_m+\eta) + \tilde{v}(x_m+\varepsilon, t_m+\eta) \end{aligned} \tag{3.2}$$

на гранях соседних кубов C_{m-1} и C_m, перпендикулярных оси времени, и

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1(m-1,u,v)[a_1\nabla_\varepsilon\tilde u(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)+b_1\nabla_\varepsilon\tilde v(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)]\\
&\qquad+[a_2\nabla_\varepsilon\tilde u(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)+b_2\nabla_\varepsilon\tilde v(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)],\vec\nu)\\
&\qquad=(\alpha_1(m,u,v)[a_1\nabla_\varepsilon\tilde u(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)+b_1\nabla_\varepsilon\tilde v(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)]\\
&\qquad\quad+[a_2\nabla_\varepsilon\tilde u(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)+b_2\nabla_\varepsilon\tilde v(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)],\vec\nu),\\
&(\alpha_2(m-1,u,v)[a_1\nabla_\varepsilon\tilde u(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)+b_1\nabla_\varepsilon\tilde v(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)]\\
&\qquad+[a_2\nabla_\varepsilon\tilde u(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)+b_2\nabla_\varepsilon\tilde v(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)],\vec\nu)\\
&\qquad=(\alpha_2(m,u,v)[a_1\nabla_\varepsilon\tilde u(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)+b_1\nabla_\varepsilon\tilde v(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)]\\
&\qquad\quad+[a_2\nabla_\varepsilon\tilde u(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)+b_2\nabla_\varepsilon\tilde v(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)],\vec\nu)
\end{aligned}\tag{3.3}$$

на гранях соседних кубов, параллельных оси времени, т. е. имеет место сращивание. Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon\to0,\,\eta\to0}(\tilde u,\tilde v,u,v)(x+\varepsilon,t+\eta)_{\varepsilon_i}=(\tilde u,\tilde v,u,v)(x,t)_{x_i},$$
$$\lim_{\varepsilon\to0,\,\eta\to0}(\tilde u,\tilde v,u,v)(x+\varepsilon,t+\eta)_{\eta}=(\tilde u,\tilde v,u,v)(x,t)_{t}.$$

Так как матрица коэффициентов системы предполагается невырожденной, (3.2), (3.3) переходят в условия Неймана:

$$\tilde u(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)=\tilde u(x_m+\varepsilon,t_m+\eta),\quad \tilde v(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)=\tilde v(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)$$

и

$$(\nabla_\varepsilon\tilde u(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta),\vec\nu)=(\nabla_\varepsilon\tilde u(x_m+\varepsilon,t_m+\eta),\vec\nu),$$
$$(\nabla_\varepsilon\tilde v(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta),\vec\nu)=(\nabla_\varepsilon\tilde v(x_m+\varepsilon,t_m+\eta),\vec\nu)$$

при $(x_{m-1},t_{m-1})\to(x_m,t_m)$. Поэтому решение задачи для (3.1) стремится к решению задачи для (2.1) при $\delta\to0$ в силу единственности решения линейной задачи для $(\tilde u,\tilde v)$.

Умножим первое уравнение системы (3.1) на $\alpha(x,u(x,t),v(x,t))$ и сложим со вторым. Здесь и далее α есть α_1 или α_2. Умножим полученное соотношение на пробную функцию $\varphi\equiv\operatorname{sgn}H(|H|-k)_+$, $H=\alpha(x,u(x,t),v(x,t))\tilde{\tilde u}(x+\varepsilon,t+\eta)+\tilde{\tilde v}(x+\varepsilon,t+\eta)$ с $k\ge k_0=\max[\|\alpha(x,g_1(x,t),g_2(x,t))g_1+g_2\|_{L^\infty(S)},\|\alpha(x,u_0(x,t),v_0(x,t))u_0+v_0\|_{L^\infty(\Omega)}]$ (для задачи Дирихле) или с $k\ge k_0=\max[\|\alpha(x,u_0(x,t),v_0(x,t))u_0+v_0\|_{L^\infty(\Omega)}]$ (для задачи Неймана), $(x,t)\in\partial Q$, где $(\tilde{\tilde u},\tilde{\tilde v})$ являются решением следующей задачи:

$$\begin{cases}
\tilde{\tilde u}(x+\varepsilon,t+\eta)_\eta-\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}(a_1(x+\varepsilon,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta))\nabla_\varepsilon\tilde{\tilde u}(x+\varepsilon,t+\eta)\\
+b_1(x+\varepsilon,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta))\nabla_\varepsilon\tilde{\tilde v}(x+\varepsilon,t+\eta))\\
=f_1(x+\varepsilon,t+\eta,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta)),\\
\tilde{\tilde v}(x+\varepsilon,t+\eta)_\eta-\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}(a_2(x+\varepsilon,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta))\nabla_\varepsilon\tilde{\tilde u}(x+\varepsilon,t+\eta)\\
+b_2(x+\varepsilon,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta))\nabla_\varepsilon\tilde{\tilde v}(x+\varepsilon,t+\eta))\\
=f_2(x+\varepsilon,t+\eta,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta)),
\end{cases}\tag{3.4}$$

с начально-краевыми условиями, сшивающими решения на границах соседних кубов C_m и C_{m-1}:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(m-1,u,v)\tilde{\tilde u}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)+\tilde{\tilde v}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)\\
&\qquad=\alpha_1(m,u,v)\tilde{\tilde u}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)+\tilde{\tilde v}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta),\\
&\alpha_2(m-1,u,v)\tilde{\tilde u}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)+\tilde{\tilde v}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)\\
&\qquad=\alpha_2(m,u,v)\tilde{\tilde u}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)+\tilde{\tilde v}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta).
\end{aligned}\tag{3.5}$$

Так же, как и для решения задачи (3.1), (3.3), решение (3.4), (3.5), очевидно, стремится к (u,v) при $\delta\to 0$.

Проинтегрируем получившееся выражение по каждому из кубов $\{C_m\}$ по переменным $\vec{\varepsilon}$ и η. Просуммируем все такие интегралы по всем кубам. В результате получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
&\sum_{C_m}\int\limits_{C_m}\frac{d}{d\eta}(|H|-k)^2\chi_{A(k)}\\
&\quad+\sum_{C_m}\int\limits_{C_m}\langle[a_1(x+\varepsilon,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta))\alpha(x,u(x,t),v(x,t))\\
&\qquad\qquad+a_2(x+\varepsilon,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta))]\nabla_\varepsilon\tilde{u}\\
&\qquad+[b_1(x+\varepsilon,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta))\alpha(x,u(x,t),v(x,t))\\
&\qquad+b_2(x+\varepsilon,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta))]\nabla_\varepsilon\tilde{v}\rangle\nabla_\varepsilon(|H|-k)\chi_{A(k)}\\
&\quad-\sum_{C_m}\int\limits_{C_m}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}(\langle[a_1(x+\varepsilon,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta))\alpha(x,u(x,t),v(x,t))\\
&\qquad\qquad+a_2(x+\varepsilon,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta))]\nabla_\varepsilon\tilde{u}\\
&\qquad+[b_1(x+\varepsilon,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta))\alpha(x,u(x,t),v(x,t))\\
&\qquad+b_2(x+\varepsilon,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta))]\nabla_\varepsilon\tilde{v}\rangle(|H|-k))\chi_{A(k)}\\
&\qquad\qquad\qquad=\int\limits_{C_m}(f_1\alpha+f_2)\operatorname{sgn}H(|H|-k)\chi_{A(k)},
\end{aligned}$$

где $\chi_{A(k)}$ — характеристическая функция множества $A(k,t)=\{x\in\Omega\mid(H-k)_+\neq 0\}$ и в подынтегральных выражениях для краткости опустили зависимость от m. Условия (3.2), (3.3) и (3.5) на границе смежных кубов специально выбраны такими, чтобы интеграл по поверхности в этом выражении всегда был тождественно равен нулю. Принимая во внимание предположения (2.2) и (2.6) о коэффициентах, а также тот факт, что $a_j,b_j(x+\varepsilon,u(x+\varepsilon,t+\eta),v(x+\varepsilon,t+\eta))|_{\varepsilon=0}=a_j,b_j(x,u(x,t),v(x,t))$ в каждой точке области, и переходя к пределу $\delta\to 0$, получим оценку

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\frac{d}{dt}(|H|-k)^2\chi_{A(k)}+\int\limits_Q\Lambda|\alpha\nabla u+\nabla v|^2\chi_{A(k)}\le C_1\int\limits_Q|f|\operatorname{sgn}H(|H|-k)\chi_{A(k)},\tag{3.6}$$

где обозначено $|f|=|f_1|+|f_2|$. Подчеркнем, что все поверхностные интегралы исчезнут: на краю области — в силу условий Неймана или Дирихле и начального условия, на границе смежных кубов — в силу условий (3.2), (3.3) и (3.5). Если правая часть системы (2.1) нулевая, то сразу получим из соотношения (3.6) оценки для двух линейно независимых функций H_1 и H_2:

$$-k_1\le H_1=\alpha_1u+v\le k_1,\quad -k_2\le H_2=\alpha_2u+v\le k_2.$$

На основании условий (2.3)–(2.5) эти соотношения можно разрешить относительно неизвестных u и v и получить оценки для них через их значения на параболической границе области (для задачи Дирихле) или через начальные условия (для задачи Неймана). Такие оценки назовем *принципом максимума для системы уравнений* (2.1).

Если же правые части системы ненулевые, то потребуются некоторые дополнительные рассуждения. □

4. Ограниченность

Для случая ненулевых правых частей имеет место

Теорема 4.1. *Пусть (u, v) — слабое решение задачи* (2.1), (2.7) *или* (2.1), (2.8). *Для двух функций $H_1 = u\alpha_1(x, u, v) + v + (2n\Lambda_1)^{-1}w_1$ и $H_2 = u\alpha_2(x, u, v) + v + (2n\Lambda_2)^{-1}w_2$ от (u, v) с $w_1 = (\alpha_1 f_1 + f_2)[x^2 - 2\operatorname{diam}\Omega|x|]$ и $w_2 = (\alpha_2 f_1 + f_2)[x^2 - 2\operatorname{diam}\Omega|x|]$ справедливы оценки*

$$\|H_1\|_{L_\infty(Q)} \le \|H_1\|_{L_\infty(\partial Q)}, \quad \|H_2\|_{L_\infty(Q)} \le \|H_2\|_{L_\infty(\partial Q)}.$$

Эти оценки могут быть разрешены относительно неизвестных u, v и

$$\|u\|_{L_\infty(Q)} \le C, \quad \|v\|_{L_\infty(Q)} \le C$$

с постоянной C, зависящей только от n, $L_{1,2}$, Q, $|g_{1,2}|_{\infty,(S)}$, $|u_0, v_0|_{\infty,(\Omega)}$, постоянных $\omega_{1,2}$, $A_{1,2}$, $f_{1,2}$ и не зависящей от u и v.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3.1, делим область на кубы. В каждом кубе C_m рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} w = [\alpha(m, u, v) f_1(x_m, t_m, u(x_m, t_m), v(x_m, t_m)) \\ + f_2(x_m, t_m, u(x_m, t_m), v(x_m, t_m))]_+ \{(x_m + \varepsilon)^2 - 2|x_m + \varepsilon| \operatorname{diam}\Omega\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что каждая w удовлетворяет уравнению

$$(2n\Lambda(m, u, v))^{-1} w_\eta - (2n)^{-1}\Delta_\varepsilon w = -(\alpha f_1 + f_2)_+ \tag{4.1}$$

в каждом кубе C_m. Рассмотрим систему (3.1) с такими начально-краевыми условиями:

$$\begin{gathered} \alpha_1(m-1, u, v)\tilde{u}(x_{m-1} + \varepsilon, t_{m-1} + \eta) + \tilde{v}(x_{m-1} + \varepsilon, t_{m-1} + \eta) \\ +(2n\Lambda_1(m-1))^{-1} w_1(m-1) \\ = \alpha_1(m, u, v)\tilde{u}(x_m + \varepsilon, t_m + \eta) + \tilde{v}(x_m + \varepsilon, t_m + \eta) + (2n\Lambda_1(m))^{-1} w_1(m), \\ \alpha_2(m-1, u, v)\tilde{u}(x_{m-1} + \varepsilon, t_{m-1} + \eta) + \tilde{v}(x_{m-1} + \varepsilon, t_{m-1} + \eta) \\ +(2n\Lambda_2(m-1))^{-1} w_2(m-1) \\ = \alpha_2(m, u, v)\tilde{u}(x_m + \varepsilon, t_m + \eta) + \tilde{v}(x_m + \varepsilon, t_m + \eta) + (2n\Lambda_2(m))^{-1} w_2(m) \end{gathered} \tag{4.2}$$

на внутренних гранях соседних кубов C_{m-1} и C_m, перпендикулярных оси времени, и

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1(m-1,u,v)[a_1\nabla_\varepsilon\tilde{u}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)+b_1\nabla_\varepsilon\tilde{v}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)]\\
&\quad+[a_2\nabla_\varepsilon\tilde{u}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)+b_2\nabla_\varepsilon\tilde{v}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)]\\
&\quad+(2n\Lambda_1(m-1))^{-1}\nabla_\varepsilon w_1(m-1),\vec{\nu})\\
&=(\alpha_1(m,u,v)[a_1\nabla_\varepsilon\tilde{u}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)+b_1\nabla_\varepsilon\tilde{v}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)]\\
&\quad+[a_2\nabla_\varepsilon\tilde{u}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)+b_2\nabla_\varepsilon\tilde{v}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)]\\
&\quad+(2n\Lambda_1(m))^{-1}\nabla_\varepsilon w_1(m),\vec{\nu}),\\
&(\alpha_2(m-1,u,v)[a_1\nabla_\varepsilon\tilde{u}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)+b_1\nabla_\varepsilon\tilde{v}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)]\\
&\quad+[a_2\nabla_\varepsilon\tilde{u}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)+b_2\nabla_\varepsilon\tilde{v}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)]\\
&\quad+(2n\Lambda_2(m-1))^{-1}\nabla_\varepsilon w_2(m-1),\vec{\nu})\\
&=(\alpha_2(m,u,v)[a_1\nabla_\varepsilon\tilde{u}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)+b_1\nabla_\varepsilon\tilde{v}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)]\\
&\quad+[a_2\nabla_\varepsilon\tilde{u}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)+b_2\nabla_\varepsilon\tilde{v}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)]\\
&\quad+(2n\Lambda_2(m))^{-1}\nabla_\varepsilon w_2(m),\vec{\nu})
\end{aligned}\tag{4.3}$$

на внутренних гранях соседних кубов, параллельных оси времени; на внешних же гранях кубов, содержащих часть границы области, принимаются условия (2.7) или (2.8). Сложим уравнение для w (4.1) с суммой первого, умноженного на α, и второго уравнений системы (3.1) в каждом кубе. Проинтегрируем, как и выше, полученный результат с пробной функцией $\varphi\equiv(H-k)_+$ с $H=\alpha\tilde{\tilde{u}}+\tilde{\tilde{v}}+(2n\Lambda)^{-1}w$, где $(\tilde{\tilde{u}},\tilde{\tilde{v}})$ — решение задачи (3.4) с начально-краевыми условиями

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(m-1,u,v)\tilde{\tilde{u}}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)+\tilde{\tilde{v}}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)\\
&\quad+(2n\Lambda_1(m-1))^{-1}w_1(m-1)\\
&=\alpha_1(m,u,v)\tilde{\tilde{u}}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)+\tilde{\tilde{v}}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)+(2n\Lambda_1(m))^{-1}w_1(m),\\
&\alpha_2(m-1,u,v)\tilde{\tilde{u}}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)+\tilde{\tilde{v}}(x_{m-1}+\varepsilon,t_{m-1}+\eta)\\
&\quad+(2n\Lambda_2(m-1))^{-1}w_2(m-1)\\
&=\alpha_2(m,u,v)\tilde{\tilde{u}}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)+\tilde{\tilde{v}}(x_m+\varepsilon,t_m+\eta)+(2n\Lambda_2(m))^{-1}w_2(m)
\end{aligned}\tag{4.4}$$

на границе внутренних соседних кубов C_m и C_{m-1}; на внешних же гранях кубов, содержащих часть границы области, принимаются условия (2.7) или (2.8); k — максимальное значение $\alpha\tilde{\tilde{u}}+\tilde{\tilde{v}}+(2n\Lambda)^{-1}w$ на параболической границе (для задачи Дирихле) или максимальное начальное значение (для задачи Неймана). Просуммируем по всем кубам. Проинтегрировав по частям и устремив размер кубов к нулю, получим неравенство, аналогичное (3.6):

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega\frac{d}{dt}(H-k)^2\chi_{A(k)}+\int_Q\Lambda|\alpha\nabla u+\nabla v+(2n\Lambda)^{-1}\nabla w|^2\chi_{A(k)}\le 0,\tag{4.5}$$

где $\chi_{A(k)}$ — характеристическая функция множества $A(k,t)=\{x\in\Omega\mid(H-k)_+\neq 0\}$. При этом важно пояснить, каким образом исчезает поверхностный интеграл по внешней границе области Q. Для задачи Дирихле это очевидно. В случае же условия Неймана значение $(\nabla w,\vec{\nu})=(n)^{-1}[\alpha f_1+f_2]_+(\{|x|-\operatorname{diam}\Omega\}\vec{x}/|x|,\vec{\nu})$ можно всегда сделать неположительным надлежащим выбором системы координат $(\mathscr{O}, \vec{X})$, если область Ω звездная. Если же область Ω незвездная, то ее всегда можно разделить на совокупность звездных так, чтобы разность скалярных произведений $(\vec{x_1}, \vec{\nu}) - (\vec{x_2}, \vec{\nu})$ на границах между каждыми смежными областями 1 и 2 была неотрицательной.

Аналогично используем функцию

$$w = [\alpha(m,u,v) f_1(x_m, t_m, u(x_m,t_m), v(x_m,t_m)) \\ + f_2(x_m, t_m, u(x_m,t_m), v(x_m,t_m))]_- \{(x_m+\varepsilon)^2 - 2|x_m+\varepsilon| \operatorname{diam}\Omega\}$$

и пробную функцию $(H-k)_-$ с k-минимумом H на границе. Таким образом, приходим к оценкам

$$-k_1 \le H_1 = \alpha_1 u + v + (2n\Lambda_1)^{-1} w_1 \le k_1; \quad -k_2 \le H_2 = \alpha_2 u + v + (2n\Lambda_2)^{-1} w_2 \le k_2.$$

Ясно, как отсюда получить оценки для неизвестных u, v. $\square$

5. Принцип сравнения

Нашей последней теоремой для параболической системы является

Теорема 5.1. *Пусть* (u,v) — *слабое решение задачи* (2.1), (2.7) *или* (2.1), (2.8). *Для двух функций* $H_1 = u\alpha_1(x,u,v) + v + (2n\Lambda_1)^{-1} w_1$ *и* $H_2 = u\alpha_2(x,u,v) + v + (2n\Lambda_2)^{-1} w_2$ *от* (u,v) *с* w_1 *и* w_2, *являющимися решениями уравнений*

$$(n\Lambda_1(m,u,v))^{-1} w_{1\eta} - (2n)^{-1} \Delta_\varepsilon w_1 = M_1 \tag{5.1}$$

и

$$(n\Lambda_2(m,u,v))^{-1} w_{2\eta} - (2n)^{-1} \Delta_\varepsilon w_2 = M_2, \tag{5.2}$$

где $M_1 \le -(\alpha_1 f_1 + f_2)$, $M_2 \le -(\alpha_2 f_1 + f_2)$, *справедливы следующие оценки:*

$$\|H_1\|_{L_\infty(Q)} \le \|H_1\|_{L_\infty(\partial Q)}; \quad \|H_2\|_{L_\infty(Q)} \le \|H_2\|_{L_\infty(\partial Q)}.$$

Эти оценки могут быть разрешены относительно неизвестных u, v *и*

$$\|u\|_{L_\infty(Q)} \le C, \quad \|v\|_{L_\infty(Q)} \le C,$$

с постоянной C, *зависящей только от* n, $L_{1,2}$, Q, $|g_{1,2}|_{\infty,(S)}$, $|u_0, v_0|_{\infty,(\Omega)}$, *постоянных* $\omega_{1,2}$, $A_{1,2}$, $f_{1,2}$ *и не зависящей от* u *и* v.

Эта теорема доказывается аналогично теореме 4.1.

6. Два примера

К сожалению, нам неизвестны характерные примеры полностью недиагональных систем двух уравнений. Однако мы знаем примеры треугольных систем нелинейных уравнений с данными Неймана, для которых наш метод позволяет получить некоторую информацию о решении.

Пример 1. Система, описывающая хемотаксис, т. е. движение микроорганизмов в присутствии некоторых химикалий:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla(u\nabla v) = 0, \\ v_t - D\Delta v = -\beta v + u, \end{cases} \quad (x,t) \in Q, \tag{6.1}$$

где $u, v \ge 0$, $\beta > 1$. Члены Δu и Δv описывают случайное блуждание, $\nabla(u\nabla v)$ — собственно хемотаксис, $-\beta v$ — разложение вещества-хемоаттрактанта, u — его производство. Член, описывающий хемотаксис, может быть как положительным, так и отрицательным, т. е. микроорганизмы могут как стремиться к определенному веществу, так и избегать его. Мы рассматриваем только случай притяжения. Для данной системы характеристической системой (2.2) является следующая система:

$$\begin{cases} \alpha + 0\delta = \Lambda\alpha, \\ -\alpha u + D\delta = \Lambda\delta, \end{cases}$$

которая удовлетворяется при $\alpha = (1 - D)$, $\delta = -u$, $\Lambda = 1$. Можно ввести функцию $H(u, v) \equiv \alpha u + \delta v + (2n\Lambda)^{-1} w \equiv (1 - D)u - uv + (2n)^{-1} u^2 \{x^2 - |x| \operatorname{diam} \Omega\}$, для которой получаем $L^\infty(Q)$-оценки через ее значения на параболической границе:

$$k_1 \le (1 - D)u - uv + au^2 \le k_2,$$

$a = (2n)^{-1}\{x^2 - |x| \operatorname{diam} \Omega\}$. Анализируя решения первого квадратичного неравенства:

$$u \in [u_1, u_2] \cap [0, +\infty); \quad u_{1,2} = \frac{(-v - 1 + D) \pm \sqrt{(-v - 1 + D)^2 + 4ak_1}}{2a},$$

получим оценку сверху для u. Условия разрешимости этого неравенства дают условия существования глобально ограниченных во времени слабых решений краевой задачи для данной системы. Легко заметить, что при этом оценка для u зависит от выбора начала координат, и если оно выбрано посередине области $\Omega(\operatorname{dist}[(\mathscr{O}, \partial\Omega] \le \operatorname{diam} \Omega/2)$, то в нуле возникает сингулярность. Однако эту проблему легко обойти смещением начала координат на малое $\overrightarrow{\Delta x}$ и получением повторных оценок в новом базисе, при этом оценка окажется зависящей от $|\overrightarrow{\Delta x}|$. После этого второе уравнение системы даст оценку для v.

Пример 2. Система из эпидемиологии:

$$\begin{cases} u_t - \theta\Delta u = -\alpha\beta u\Delta v - \beta uv, \\ v_t - \varphi\Delta v = \alpha\beta u\Delta v + \beta uv - \lambda v, \end{cases} \quad (x, t) \in Q, \tag{6.2}$$

где $u, v \ge 0$, $\theta, \varphi, \lambda, \beta > 0$, $\varphi > \theta$.

Для данной системы характеристической системой (2.2) является следующая система:

$$\begin{cases} \delta\theta + 0 = \Lambda\delta, \\ \delta(-\alpha\beta u) + (\varphi + \alpha\beta u) = \Lambda, \end{cases}$$

которая удовлетворяется при $\delta = \left(\frac{\varphi - \theta}{\alpha\beta}\right)\frac{1}{u} + 1$, $\Lambda = \theta$. Можно ввести функцию $H(u, v) \equiv \delta u + v \equiv \left(\frac{\varphi - \theta}{\alpha\beta}\right) + u + v$, для которой получаются $L^\infty(Q)$-оценки через ее начальные значения, откуда следуют оценки для $\|u\|_\infty$ и $\|v\|_\infty$.

Замечание 2. Хотя для этих двух систем не выполнены условия ограниченности на коэффициенты, справедливость оценок для них легко обосновать стандартным способом, аппроксимируя гладкими функциями с последующим переходом к пределу, в силу равномерности полученных оценок.

Замечание 3. Одной функции H оказывается достаточно для треугольной системы.

7. Эллиптический случай

Обратимся к неэволюционной версии системы (2.1) с данными Дирихле. Справедливы следующие три теоремы.

Теорема 7.1. *Пусть (u, v) — слабое решение задачи (2.1) с данными Дирихле и нулевыми правыми частями. Для функций $H_1 = u\alpha_1(x, u, v) + v$ и $H_2 = u\alpha_2(x, u, v) + v$ от (u, v) справедливы оценки*

$$\|H_1\|_{L_\infty(\Omega)} \le \|H_1\|_{L_\infty(\partial\Omega)}, \quad \|H_2\|_{L_\infty(\Omega)} \le \|H_2\|_{L_\infty(\partial\Omega)}$$

т. е. имеет место принцип максимума для комбинаций H_1 и H_2, являющихся функциями от u, v и x. Эти оценки могут быть разрешены относительно неизвестных u, v и

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \le C, \quad \|v\|_{L_\infty(\Omega)} \le C$$

с постоянной C, зависящей только от n, $L_{1,2}$, Ω, $|g_{1,2}|_{\infty,(\Omega)}$, постоянных $\omega_{1,2}$, $A_{1,2}$ и не зависящей от u и v.

Теорема 7.2. *Пусть (u, v) — слабое решение задачи (2.1) с данными Дирихле. Для двух функций $H_1 = u\alpha_1(x, u, v) + v + (2n\Lambda_1)^{-1}w_1$ и $H_2 = u\alpha_2(x, u, v) + v + (2n\Lambda_2)^{-1}w_2$ от (u, v) с $w_1 = (\alpha_1 f_1 + f_2)[x^2 - 2\,\mathrm{diam}\,\Omega|x|]$ и $w_2 = (\alpha_2 f_1 + f_2)[x^2 - 2\,\mathrm{diam}\,\Omega|x|]$ справедливы оценки*

$$\|H_1\|_{L_\infty(\Omega)} \le \|H_1\|_{L_\infty(\partial\Omega)}, \quad \|H_2\|_{L_\infty(\Omega)} \le \|H_2\|_{L_\infty(\partial\Omega)}.$$

Эти оценки могут быть разрешены относительно неизвестных u, v и

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \le C, \quad \|v\|_{L_\infty(\Omega)} \le C$$

с постоянной C, зависящей только от n, $L_{1,2}$, Ω, $|g_{1,2}|_{\infty,(\Omega)}$, постоянных $\omega_{1,2}$, $A_{1,2}$, $f_{1,2}$ и не зависящей от u и v.

Теорема 7.3. *Пусть (u, v) — слабое решение задачи (2.1) с данными Дирихле. Для двух функций $H_1 = u\alpha_1(x, u, v) + v + (2n\Lambda_1)^{-1}w_1$ и $H_2 = u\alpha_2(x, u, v) + v + (2n\Lambda_2)^{-1}w_2$ от (u, v) с w_1 и w_2, являющимися решениями уравнений*

$$-(2n)^{-1}\Delta_\varepsilon w_1 = M_1 \tag{7.1}$$

и

$$-(2n)^{-1}\Delta_\varepsilon w_2 = M_2, \tag{7.2}$$

где $M_1 \le -(\alpha_1 f_1 + f_2)$, $M_2 \le -(\alpha_2 f_1 + f_2)$, справедливы следующие оценки:

$$\|H_1\|_{L_\infty(\Omega)} \le \|H_1\|_{L_\infty(\partial\Omega)}, \quad \|H_2\|_{L_\infty(\Omega)} \le \|H_2\|_{L_\infty(\partial\Omega)}.$$

Эти оценки могут быть разрешены относительно неизвестных u, v и

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \le C, \quad \|v\|_{L_\infty(\Omega)} \le C$$

с постоянной C, зависящей только от n, $L_{1,2}$, Ω, $|g_{1,2}|_{\infty,(\Omega)}$, постоянных $\omega_{1,2}$, $A_{1,2}$, $f_{1,2}$ и не зависящей от u и v.

Доказываются эти три теоремы аналогично теоремам 3.1–5.1 с той разницей, что в (3.6) и (4.5) мы не будем располагать временным членом, а располагаем только слагаемым с градиентами, откуда получим

$$\alpha_1 \nabla u + \nabla v \equiv 0, \quad \alpha_2 \nabla u + \nabla v \equiv 0$$

или

$$\alpha_1 \nabla u + \nabla v + (2n\Lambda_1)^{-1}\nabla w_1 \equiv 0, \quad \alpha_2 \nabla u + \nabla v + (2n\Lambda_2)^{-1}\nabla w_2 \equiv 0.$$

Последние соотношения легко разрешимы относительно градиентов ∇u и ∇v, интегрированием получатся оценки для u и v.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
3. *Кошелев А. И.* Регулярность решений эллиптических уравнений и систем. М.: Наука, 1986.
4. *Кошелев А. И., Челкак С. И.* Регулярность решений некоторых краевых задач для квазилинейных эллиптических и параболических систем. С.-П.: Изд-во СПбГУ, 2000.
5. *Кошелев А. И.* Применение универсального итерационного процесса к некоторым задачам механики // Вестн. СПбГУ. Математика, механика, астрономия. 2008. Сер. 1. № 2. С. 47–56.
6. *Portnyagin D.* A generalization of the maximum principle to nonlinear parabolic systems // Ann. Pol. Math. 2003. V. 81, N 3. P. 217–236.
7. *Папин А. А.* О локальной разрешимости краевой задачи тепловой двухфазной фильтрации // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 1. С. 114–126.

Статья поступила 11 ноября 2010 г.

Портнягин Дмитрий Валерьевич
Институт физики конденсированных систем
Национальной академии наук Украины,
ул. Свенцицкого, 1, Львов 79011, Украина
port@icmp.lviv.ua