Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 515.17+517.545

ПРОСТРАНСТВА МЕРОМОРФНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА НА КОНЕЧНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. А. Казанцева, В. В. Чуешев

Аннотация. В предыдущих работах второго автора начато построение общей теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности для произвольных характеров. Теория функций на компактных римановых поверхностях существенно отличается от теории функций на конечных римановых поверхностях. В настоящей работе начато построение общей теории функций на переменных конечных римановых поверхностях для мультипликативных мероморфных функций и дифференциалов. Построены все виды элементарных дифференциалов Прима для любых характеров. Найдены размерности и построены явные базисы в двух важных фактор-пространствах дифференциалов Прима. Как следствие находятся размерность и базис в первой голоморфной группе когомологий де Рама дифференциалов Прима для любых характеров.

Ключевые слова: пространство Тейхмюллера конечных римановых поверхностей, дифференциал Прима, векторное расслоение, группа характеров, многообразие Якоби, мультипликативная точка Вейерштрасса.

Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима для случая специальных характеров на компактной римановой поверхности нашла приложения в геометрической теории функций комплексного переменного, аналитической теории чисел и уравнениях математической физики [1–9]. В [2] начато построение общей теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности для произвольных характеров. Теория функций на компактных римановых поверхностях существенно отличается от теории функций на конечных римановых поверхностях даже для класса однозначных мероморфных функций и абелевых дифференциалов. Ряд основных пространств функций и дифференциалов на конечной римановой поверхности F' типа (g, n), $g > 1$, $n > 0$, будут бесконечномерны.

В настоящей работе начато построение общей теории функций на конечных римановых поверхностях для мультипликативных мероморфных функций и дифференциалов. Построены все виды элементарных дифференциалов Прима для любых характеров. Найдены размерности двух важных фактор пространств. Как следствие находится размерность первой голоморфной группы когомологий де Рама дифференциалов Прима для любых характеров. В указанных фактор-пространствах построены явные базисы.

Работа поддержана грантами: АВЦП (2.1.1.3707); ФЦП (№-02.740.11.0457); РФФИ (09–01–00255); НШ (7347.2010.1).

§ 1. Предварительные сведения

Пусть F — фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$ с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а F_0 — компактная риманова поверхность с фиксированной комплексно-аналитической структурой на F. Зафиксируем различные точки $P_1, \dots, P_n \in F$. Пусть $F' = F \backslash \{P_1, \dots, P_n\}$ — поверхность типа (g, n), $n \geq 1$, $g \geq 2$, и Γ' — фуксова группа первого рода, инвариантно действующая в круге $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ и униформизирующая поверхность F'_0, т. е. $F'_0 = U/\Gamma'$, которая имеет алгебраическое представление

$$\Gamma' = \left\langle A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g, \gamma_1, \dots, \gamma_n : \prod_{j=1}^{g} [A_j, B_j]\gamma_1 \dots \gamma_n = I \right\rangle,$$

где $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$ для $A, B \in \Gamma'$, а I — тождественное отображение. Здесь A_j, B_j, $j = 1, \dots, g$, — гиперболические, а $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — параболические элементы [6].

Любая другая комплексно-аналитическая структура на F' задается некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F'_0, т. е. выражением вида $\mu(z)d\bar{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F'_0, где $\mu(z)$ — комплекснозначная функция на F'_0 и $\|\mu\|_{L_\infty(F'_0)} < 1$. Эту структуру на F' будем обозначать через F'_μ. Ясно, что $\mu = 0$ соответствует F'_0. Пусть $M(F')$ — множество всех комплексно-аналитических структур на F' с топологией C^∞ сходимости на F'_0, $\mathrm{Diff}^+(F')$ —группа всех сохраняющих ориентацию гладких диффеоморфизмов поверхности F' на себя, которые оставляют неподвижными все проколы, и $\mathrm{Diff}_0(F')$ — нормальная подгруппа в $\mathrm{Diff}^+(F')$, состоящая из всех диффеоморфизмов, гомотопных тождественному диффеоморфизму на F'_0. Группа $\mathrm{Diff}^+(F')$ действует на $M(F')$ по правилу $\mu \to f^*\mu$, где $f \in \mathrm{Diff}^+(F'), \mu \in M(F')$. Тогда пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}_{g,n}(F') = \mathbf{T}_{g,n}(F'_0)$ есть фактор-пространство $M(F')/\mathrm{Diff}_0(F')$ [10, 11].

Так как отображение $U \to F'_0 = U/\Gamma'$ — локальный диффеоморфизм, любой дифференциал Бельтрами μ на F'_0 поднимается до Γ'-дифференциала Бельтрами μ на U, т. е. $\mu \in L_\infty(U)$,

$$\|\mu\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{z \in U} |\mu(z)| < 1, \quad \mu(T(z))\overline{T'(z)}/T'(z) = \mu(z), \quad z \in U,\ T \in \Gamma'.$$

Если Γ'-дифференциал μ на U продолжить на $\overline{\mathbf{C}} \backslash U$, положив $\mu = 0$, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $w^\mu : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ с неподвижными точками $+1, -1, i$, который является решением уравнения Бельтрами $w_{\bar{z}} = \mu(z)w_z$. Отображение $T \to T^\mu = w^\mu T(w^\mu)^{-1}$ задает изоморфизм группы Γ' на квазифуксову группу

$$\Gamma'_\mu = w^\mu \Gamma'(w^\mu)^{-1} = \left\langle A_1^\mu, \dots, B_g^\mu, \gamma_1^\mu, \dots, \gamma_n^\mu : \prod_{j=1}^{g} \left[A_j^\mu, B_j^\mu\right] \gamma_1^\mu \dots \gamma_n^\mu = I \right\rangle.$$

Классические результаты Л. Альфорса, Л. Берса [10] и других авторов утверждают, что

1) $\mathbf{T}_{g,n}(F')$ является комплексным многообразием размерности $3g - 3 + n$ при $g \geq 2$, $n \geq 1$;

2) $\mathbf{T}_{g,n}(F')$ имеет единственную комплексно-аналитическую структуру такую, что естественное отображение $\Psi : M(F') \to \mathbf{T}_{g,n}(F')$ будет голоморфным, при этом Ψ имеет только локальные голоморфные сечения;

3) элементы из Γ'_μ голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ конечных римановых поверхностей F'_μ.

Два Γ'-дифференциала Бельтрами μ и ν конформно эквивалентны, если и только если $w^\mu T(w^\mu)^{-1} = w^\nu T(w^\nu)^{-1}$, $T \in \Gamma'$. Естественно, что выбор образующих $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g \cup \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ в $\pi_1(F')$ эквивалентен выбору системы образующих $\{a_k(\mu), b_k(\mu)\}_{k=1}^g \cup \{\gamma_1(\mu), \ldots, \gamma_n(\mu)\}$ в $\pi_1(F'_\mu)$ и $\{A_j^\mu, B_j^\mu\}_{j=1}^g \cup \{\gamma_1^\mu, \ldots, \gamma_n^\mu\}$ в Γ'_μ для любого $[\mu]$ из $\mathbf{T}_{g,n}$. Отсюда получаем отождествления $M(F')/\operatorname{Diff}_0(F') = \mathbf{T}_{g,n}(F') = \mathbf{T}_{g,n}(\Gamma')$. При этом имеем взаимно однозначное соответствие между классами дифференциалов Бельтрами $[\mu]$, классами конформно эквивалентных отмеченных римановых поверхностей $[F'_\mu; \{a_k(\mu), b_k(\mu)\}_{k=1}^g \cup \{\gamma_1(\mu), \ldots, \gamma_n(\mu)\}]$ и отмеченными квазифуксовыми группами Γ'_μ [11].

В [10, с. 99] построены формы $\zeta_1[\mu] = \zeta_1([\mu], \xi)\, d\xi, \ldots, \zeta_g[\mu] = \zeta_g([\mu], \xi)\, d\xi$, $[\mu] \in \mathbf{T}_g$, $\xi \in w^\mu(U)$, такие, что для любого $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ они являются поднятиями на $w^\mu(U)$ голоморфных на F_μ абелевых дифференциалов $\zeta_1[\mu], \ldots, \zeta_g[\mu]$, которые образуют канонический базис, двойственный каноническому гомотопическому базису $\{a_k(\mu), b_k(\mu)\}_{k=1}^g$ на F_μ и голоморфно зависящий от модулей $[\mu]$ для F_μ. Кроме того, матрица b-периодов $\Omega(\mu) = (\pi_{jk}[\mu])_{j,k=1}^g$ на F_μ состоит из комплексных чисел $\pi_{jk}[\mu] = \int\limits_{\xi}^{B_k^\mu(\xi)} \zeta_j([\mu], w)\, dw$, $\xi \in w^\mu(U)$, и голоморфно зависит от $[\mu]$.

Для любых фиксированных $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ и $\xi_0 \in w^\mu(U)$ определим классическое отображение Якоби $\varphi : w^\mu(U) \to \mathbf{C}^g$ по правилу $\varphi_j(\xi) = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \zeta_j([\mu], w)\, dw$, $j = 1, \ldots, g$. Фактор-пространство $J(F) = \mathbf{C}^g / L(F)$ называется *отмеченным многообразием Якоби для* $F = F_0$, где $L(F)$ — решетка над $\mathbf{Z}$, порожденная столбцами $e^{(1)}, \ldots, e^{(g)}, \pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(g)}$ матрицы (I_g, Ω). Универсальное многообразие Якоби рода g — расслоенное пространство над $\mathbf{T}_g$, слой которого над $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ является якобианом $J(F_\mu)$ поверхности F_μ [12].

Далее, для любого натурального числа $m > 1$ существует расслоенное пространство над $\mathbf{T}_g$, у которого слой над $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ — пространство всех целых дивизоров степени m на F_μ. Голоморфные сечения этого расслоения определяют на каждой F_μ целый дивизор D^μ степени m, который голоморфно зависит от $[\mu]$. Также существует голоморфное отображение φ_m из этого расслоения на универсальное расслоение Якоби, $m \geq 1$, ограничение которого на слои является продолжением отображения Якоби $\varphi : F_\mu \to J(F_\mu)$. Известно, что для $m = g$ отображение $\varphi : F_g[\mu] \backslash F_g^1[\mu] \to W_g[\mu] \backslash W_g^1[\mu]$ является аналитическим изоморфизмом, где $F_g[\mu]$ — g-кратное симметрическое произведение поверхности F_μ и $W_g^1[\mu] = \varphi\big(F_g^1[\mu]\big)$ имеет комплексную размерность, не превышающую $g-2$ [6]. Локальные голоморфные сечения этих расслоений над окрестностью $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ можно получить (для любого $m \geq 1$) из локальных голоморфных сечений Эрла s для $\Psi : M(F) \to \mathbf{T}_g$ над $U([\mu_0])$ [12].

Характером ρ для F'_μ называется любой гомоморфизм $\rho : (\pi_1(F'_\mu), \cdot) \to (\mathbf{C}^*, \cdot), \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Характер единственным образом задается упорядоченным набором $\big(\rho(a_1^\mu), \rho(b_1^\mu), \ldots, \rho(a_g^\mu), \rho(b_g^\mu), \rho(\gamma_1^\mu), \ldots, \rho(\gamma_n^\mu)\big) \in (\mathbf{C}^*)^{2g+n}$.

Определение 1.1. *Мультипликативной функцией* f на F'_μ для характера ρ назовем мероморфную функцию f на $w^\mu(U)$ такую, что $f(Tz) = \rho(T) f(z), z \in w^\mu(U), T \in \Gamma'_\mu$.

Определение 1.2. *m-Дифференциалом Прима* относительно фуксовой группы Γ' для ρ, т. е. (ρ, m)-*дифференциалом*, называется дифференциал $\omega(z)\,dz^m$ такой, что $\omega(Tz)(T'z)^m = \rho(T)\omega(z)$, $z \in U$, $T \in \Gamma'$, $\rho : \Gamma' \to \mathbf{C}^*$.

Если f_0 — мультипликативная функция на F_μ для ρ без нулей и полюсов, то

$$f_0(P) = f_0(P_0) \exp \int\limits_{P_0[\mu]}^{P} 2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j([\mu], \rho) \zeta_j([\mu]),$$

где $P_0[\mu] = f^{s[\mu]}(P_0) \in F_\mu$, $c_j([\mu], \rho) \in \mathbf{C}$, $j = 1, \ldots, g$, c_j зависят голоморфно от $[\mu]$ и от ρ. При этом интегрирование производится от фиксированной $P_0[\mu]$ до текущей P на переменной поверхности F_μ и $s[\mu]$ — сечение Эрла [12] над $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$. Получим, что характер ρ для f_0 имеет вид

$$\rho\big(a_k^\mu\big) = \exp 2\pi i c_k([\mu], \rho), \quad \rho\big(b_k^\mu\big) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j([\mu], \rho)\pi_{jk}([\mu])\right), \quad k = 1, \ldots, g.$$

Будем называть такие характеры ρ *несущественными*, а f_0 (с таким характером) — *единицей*. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть *существенными* на $\pi_1(F_\mu)$. Обозначим через $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ группу всех характеров на Γ с естественным умножением. Несущественные характеры образуют подгруппу L_g в группе $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$.

Определение 1.3. Дифференциал Прима ϕ класса C^1 на $F' = U/\Gamma'$ для ρ называется *мультипликативно точным*, если $\phi = df(z)$ и $f(Tz) = \rho(T)f(z)$, $T \in \Gamma'$, $z \in U$, т. е. f — мультипликативная функция на F' класса C^2 для ρ.

Обозначим через $Z^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ для $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma'_\mu, \mathbf{C}^*)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma'_\mu \to \mathbf{C}$ таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma'_\mu$ [1].

Пусть ϕ — замкнутый дифференциал Прима на $F' = F'_0$ для ρ. Проинтегрировав его, получим, что $f(Tz) - f(Tz_0) = \rho(T)(f(z) - f(z_0))$, где $\phi = df(z), z \in U$, $f(z)$ — интеграл Прима на круге U для ϕ, который определяется с точностью до аддитивного слагаемого. Отсюда для $T \in \Gamma'$ верно равенство $f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi_{f,z_0}(T)$, где $\phi_{f,z_0}(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0)$. Таким образом, определено $\phi_{f,z_0} : \Gamma' \to \mathbf{C}$ — отображение периодов для ϕ. Оно зависит от выбора интеграла Прима $f(z)$ на U и базисной точки z_0. Если $f_1(z) = f(z) + c$ — другой интеграл Прима для ϕ, то $\phi_{f_1,z_0}(T) = \phi_{f,z_0}(T) + c\sigma(T)$, $T \in \Gamma'$. Легко проверить, что оба отображения ϕ_{f,z_0} и ϕ_{f_1,z_0} удовлетворяют коциклическому соотношению $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma'$. Они принадлежат пространству $Z^1(\Gamma', \rho)$ и представляют один и тот же класс периодов $[\phi]$ из $H^1(\Gamma', \rho)$ для дифференциала Прима ϕ на F'.

Для замкнутого дифференциала Прима ϕ можно определить так называемые классические периоды. Для $T \in \Gamma'$ соответствующий ему классический период $\phi_{z_0}(T)$ равен $\int\limits_{z_0}^{Tz_0} \phi$ и верно равенство $\phi_{z_0}(T) = \phi_{f,z_0}(T) - f(z_0)\sigma(T)$.

Следовательно, отображения вида $T \to \phi_{f,z_0}(T)$ (периоды по Ганнингу) и вида $T \to \phi_{z_0}(T)$ (классические периоды) определяют один и тот же класс периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma', \rho)$ для дифференциала Прима ϕ на F' для ρ. Поэтому корректно определено $\mathbf{C}$-линейное отображение $p : \phi \to [\phi]$ из векторного пространства замкнутых дифференциалов Прима ϕ на F' для ρ в векторное пространство $H^1(\Gamma', \rho)$.

Обозначим через $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ пространство дифференциалов Прима второго рода с конечным числом полюсов на F'_μ для характера ρ [2, 6].

Лемма 1.1. *Если $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ имеет класс периодов $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$, то ω — мультипликативно точный дифференциал на F'_μ для ρ.*

Доказательство. Достаточно доказать это для фиксированных поверхности и характера. Классические периоды $\omega_{z_0}(\tilde{\gamma}_1), \dots, \omega_{z_0}(\tilde{\gamma}_k)$ получаются при обходе по петлям $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_k$ вокруг отдельных полюсов $Q_1, \dots, Q_k$ для дифференциала ω соответственно. Они все обращаются в нуль, так как они равны вычетам относительно полюсов второго или большего порядка для ветвей нашего многозначного дифференциала.

Если класс периодов $[\omega]$ равен 0, то отсюда классический период $\omega_{z_0}(T)$ равен $c\sigma(T)$, $c \neq 0$, для любого T, где $\omega_{z_0}(T) = f(Tz_0) - f(z_0) = c(1 - \rho(T))$, а f — некоторый интеграл Прима для ω. Тогда $\tilde{f} = (f - c)$ будет мультипликативной функцией для ρ и $\omega = d\tilde{f} = d(f - c)$. Поэтому периоды по Ганнингу $\widetilde{\omega}_{z_0}(a_1), \dots, \widetilde{\omega}_{z_0}(b_g)$, $\widetilde{\omega}_{z_0}(\gamma_1), \dots, \widetilde{\omega}_{z_0}(\gamma_n)$ все равны нулю для некоторого представителя из класса $[\omega]$. Следовательно, ω является мультипликативно точным дифференциалом для ρ на F'_μ. Лемма 1.1 доказана.

Дивизором на F_μ назовем формальное произведение $D = P_1^{n_1} \dots P_k^{n_k}$, $P_j \in F_\mu$, $n_j \in \mathbf{Z}$, $j = 1, \dots, k$.

Теорема (Римана — Роха для характеров) [2, 6]. *Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g \geq 1$. Тогда для любого дивизора D на F и любого характера ρ верно равенство $r_\rho(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D)$.*

Теорема (Абеля для характеров) [2, 6]. *Пусть D — дивизор на отмеченной переменной компактной римановой поверхности $\left[F_\mu, \left\{a_1^\mu, \dots, a_g^\mu, b_1^\mu, \dots, b_g^\mu\right\}\right]$ рода $g \geq 1$ и ρ — характер на $\pi_1(F_\mu)$. Тогда D будет дивизором мультипликативной функции f на F_μ для характера ρ в том и только в том случае, если $\deg D = 0$ и*

$$\varphi(D) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} \log \rho\big(b_j^\mu\big) e^{(j)}[\mu] - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} \log \rho\big(a_j^\mu\big) \pi^{(j)}[\mu] \quad (\equiv \psi(\rho, [\mu]))$$

в $\mathbf{C}^g$ по модулю целочисленной решетки $L(F_\mu)$, порожденной столбцами $e^{(1)}[\mu]$, $\dots, e^{(g)}[\mu], \pi^{(1)}[\mu], \dots, \pi^{(g)}[\mu]$, где $\varphi[\mu] : F_\mu \to J(F_\mu)$.

Отметим, что по теореме Л. Берса [10, с. 99] отображение ψ зависит локально голоморфно от ρ и $[\mu]$.

§ 2. Когомологическое расслоение Ганнинга на конечной римановой поверхности

Обозначим через $Z^1(\Gamma', \rho)$ для $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma', \mathbf{C}^*)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma' \longrightarrow \mathbf{C}$ таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma'$ [1]. Отметим основные свойства таких отображений:

1) так как $\phi(S \cdot I) = \phi(S) + \rho(S)\phi(I)$ и $\rho(S) \neq 0$, то $\phi(I) = 0$;

2) $\phi(S^{-1}) = -\frac{\phi(S)}{\rho(S)}$, так как $0 = \phi(I) = \phi(SS^{-1}) = \phi(S) + \rho(S)\phi(S^{-1})$;

3) $\phi([A,B][C,D]) = \phi([A,B]) + \rho([A,B])\phi([C,D]) = \phi([A,B]) + \phi([C,D])$, так как $\rho([A,B]) = 1$;

4) $\phi([A,B]) = \sigma(B)\phi(A) - \sigma(A)\phi(B)$ для любых $A, B \in \Gamma'$, где $\sigma(T) = 1 - \rho(T)$, $T \in \Gamma'$.

Каждый элемент $\phi \in Z^1(\Gamma', \rho)$ единственным образом определяется упорядоченным набором комплексных чисел $\phi(A_1), \dots, \phi(A_g)$, $\phi(B_1), \dots, \phi(B_g)$, $\phi(\gamma_1), \dots, \phi(\gamma_n)$.

Лемма 2.1. *Для любого* $\phi \in Z^1(\Gamma', \rho)$ *верно равенство*

$$\sum_{j=1}^{g}(\sigma(B_j)\phi(A_j) - \sigma(A_j)\phi(B_j)) + \phi(\gamma_1) + \sum_{j=1}^{n-1}\rho(\gamma_1\dots\gamma_j)\phi(\gamma_{j+1}) = 0. \qquad (1)$$

Доказательство. Из равенства $I = \prod\limits_{j=1}^{g}[A_j, B_j]\gamma_1\dots\gamma_n$ следует, что

$$0 = \phi(I) = \phi\left(\prod_{j=1}^{g}[A_j, B_j]\right) + \rho\left(\prod_{j=1}^{g}[A_j, B_j]\right)\phi(\gamma_1\dots\gamma_n)$$
$$= \sum_{j=1}^{g}(\sigma(B_j)\phi(A_j) - \sigma(A_j)\phi(B_j)) + \phi(\gamma_1\dots\gamma_n).$$

Найдем

$$\phi(\gamma_1\dots\gamma_n) = \phi(\gamma_1) + \rho(\gamma_1)\phi(\gamma_2\dots\gamma_n) = \phi(\gamma_1) + \rho(\gamma_1)(\phi(\gamma_2) + \rho(\gamma_2)\phi(\gamma_3\dots\gamma_n))$$
$$= \phi(\gamma_1) + \rho(\gamma_1)\phi(\gamma_2) + \rho(\gamma_1\gamma_2)\phi(\gamma_3) + \rho(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\phi(\gamma_4) +$$
$$\dots + \rho(\gamma_1\dots\gamma_j)\phi(\gamma_{j+1}) + \dots + \rho(\gamma_1\dots\gamma_{n-1})\phi(\gamma_n).$$

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Голоморфное главное* $\mathrm{Hom}(\Gamma', \mathbf{C}^*)$*-расслоение*

$$E = \bigcup_{[\mu]}\mathrm{Hom}(\Gamma'_\mu, \mathbf{C}^*)$$

аналитически эквивалентно тривиальному расслоению $\mathbf{T}_{g,n}(F') \times \mathrm{Hom}(\Gamma', \mathbf{C}^*)$ *над базой* $\mathbf{T}_{g,n}(F')$.

Доказательство. Глобальная тривиализация (карта) Θ сопоставляет паре $([F'_\mu]; \rho_\mu) \in [F'_\mu] \times \mathrm{Hom}(\Gamma'_\mu, \mathbf{C}^*)$ упорядоченный набор $\big([F'_\mu], \rho_\mu(A_1^\mu), \dots, \rho_\mu(A_g^\mu)$, $\rho_\mu(B_1^\mu), \dots, \rho_\mu(B_g^\mu),\ \rho_\mu(\gamma_1^\mu), \dots, \rho_\mu(\gamma_n^\mu)\big) \in [F'_\mu] \times [\mathbf{C}^*]^{2g+n}$. Она задает послойную биекцию из E на $\mathbf{T}_{g,n}(F') \times [\mathbf{C}^*]^{2g+n}$ и определяет на E глобальную комплексную аналитическую структуру. Аналогично отображение $\Theta_0 : ([F'_\mu]; \rho) \to ([F'_\mu]; \rho(A_1), \dots, \rho(B_g), \rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_n))$ задает глобальную карту на прямом произведении $\mathbf{T}_{g,n}(F') \times \mathrm{Hom}(\Gamma', \mathbf{C}^*)$. Определим отображение ψ по правилу $\psi : ([F'_\mu]; \rho_\mu) \to ([F'_\mu]; \rho)$, где $\rho(A_j) = \rho_\mu(A_j^\mu)$, $\rho(B_j) = \rho_\mu(B_j^\mu)$, $j = 1, \dots, g$, $\rho(\gamma_k) = \rho_\mu(\gamma_k^\mu)$, $k = 1, \dots, n$. Оно будет изоморфизмом из переменного слоя $\mathrm{Hom}(\Gamma'_\mu, \mathbf{C}^*)$ на постоянный слой $\mathrm{Hom}(\Gamma', \mathbf{C}^*)$ при фиксированном $[F'_\mu]$. В картах Θ и Θ_0 отображение ψ имеет вид $(\mathrm{id}; \mathrm{id})$, а значит, будет биголоморфным изоморфизмом из E на произведение $\mathbf{T}_{g,n}(F') \times \mathrm{Hom}(\Gamma', \mathbf{C}^*)$ над базой $\mathbf{T}_{g,n}(F')$. Лемма 2.2 доказана.

Рассмотрим $Z^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ — комплексное $(2g+n-1)$-мерное векторное пространство для ρ при $n \geq 1$. Пусть $B^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ — одномерное подпространство в $Z^1(\Gamma'_\mu, \rho)$, порожденное элементом σ при $\rho \neq 1$. Тогда $H^1(\Gamma'_\mu, \rho) = Z^1(\Gamma'_\mu, \rho)/B^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ — комплексное $(2g+n-2)$-мерное векторное пространство для $\rho \neq 1$ и $(2g+n-1)$-мерное пространство для $\rho \equiv 1$.

В дальнейшем будем предполагать, что $\rho(\gamma_j) = 1$, $j = 1, \dots, n$.

Множество $G' = \bigcup\limits_{[\mu],\rho\neq 1} H^1(\Gamma'_\mu,\rho)$ будем называть *когомологическим расслоением Ганнинга над базой* $\mathbf{T}_{g,n} \times \mathrm{Hom}(\Gamma',\mathbf{C}^*)\backslash\{1\}$ [1]. Для G' при $\rho\neq 1$ используем изоморфизм Ганнинга [1] между комплексным векторным пространством $H^1(\Gamma'_\mu,\rho)$ и векторным пространством $\mathrm{Hom}_\rho([\Gamma'_\mu,\Gamma'_\mu],\mathbf{C})$, состоящим из гомоморфизмов $\phi_0 : [\Gamma'_\mu,\Gamma'_\mu] \to (\mathbf{C},+)$ с условием, что $\phi_0(STS^{-1}) = \rho(S)\phi_0(T)$, $T\in[\Gamma'_\mu,\Gamma'_\mu]$, $S\in\Gamma'_\mu$. Здесь $[\Gamma'_\mu,\Gamma'_\mu]$ — коммутант группы Γ'_μ. Таким образом, расслоение G' изоморфно векторному расслоению $\bigcup\limits_{[\mu],\rho\neq 1}\mathrm{Hom}_\rho([\Gamma'_\mu,\Gamma'_\mu],\mathbf{C})$.

Кроме того, матрицы перехода для этого расслоения можно будет определить через $2g$ координатных окрестностей $U_j = \{\rho : \rho(A_j)\neq 1\}$, $U_{g+j} = \{\rho : \rho(B_j)\neq 1\}$, $j=1,\ldots,g$, которые покрывают базу $\mathrm{Hom}(\Gamma',\mathbf{C}^*)\backslash\{1\}$, при условии $\rho(\gamma_j)=1$, $j=1,\ldots,n$. Для окрестности U_1 будет $\sigma\big(A_1^\mu\big)\neq 0$. Любой элемент $\phi_0\in\mathrm{Hom}_\rho([\Gamma'_\mu,\Gamma'_\mu],\mathbf{C})$ при $\rho\in U_1$ можно задать как $\phi_0 = \phi_1^\mu|_{[\Gamma'_\mu,\Gamma'_\mu]}$ для $\phi_1^\mu\in Z^1(\Gamma'_\mu,\rho)$ такого, что $\phi_1\big(A_1^\mu\big)=0$ и $\phi_1(T) = \sigma\big(A_1^\mu\big)^{-1}\phi_0\big([T,A_1^\mu]\big)$, $T\in\Gamma'_\mu$ [1].

Теорема 2.1. *Когомологическое расслоение Ганнинга G' над $\mathbf{T}_{g,n}(F')\times(\mathrm{Hom}(\Gamma',\mathbf{C}^*)\backslash\{1\})$ является голоморфным векторным расслоением ранга $2g+n-2$ при $n\geq 1$, $g\geq 2$.*

Доказательство. Покажем, что $G'|_{U[\mu_0]\times U_l}$ гомеоморфно $U[\mu_0]\times U_l\times\mathbf{C}^{2g+n-2}$, где координаты на слоях задаются так, что над $U[\mu_0]\times U_l$ имеем

$$\xi_j^l = \phi_0\big(\big[A_{\tilde{j}}^\mu, A_l^\mu\big]\big) = \sigma\big(A_l^\mu\big)\phi_l^\mu\big(A_{\tilde{j}}^\mu\big) - \sigma\big(A_{\tilde{j}}^\mu\big)\phi_l^\mu\big(A_l^\mu\big),$$

$$\eta_j^l = \phi_0\big(\big[B_{\tilde{j}}^\mu, A_l^\mu\big]\big) = \sigma\big(A_l^\mu\big)\phi_l^\mu\big(B_{\tilde{j}}^\mu\big) - \sigma\big(B_{\tilde{j}}^\mu\big)\phi_l^\mu\big(A_l^\mu\big),\quad \zeta_m^l = \phi_l^\mu\big(\gamma_m^\mu\big),$$

а над $U[\mu_0]\times U_{g+l}$ имеем

$$\xi_j^{g+l} = \phi_0\big(\big[A_{\tilde{j}}^\mu, B_l^\mu\big]\big),\ \eta_j^{g+l} = \phi_0\big(\big[B_{\tilde{j}}^\mu, B_l^\mu\big]\big),\ \zeta_m^{g+l} = \phi_{g+l}^\mu\big(\gamma_m^\mu\big),\quad \tilde{j}=1,\ldots,(l-1),$$

$l+1,\ldots,g$, $l=1,\ldots,g$, $m=1,\ldots,n$.

Над U_1 получаем соотношения $\xi_j^1 = \phi_0\big(\big[A_{j+1}^\mu,A_1^\mu\big]\big) = \phi_1^\mu\big(\big[A_{j+1}^\mu,A_1^\mu\big]\big) = \sigma\big(A_1^\mu\big)\phi_1^\mu\big(A_{j+1}^\mu\big)$; $\eta_j^1 = \phi_0\big(\big[B_{j+1}^\mu,A_1^\mu\big]\big) = \sigma\big(A_1^\mu\big)\phi_1^\mu\big(B_{j+1}^\mu\big)$, $j=1,\ldots,g-1$; $\zeta_m^1 = \phi_1^\mu\big(\gamma_m^\mu\big)$, $m=1,\ldots,n$.

Таким образом, координаты ξ_j^1, η_j^1, ζ_m^1 слоя над фиксированным $([\mu],\rho)$ однозначно задают числа

$$\phi_1^\mu\big(A_1^\mu\big)=0,\quad \phi_1^\mu\big(A_2^\mu\big),\ldots,\phi_1^\mu\big(A_g^\mu\big),\phi_1^\mu\big(B_1^\mu\big),\phi_1^\mu\big(B_2^\mu\big),\\ \ldots,\phi_1^\mu\big(B_g^\mu\big),\phi_1^\mu\big(\gamma_1^\mu\big),\ldots,\phi_1^\mu\big(\gamma_n^\mu\big),$$

а значит, и весь класс когомологий $[\phi_1^\mu]$, где

$$\phi_1^\mu\big(B_1^\mu\big) = \sigma\big(A_1^\mu\big)^{-2}\sum_{j=1}^{g-1}\big(\sigma\big(B_{j+1}^\mu\big)\xi_j^1 - \sigma\big(A_{j+1}^\mu\big)\eta_j^1\big) + \zeta_1^1+\cdots+\zeta_n^1.$$

Аналогично поступаем для остальных окрестностей.

Координаты $\xi_j^l,\eta_j^l,\zeta_m^l$ являются линейными комбинациями $\phi_l^\mu\big(A_j^\mu\big)$, $\phi_l^\mu\big(B_j^\mu\big)$, $\phi_l^\mu\big(\gamma_m^\mu\big)$ с голоморфными коэффициентами на $U[\mu_0]\times(U_k\cap U_l)$, так как $\phi_l^\mu|_{[\Gamma'_\mu,\Gamma'_\mu]} = \phi_0 = \phi_k^\mu|_{[\Gamma'_\mu,\Gamma'_\mu]}$ над $U[\mu_0]\times(U_k\cap U_l)$. Здесь ϕ_k^μ и ϕ_l^μ определяются, как ϕ_1^μ над U_1, над U_k и U_l соответственно.

В свою очередь, $\phi_k^\mu\big(A_j^\mu\big)$, $\phi_k^\mu\big(B_j^\mu\big)$, $\phi_k^\mu\big(\gamma_m^\mu\big)$ — линейные комбинации от ξ_j^k, η_j^k, ζ_m^k с голоморфными коэффициентами на U_k. Поэтому координаты ξ_j^l, η_j^l,

ζ_m^l будут линейными комбинациями ξ_j^k, η_j^k, ζ_m^k с голоморфными коэффициентами на $U[\mu_0] \times (U_k \cap U_l)$. Таким образом, матрицы перехода $T_{k,l}$ голоморфны на $U[\mu_0] \times (U_k \cap U_l)$ и G' — голоморфное векторное расслоение над $\mathbf{T}_{g,n} \times (\mathrm{Hom}(\Gamma', \mathbf{C}^*) \backslash \{1\}$. Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.1. В случае $n = 0$ эта теорема доказана в статье Ганнинга [1] для рода $g = 2$ и в книге [2] для рода $g \geq 2$.

§ 3. Элементарные дифференциалы Прима

Для построения общей теории однозначных и мультипликативных дифференциалов большую роль играют так называемые элементарные дифференциалы [2, 6] любого порядка, которые имеют минимальное количество полюсов, т. е. либо один полюс порядка ≥ 2, либо два простых полюса, и голоморфно зависят от характеров ρ и от модулей $[\mu]$ римановых поверхностей. В этом параграфе будет найден общий вид элементарных (ρ, q)-дифференциалов Прима на F'_μ. Пространство $A_1(\rho)$ состоит из дифференциалов Прима для ρ на F', которые имеют конечное число полюсов на F' и допускают мероморфное продолжение на F. Пространство $A_2(\rho)$ состоит из дифференциалов для ρ, имеющих конечное число полюсов на F', и в проколах при аналитическом продолжении могут быть изолированные существенно особые точки.

Предложение 3.1. *Дивизор D степени $(2g-2)q$ является дивизором мероморфного (ρ, q)-дифференциала ω на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ для характера ρ при $q \geq 1$, если и только если $\varphi(D) = -2Kq + \psi(\rho)$ в $J(F)$.*

Доказательство проводится аналогично случаю $q = 1$, рассмотренному в [2].

Предложение 3.2. *Для любой точки Q и любого характера ρ на F'_μ типа (g, n), $g \geq 2$, $n \geq 1$, и любых $m \geq 2$, $q \geq 1$ существует элементарный (ρ, q)-дифференциал $\tau_Q^{(m)}(\rho)$ второго рода класса $A_1(\rho)$, у которого общий вид дивизора $\left(\tau_Q^{(m)}(\rho)\right) = \frac{R_1 \ldots R_N}{Q^m} \frac{1}{P_1^{k_1} \ldots P_n^{k_n}}$, где $\varphi(R_1 \ldots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q^m) - \varphi(R_{g+1} \ldots R_N) + \varphi\left(P_1^{k_1}\right) + \cdots + \varphi\left(P_n^{k_n}\right) + \psi(\rho)$, $k_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, при этом точки $R_{g+1}, \ldots, R_N$ выбираются произвольно на $F'_\mu \backslash \{Q\}$ и $N = (2g-2)q + m + k_1 + \cdots + k_n$. Кроме того, эти дифференциалы локально голоморфно зависят от $[\mu]$ и ρ.*

Доказательство. Найдем общий вид (ρ, q)-дифференциалов второго рода с единственным полюсом в точке Q точно порядка $m \geq 2$ на F'_μ, где $q \geq 1$.

По теореме Римана — Роха для (ρ, q)-дифференциалов на F_μ [2] найдем размерность

$$i_{\rho,q}\left(\frac{1}{Q^m P_1^{k_1} \ldots P_n^{k_n}}\right) = \dim_{\mathbf{C}} \Omega_\rho^q \left(\frac{1}{Q^m P_1^{k_1} \ldots P_n^{k_n}}\right),$$

где $k_j \geq 0$, $k_j \in \mathbf{N}$, $j = 1, \ldots, n$. Имеем

$$i_{\rho,q}(D) = (g-1)(2q-1) - \deg D + r\left(\frac{(f[\mu]) Z_\mu^{q-1}}{D}\right),$$

где $D = \frac{1}{Q^m P_1^{k_1} \ldots P_n^{k_n}}$, Z_μ^{q-1} — канонический класс дивизоров однозначных $(q-1)$-дифференциалов на F_μ, $f[\mu]$ — любая мультипликативная функция для ρ на F_μ, локально голоморфно зависящая от $[\mu]$ и ρ [2]. Отсюда

$$i_{\rho,q}\left(\frac{1}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}\right) = (g-1)(2q-1) + m + k_1 + \dots + k_n \geq 3.$$

Здесь $r\big(\frac{(f[\mu])Z_\mu^{q-1}}{D}\big) = 0$, так как $\deg\big(\frac{(f[\mu])Z_\mu^{q-1}}{D}\big) > 0$ при наших условиях. Действительно, $\deg(f[\mu]) = 0$, $\deg Z_\mu^{q-1} = (q-1)(2g-2) \geq 0$ и $\deg\big(\frac{1}{D}\big) \geq m > 0$. Этот факт можно доказать по-другому. Если существует функция $g \neq 0$ для ρ на F_μ с условием $(g) \geq Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}(f[\mu])Z_\mu^{q-1}$, то $0 = \deg(g) \geq \deg\big(Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}(f[\mu])Z_\mu^{q-1}\big) \geq 2$; противоречие.

Ясно, что

$$i_{\rho,q}\left(\frac{1}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}\right) = i_{\rho,q}\left(\frac{1}{Q^{m-1} P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}\right) + 1.$$

Следовательно, существует (ρ,q)-дифференциал $\tau_Q^{(m)}(\rho)$ с полюсом точно порядка m в точке Q на F_μ, т. е. $\big(\tau_Q^{(m)}(\rho)\big) = \frac{R_1\dots R_N}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}$ на $F_\mu, R_j \neq Q$, $j = 1,\dots,N$, а значит, $\big(\tau_Q^{(m)}(\rho)\big) = \frac{R_1\dots R_N}{Q^m}$ на F'_μ.

Такие (ρ,q)-дифференциалы $\omega = \tau_Q^{(m)}(\rho)$ из $A_1(\rho)$ на F'_μ определяются неединственно на F'_μ из-за своих нулей и полюсов, т. е. $(\omega) = \frac{R_1\dots R_N}{Q^m}\frac{1}{P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}$, $k_j \geq 0$, $j = 1,\dots,n$. Зафиксируем $k_1,\dots,k_n$ как порядки возможных полюсов в точках $P_1,\dots,P_n$ соответственно. При этом $\deg(\omega) = (2g-2)q$ на F_μ. Отсюда следует, что $N = (2g-2)q + m + k_1 + \dots + k_n$.

По предложению 3.1 получаем уравнение

$$\varphi_{P_0}(R_1\dots R_N) - \varphi_{P_0}(Q^m) - \varphi_{P_0}\big(P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}\big) = -2K[\mu]q + \psi(\rho)$$

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$, где $K[\mu]$ — вектор констант Римана, голоморфно зависящий от модулей римановых поверхностей F_μ и от выбора базисной точки. Следовательно,

$$\varphi(R_1\dots R_N) = -2K[\mu]q + \varphi(Q^m) + k_1\varphi(P_1) + \dots + k_n\varphi(P_n) + \psi(\rho) = a$$

или $\varphi(R_1\dots R_g) = a - \varphi(R_{g+1}\dots R_N)$. Таким образом, для определения нулей нашего дифференциала имеем $N - g = m + (2g-2)q - g + k_1 + \dots + k_n \geq 2$ свободных параметров, которые можно выбирать произвольно на F'_μ. Решая проблему обращения Якоби, найдем дивизор $R_1\dots R_g$, который будет единственным голоморфным решением уравнения, если правая сторона не принадлежит $W_g^1[\mu]$ [2,6]. Это можно сделать, так как $\dim W_g^1[\mu] \leq g-2$, но $N - g > g - 2$ или $(2g-2)\cdot(q-1) + m + k_1 + \dots + k_n \geq m > 0$. Поэтому дивизор $\big(\tau_Q^{(m)}(\rho)\big) = \frac{R_1\dots R_g}{Q^m}\frac{R_{g+1}\dots R_N}{P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}$ имеет наиболее общий вид для (ρ,q)-дифференциалов $\tau_Q^{(m)}(\rho)$ класса $A_1(\rho)$ с единственным полюсом точно порядка $m \geq 2$ на $F'_\mu = F_\mu\backslash\{P_1,\dots,P_n\}$ для точки $Q \in F'_\mu$. Предложение 3.2 доказано.

Аналогично доказывается следующее

Предложение 3.3. *Для любых различных точек Q_1, Q_2 на поверхности F'_μ типа (g,n), $g \geq 2$, $n \geq 1$, и любого характера ρ на F'_μ существует элементарный (ρ,q)-дифференциал $\tau_{Q_1Q_2}(\rho)$ третьего рода класса $A_1(\rho)$, имеющий общий вид дивизора $(\tau_{Q_1Q_2}(\rho)) = \frac{R_1\dots R_N}{Q_1Q_2}\frac{1}{P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}$, где* $\varphi(R_1\dots R_g) = -2K[\mu]q +$

$\varphi(Q_1Q_2) - \varphi(R_{g+1}\dots R_N) + \varphi\big(P_1^{k_1}\big) + \dots + \varphi\big(P_n^{k_n}\big) + \psi(\rho)$, $k_j \geq 0$, $j = 1,\dots,n$, при этом точки $R_{g+1},\dots,R_N$ выбираются произвольно на $F'_\mu \backslash \{Q_1, Q_2\}$ и $N = (2g-2)q+2+k_1+\dots+k_n$. Кроме того, эти дифференциалы локально голоморфно зависят от $[\mu]$ и ρ.

§ 4. Дифференциалы Прима для несущественного характера

Обозначим через $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ пространство мероморфных дифференциалов второго рода для характера ρ с конечным числом полюсов, а через $\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$ — подпространство всех мультипликативно точных дифференциалов Прима для ρ на F'_μ. Пусть $\tau^{(m)}_{\widetilde{P}_j}$ — абелев дифференциал второго рода на F_μ с единственным полюсом точно порядка m в точке $\widetilde{P}_j$, $j = 1,\dots,g$, с нулевыми a-периодами соответственно. Точки $\widetilde{P}_1,\dots,\widetilde{P}_g$ выбираются из условия $r_\rho\big(\frac{1}{\widetilde{P}_1\dots\widetilde{P}_g}\big) = 1$.

Для любого характера $\rho \neq 1$ определим отображение из $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ в $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$, сопоставляя дифференциалу ω его класс периодов $[\omega]$. Пусть $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ поднят на U, где $F'_\mu = U/\widetilde{\Gamma}$, и $\widetilde{\Gamma}$ — фуксова группа первого рода, униформизирующая F'_μ в U [10, 11]. Найдем классические периоды

$$\omega_{z_0}(T) = \int_{z_0}^{Tz_0} \omega + m_{n+1} \int_{\gamma_{n+1}} \omega + \dots + m_{n+k} \int_{\gamma_{n+k}} \omega,$$

где $m_j \in \mathbf{Z}$, $j = n+1,\dots,n+k$. Здесь через $\gamma_{n+1},\dots,\gamma_{n+k}$ обозначены петли, обходящие только вокруг полюсов $Q_1,\dots,Q_k$ для ω на F'_μ соответственно. При этом интеграл $\int\limits_{z_0}^{Tz_0} \omega$ берется по некоторому фиксированному специальному пути в круге U, не проходящему через полюсы для ω.

Так как ω — дифференциал Прима второго рода, все вычеты в полюсах равны нулю. Поэтому существует глобальная первообразная — мероморфная функция $f(z)$ на U такая, что $\omega = df$ на $F'_\mu \backslash \{Q_1,\dots,Q_k\}$. Теперь поднимем $\omega = df$ на U относительно $\widetilde{\widetilde{\Gamma}}$ и получим, что $\omega_{z_0}(T) = \int\limits_{z_0}^{Tz_0} df(z)$ для любого $T \in \widetilde{\widetilde{\Gamma}}$, где $\widetilde{\widetilde{\Gamma}}$ — фуксова группа первого рода на U, униформизирующая поверхность F''_μ, которая получается из F'_μ удалением всех k полюсов $Q_1,\dots,Q_k$ дифференциала ω.

Зададим отображение

$$\Omega_{2,\rho}(F'_\mu) \ni \omega \to [\omega] = \{\omega_{z_0}(A_1),\dots,\omega_{z_0}(B_g),\omega_{z_0}(\gamma_1),\dots,$$
$$\omega_{z_0}(\gamma_n),\omega_{z_0}(\gamma_{n+1}),\dots,\omega_{z_0}(\gamma_{n+k})\} \in H^1(\widetilde{\widetilde{\Gamma}}, \rho'),$$

где $\rho'(\gamma_s) = 1$, $s = n+1,\dots,n+k$, и $\rho' = \rho$ на $\Gamma'_\mu \cong \widetilde{\Gamma}$. Так как все $\omega_{z_0}(\gamma_s)$, $s = n+1,\dots,n+k$, равны нулю, то $[\omega]$ выражается только через $\omega_{z_0}(A_1),\dots,$ $\omega_{z_0}(B_g)$, $\omega_{z_0}(\gamma_1),\dots,\omega_{z_0}(\gamma_n)$, удовлетворяющие уравнению (1), а для $\rho \neq 1$ имеем $\omega_{z_0}(A_k) = 0$ при $\rho(A_k) \neq 1$ и $\omega_{z_0}(B_k) = 0$ при $\rho(B_k) \neq 1$. Значит, отображение $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu) \ni \omega \to [\omega] \in H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ корректно определено.

Если класс периодов $[\omega]$ равен 0 в $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ для $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$, то дифференциал ω является мультипликативно точным для ρ на F'_μ, а значит, $\omega \in \Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$.

Если $\omega \in \Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$, то, как раньше, $\omega_{z_0}(\gamma_s) = 0$, $s = n+1, \ldots, n+k$, где γ_s — петля, обходящая только полюс Q_s для ω. По условию $\omega = df$, где f — мультипликативная мероморфная функция на F'_μ, а значит, все периоды по Ганнингу для ω на F'_μ равны нулю. Следовательно, $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$.

Поэтому для любого $\rho \neq 1$ отображение периодов из $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$ в $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$, задаваемое по правилу $\omega + \Omega_{e,\rho}(F'_\mu) \to [\omega + \Omega_{e,\rho}(F'_\mu)] = [\omega]$, корректно определено, взаимно однозначно и линейно. Следовательно,

$$\dim_{\mathbf{C}} \Omega_{2,\rho}(F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F'_\mu) \leq 2g + n - 2$$

для любого $\rho \neq 1$.

Теорема 4.1. *Векторное расслоение $E_1 = \bigcup \Omega_{2,\rho}(F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$ является голоморфным векторным расслоением ранга $2g+n-2$ над базой $\mathbf{T}_{g,n} \times (L_g \backslash \{1\})$ при $g \geq 2, n \geq 2$. При этом следующие наборы классов смежности дифференциалов Прима:*

$$f_0\zeta_1, \ldots, \widehat{f_0\zeta_k}, \ldots, f_0\zeta_g,\ f_0\tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1}, \ldots, f_0\tau^{(n_g+1)}_{\widetilde{P}_1},\ f_0\tau_{P_2P_1}, \ldots, f_0\tau_{P_nP_1} \qquad (2)$$

либо

$$f_0\zeta_1, \ldots, \widehat{f_0\zeta_k}, \ldots, f_0\zeta_g,\ f_0\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}, \ldots, f_0\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_g},\ f_0\tau_{P_2P_1}, \ldots, f_0\tau_{P_nP_1}, \qquad (3)$$

задают базис локально голоморфных сечений этого расслоения, где f_0 — мультипликативная единица на F_μ для ρ, а числа $n_1, \ldots, n_g$ — мультипликативные пробелы Вейерштрасса в точке $\widetilde{P}_1$ на F_μ для ρ и $i_{\rho^{-1}}(\widetilde{P}_1 \ldots \widetilde{P}_g) = 0$ на F_μ, $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_g \in F'_\mu$ и $\rho(a_k) \neq 1$.

Доказательство. Это расслоение корректно определено над такой базой по лемме 2.2. Докажем обратное неравенство $\dim_{\mathbf{C}} \Omega_{2,\rho}(F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F'_\mu) \geq 2g+n-2$ и построим базис этого фактор-пространства.

Докажем, что при $\rho \neq 1$, $\rho(A_k) \neq 1$ дифференциалы из набора (3) представляют линейно независимые над $\mathbf{C}$ классы смежности в нашем фактор-пространстве. При $\rho_0 \neq 1$ на $\pi_1(F'_{\mu_0})$ существует $A_k \in \Gamma'_{\mu_0}$ с условием, что $\rho_0(A_k) = \exp 2\pi i c_k \neq 1$. Поэтому $c_k \neq 0$ для любого ρ из достаточно малой окрестности $U(\rho_0) \subset L_g \backslash \{1\}$ и любого $[\mu] \in U[\mu_0]$. Так как $df_0 = 2\pi i c_1 f_0\zeta_1 + \cdots + 2\pi i c_g f_0\zeta_g$ на F_μ, то $f_0\zeta_k$ выражается линейно через df_0 и остальные слагаемые последней суммы. Следовательно, вместо одного из дифференциалов $f_0\zeta_1, \ldots, f_0\zeta_g$ можно взять df_0, который представляет нулевой класс смежности. Предположим, что существует линейная комбинация с ненулевыми коэффициентами

$$C_1 f_0\zeta_1 + \cdots + \widehat{C_k f_0\zeta_k} + \cdots + C_g f_0\zeta_g + \tilde{c}_1 f_0\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1} + \cdots + \tilde{c}_g f_0\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_g}$$
$$+ \tilde{\tilde{c}}_1 f_0\tau_{P_2P_1} + \cdots + \tilde{\tilde{c}}_{n-1} f_0\tau_{P_nP_1} = df,$$

где f — мультипликативная мероморфная функция для несущественного характера ρ на F'_μ, $\rho(A_k) \neq 1$.

Обойдем точку P_2 по малой петле γ_2, выходящей из $\widetilde{P}_{2,0}$. Тогда выражение слева будет иметь вычет $\tilde{\tilde{c}}_1 f_0(\widetilde{P}_{2,0})\rho(\gamma_2)$, а для правой стороны этот вычет равен нулю. Но $f_0(\widetilde{P}_{2,0}) \neq 0$, $\rho(\gamma_2) = 1$, а значит, $\tilde{\tilde{c}}_1 = 0$. Аналогично считаем вычет по малым петлям обходящим отдельно вокруг точек $P_3, \ldots, P_n$ и получаем, что $\tilde{\tilde{c}}_2 = \cdots = \tilde{\tilde{c}}_{n-1} = 0$. После этого остается сумма

$$C_1 f_0\zeta_1 + \cdots + \widehat{C_k f_0\zeta_k} + \cdots + C_g f_0\zeta_g + \tilde{c}_1 f_0\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1} + \cdots + \tilde{c}_g f_0\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_g} = df.$$

Рассмотрим коэффициенты $\tilde{c}_j$, $j=1,\dots,g$.

1. Если df имеет устранимые особые точки во всех проколах, то это равенство на F'_μ влечет, что существует мероморфная мультипликативная функция на F_μ с простыми полюсами в $\widetilde{P}_1,\dots,\widetilde{P}_g$, но это невозможно из-за выбора этих точек и $r_\rho\big(\frac{1}{\widetilde{P}_1\dots\widetilde{P}_g}\big)=0$.

2. Если df при продолжении на F_μ имеет в проколах хотя бы один полюс или существенно особую точку, то для комбинации слева эта точка (прокол) не будет особой, а для df она особая. Получили противоречие.

Таким образом, $\tilde{c}_j=0$, $j=1,\dots,g$.

Рассмотрим коэффициенты $C_1,\dots,C_g$ и равенство $C_1f_0\zeta_1+\dots+\widehat{C_kf_0\zeta_k}+\dots+C_gf_0\zeta_g=df$ при $\rho(A_k)\neq 1$.

1. Если f при продолжении с F'_μ на F_μ имеет во всех проколах устранимые особые точки, то из этого равенства следует, что f является мультипликативной единицей на F_μ и $f=C'_1f_0$. Если $C'_1=0$, то $\zeta_1,\dots,\hat{\zeta}_k,\dots,\zeta_g$ будут линейно зависимы на F_μ; противоречие.

Если $C'_1\neq 0$, то $C'_1df_0=df=\sum\limits_{j\neq k}C_jf_0\zeta_j$. Для $\rho_0\neq 1$, $\rho_0(A_k)\neq 1$ имеем

$$C'_1df_0=2\pi i\Big(\sum_{j\neq k}C'_1c_jf_0\zeta_j\Big)+2\pi iC'_1c_kf_0\zeta_k$$

на F_μ, где $C'_1c_k\neq 0$. Отсюда получаем на F_μ равенство вида

$$\Big(\sum_{j\neq k}(C'_12\pi ic_j-C_j)\zeta_j\Big)+C'_12\pi ic_k\zeta_k=0.$$

Противоречие с линейной независимостью абелевых дифференциалов $\zeta_1,\dots,\zeta_g$.

2. Если f при продолжении с F'_μ на F_μ имеет в проколах полюс или существенно особую точку, то слева и справа получаем разные особые точки. Следовательно, $C_j=0$, $j=1,\dots,g$, $j\neq k$.

Таким образом, дифференциалы из набора (3) представляют линейно независимые над $\mathbf{C}$ классы смежности в нашем фактор-пространстве.

Покажем, что дифференциалы из набора (2) представляют линейно независимые классы смежности. Действительно, если существует линейная комбинация с ненулевыми коэффициентами

$$C_1f_0\zeta_1+\dots+\widehat{C_kf_0\zeta_k}+\dots+C_gf_0\zeta_g+\tilde{c}_1f_0\tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1}+\dots+\tilde{c}_gf_0\tau^{(n_g+1)}_{\widetilde{P}_1}$$
$$+\tilde{\tilde{c}}_1f_0\tau_{P_2P_1}+\dots+\tilde{\tilde{c}}_{n-1}f_0\tau_{P_nP_1}=df,$$

то $\tilde{\tilde{c}}_1=\dots=\tilde{\tilde{c}}_{n-1}=0$, как и в предыдущем случае.

Получаем равенство

$$C_1f_0\zeta_1+\dots+\widehat{C_kf_0\zeta_k}+\dots+C_gf_0\zeta_g+\tilde{c}_1f_0\tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1}+\dots+\tilde{c}_gf_0\tau^{(n_g+1)}_{\widetilde{P}_1}=df.$$

Рассмотрим коэффициенты $\tilde{c}_j$:

1) если f при продолжении имеет устранимые особые точки во всех проколах, то существует мультипликативная функция с единственным полюсом в $\widetilde{P}_1$ точно некоторого порядка n_j, но это невозможно из-за мультипликативных пробелов Вейерштрасса в точке $\widetilde{P}_1$ на F_μ;

2) если f при продолжении имеет полюс или существенно особую точку хотя бы в одном из проколов, то слева и справа будут особенности разных типов.

Поэтому $\tilde{c}_1 = \cdots = \tilde{c}_g = 0$.

Продолжая, как в предыдущем случае, показываем, что $C_j = 0$ для любого $j \neq k$ при ρ с условием, что $\rho(A_k) \neq 1$. Теорема 4.1 доказана.

Обозначим через $\Omega_\rho\big(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}; F'_\mu\big)$ пространство дифференциалов для ρ, кратных дивизору $\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}$ на F'_μ, а через $\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$ — подпространство голоморфных мультипликативно точных дифференциалов для ρ на F'_μ.

Теорема 4.2. *Векторное расслоение $E_2 = \bigcup \Omega_\rho\big(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}; F'_\mu\big)/\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$ является голоморфным векторным расслоением ранга $2g + n - 2 + s$ над базой $\mathbf{T}_{g,n} \times (L_g \backslash \{1\})$ при $g \geq 2$, $n \geq 2$, $s \geq 1$. При этом набор классов смежности дифференциалов*

$$\begin{gathered} f_0\zeta_1, \ldots, \widehat{f_0\zeta_k}, \ldots, f_0\zeta_g, f_0\tau_{P_1}^{(n_1+1)}, \ldots, f_0\tau_{P_1}^{(n_g+1)}, \\ f_0\tau_{P_2P_1}, \ldots, f_0\tau_{P_nP_1}, f_0\tau_{Q_1P_1}, \ldots, f_0\tau_{Q_sP_1} \end{gathered} \tag{4}$$

будет базисом локально голоморфных сечений этого расслоения, где $n_1, \ldots, n_g$ — мультипликативные пробелы Вейерштрасса в P_1 для ρ на F_μ, $\rho(a_k) \neq 1$, $Q_1, \ldots, Q_s$ — различные точки на F'_μ, голоморфно зависящие от $[\mu]$.

Доказательство. Рассмотрим отображение периодов

$$\Omega_\rho\left(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}; F'_\mu\right) \ni \omega \to [\omega] \in H^1(\Gamma'', \rho).$$

Класс $[\omega]$ задается набором классических периодов

$$\begin{aligned} (\omega(A_1) = 0, \omega(A_2), \ldots, \omega(A_g), \omega(B_1), \ldots, \omega(B_g), \\ \omega(\gamma_1), \ldots, \omega(\gamma_{n-1}), \omega(\tilde{\gamma}_1), \ldots, \omega(\tilde{\gamma}_s)). \end{aligned}$$

Здесь период $\omega(\gamma_n)$ выражается через остальные $2g + n + s - 2$ периодов и $F''_\mu = F'_\mu \backslash \{Q_1, \ldots, Q_s\} = F_\mu \backslash \{P_1, \ldots, P_n\} \cup \{Q_1, \ldots, Q_s\}$, $F''_\mu = U/\Gamma''$.

Если $\Omega\big(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}; F'_\mu\big) \ni \omega \to [\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma'', \rho)$, то дифференциал ω мультипликативно точный на F'_μ. Точки $Q_1, \ldots, Q_s$ — устранимые особые точки для ω, так как $2\pi i(\operatorname{res}_{Q_j} \omega) = \int_{\tilde{\gamma}_j} \omega = 0$, $j = 1, \ldots, s$. Поэтому $\omega \in \Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$. Следовательно, отображение периодов корректно определено, взаимно однозначно, линейно отображает $\Omega_\rho\big(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}; F'_\mu\big)/\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$ в $H^1(\Gamma'', \rho)$. Поэтому

$$\dim \Omega_\rho\left(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}; F'_\mu\right)/\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu) \leq 2g + n + s - 2.$$

Докажем обратное неравенство для размерностей и построим базис. Набор классов смежности дифференциалов из (4) будет линейно независим над $\mathbf{C}$. Действительно, если

$$\begin{aligned} C_1 f_0\zeta_1 + \cdots + \widehat{C_k f_0\zeta_k} + \cdots + C_g f_0\zeta_g + \tilde{c}_1 f_0\tau_{P_1}^{(n_1+1)} + \cdots + \tilde{c}_g f_0\tau_{P_1}^{(n_g+1)} \\ + \tilde{\tilde{c}}_1 f_0\tau_{P_2P_1} + \cdots + \tilde{\tilde{c}}_{n-1} f_0\tau_{P_nP_1} + c'_1 f_0\tau_{Q_1P_1} + \cdots + c'_s f_0\tau_{Q_sP_1} = df, \end{aligned}$$

то $\tilde{\tilde{c}}_1 = \cdots = \tilde{\tilde{c}}_{n-1} = c'_1 = \cdots = c'_s = 0$ ввиду того, что f — мультипликативная мероморфная функция для ρ на F'_μ и ее вычет равен нулю относительно точек $P_2, \ldots, Q_s$. Остается равенство

$$C_1 f_0\zeta_1 + \cdots + \widehat{C_k f_0\zeta_k} + \cdots + C_g f_0\zeta_g + \tilde{c}_1 f_0\tau_{P_1}^{(n_1+1)} + \cdots + \tilde{c}_g f_0\tau_{P_1}^{(n_g+1)} = df.$$

Отсюда сразу получаем, что $\tilde{c}_1 = \cdots = \tilde{c}_g = 0$, так как нет мультипликативной функции f для несущественного характера ρ с одним полюсом в P_1 точно порядка n_j для некоторого j. Теперь $C_1 f_0\zeta_1 + \cdots + \widehat{C_k f_0 \zeta_k} + \cdots + C_g f_0 \zeta_g = df$ и, как в доказательстве теоремы 4.1, получаем, что $C_j = 0$ для всех $j \neq k$. Отсюда размерность фактор-пространства больше или равна $2g + n + s - 2$ и построен базис. Теорема 4.2 доказана.

Следствие 4.1. *Векторное расслоение (со слоями, состоящими из первых голоморфных групп когомологий де Рама для ρ на F'_μ)*

$$E'_2 = \bigcup_{[\mu],\rho\neq 1} H^1_{\mathrm{hol},\rho}(F'_\mu) = \bigcup \Omega_\rho(1; F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$$

аналитически эквивалентно тривиальному векторному расслоению ранга $2g + n - 2$ над базой $\mathbf{T}_{g,n} \times (L_g \backslash \{1\})$ при $g \geq 2,\ n \geq 2$.

Зададим отображение периодов χ из $\Omega_\rho(1; F')$ на $H^1(\Gamma', \rho)$, сопоставляя ω его класс периодов $[\omega]$, который определяется набором классических периодов $\left(\int\limits_{a_1} \omega, \ldots, \int\limits_{a_g} \omega, \int\limits_{b_1} \omega, \ldots, \int\limits_{b_g} \omega, \int\limits_{\gamma_1} \omega, \ldots, \int\limits_{\gamma_{n-1}} \omega\right)$. Выбираем представитель в $[\omega]$, определенный условием $\int\limits_{a_1} \omega = \omega(A_1) = 0$.

Следствие 4.2. *На любой поверхности F' типа (g, n), $g \geq 2$, $n \geq 2$, для несущественного характера ρ имеет место изоморфизм $\Omega_\rho(1; F') \cong \operatorname{Ker}\chi \oplus H^1_{\mathrm{hol},\rho}(F')$, где $\operatorname{Ker}\chi = \Omega_{e,\rho}(1; F')$ — бесконечномерное векторное пространство и $\dim_{\mathbf{C}} H^1_{\mathrm{hol},\rho}(F') = 2g + n - 2$.*

§ 5. Дифференциалы Прима для существенного характера

Лемма 5.1. *На поверхности F'_μ типа (g, n), $g \geq 2$, $n \geq 1$, для существенного характера ρ существует $(\rho, 1)$-дифференциал $\tau_{Q^2 P_1}$, где $Q \in F'_\mu$, у которого $(\tau) = \frac{R_1 \ldots R_N}{Q^2 P_1 P_2^{k_2} \ldots P_n^{k_n}}$ на F_μ, где $k_j \in \mathbf{N}$, $j = 2, \ldots, n$, $R_k \neq P_1, Q$, $k = 1, \ldots, N$, $N = 2g - 2 + 3 + k_2 + \cdots + k_n$, локально голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ.*

Доказательство проводится, как в § 3.

Теорема 5.1. *Векторное расслоение $E_3 = \bigcup \Omega_{2,\rho}(F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$ есть голоморфное векторное расслоение ранга $2g - 2 + n$ над базой $\mathbf{T}_{g,n} \times \operatorname{Hom}(\Gamma', \mathbf{C}^*) \backslash L_g$ при $g \geq 2$, $n \geq 2$. При этом следующие наборы классов смежности дифференциалов Прима:*

$$\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_{g-1},\ \tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}, \ldots, \tau^{(2)}_{\widetilde{P}_{g-1}},\ \tau_{P_2 P_1}, \ldots, \tau_{P_n P_1}, \tau_{Q_0^2 P_1} \tag{5}$$

либо

$$\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_{g-1},\ \tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1}, \ldots, \tau^{(n_{g-1}+1)}_{\widetilde{P}_1},\ \tau_{P_2 P_1}, \ldots, \tau_{P_n P_1}, \tau_{Q_0^2 P_1}, \tag{6}$$

задают базис локально голоморфных сечений этого расслоения, где $Q_0 \in F'_\mu$, числа $n_1, \ldots, n_{g-1}$ — мультипликативные пробелы Вейерштрасса в точке $\widetilde{P}_1$ $(\in F'_\mu)$ на поверхности F_μ и $i_{\rho^{-1}}(\widetilde{P}_1 \ldots \widetilde{P}_{g-1}) = 0$, $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_{g-1} \in F'_\mu$.

Доказательство. Пусть ρ — существенный характер на F'_μ. Зададим отображение Φ из пространства $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ в $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ по правилу: сопоставим дифференциалу ω его класс периодов $[\omega] \in H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$.

Если $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ имеет класс периодов $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$, то дифференциал ω является мультипликативно точным для ρ на F'_μ, а значит, $\omega \in \Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$. Ясно также, что любой дифференциал ω из $\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$ имеет нулевой класс периодов. Таким образом, ядро отображения Φ совпадает с $\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$. Следовательно, это отображение корректно определено на фактор-пространстве $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$. При этом Φ взаимно однозначно и линейно. Отсюда получаем, что $\dim_{\mathbf{C}} \Omega_{2,\rho}(F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F'_\mu) \leq 2g + n - 2$.

Докажем, что верно обратное неравенство для размерностей, и построим два вида базисов в нашем фактор-пространстве. Из [2, с. 105] следует существование базиса $\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_{g-1}$ в пространстве голоморфных дифференциалов Прима на F_μ для существенного характера ρ, локально голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ. По теореме [2, с. 74] существует $g-1$ различных точек $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_{g-1}$ на F_μ таких, что $r_\rho\left(\frac{1}{\widetilde{P}_1 \ldots \widetilde{P}_{g-1}}\right) = 0$. Если некоторые из этих точек попали в проколы, то, применяя технику шевеления дивизоров, как в [2, с. 111], можно получить набор $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_{g-1} \in F'_\mu$ с таким же свойством.

Кроме того, по теореме о мультипликативных пробелах Вейерштрасса для существенного характера ρ в точке $\widetilde{P}_1$ $(\in F'_\mu)$ на F_μ имеется точно $g-1$ пробелов $n_1, \ldots, n_{g-1}$, удовлетворяющих условию $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_{g-1} < 2g$ на поверхности F_μ [2, с. 69].

В предложениях 3.2 и 3.3 доказано, что существуют два набора дифференциалов Прима для ρ на F'_μ : $\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}, \ldots, \tau^{(2)}_{\widetilde{P}_{g-1}}$, а именно элементарные дифференциалы второго рода с единственными полюсами второго порядка в точках $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_{g-1}$ соответственно и элементарные дифференциалы третьего рода $\tau_{P_2 P_1}, \ldots, \tau_{P_n P_1}$ с простыми полюсами в точках P_j и P_1, $j = 2, \ldots, n$, соответственно.

Предположим, что набор (5) будет представлять линейно зависимые классы смежности в нашем фактор-пространстве для существенного характера ρ, т. е. существует линейная комбинация с не равными нулю коэффициентами:

$$c_1\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + \tilde{c}_1\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1} + \cdots + \tilde{c}_{g-1}\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_{g-1}} \\ + \tilde{\tilde{c}}_1\tau_{P_2P_1} + \cdots + \tilde{\tilde{c}}_{n-1}\tau_{P_nP_1} + \tilde{\tilde{c}}_n\tau_{Q_0^2P_1} = df,$$

при фиксированном $Q_0 \in F'_\mu$, где f — мультипликативная функция на F'_μ (возможно, с полюсами любых порядков и существенно особыми точками на F_μ для ветвей этой функции).

Рассмотрим коэффициенты $\tilde{\tilde{c}}_j$, $j = 1, \ldots, n-1$. Пусть γ_j — петля, обходящая только точку P_j, $j = 2, \ldots, n$. Тогда классический период $\int\limits_{\gamma_j} df$ равен $c\sigma(\gamma_j)$ и, выбирая вместо f функцию $(f - c)$, получим, что $\int\limits_{\gamma_j} d(f - c) = 0$. Следовательно, $\tilde{\tilde{c}}_1 = \cdots = \tilde{\tilde{c}}_{n-1} = 0$.

Таким образом, $c_1\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + \tilde{c}_1\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1} + \cdots + \tilde{c}_{g-1}\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_{g-1}} + \tilde{\tilde{c}}_n\tau_{Q_0^2P_1} = df$. Функция f не может иметь полюсов в точках $P_2, \ldots, P_n$ и существенно особых точек в $P_1, \ldots, P_n$, так как их нет в левой части. Стало быть, f может иметь либо только устранимые особые точки во всех проколах, либо только полюс в проколе P_1.

1. Если P_1 — устранимая особая точка для f, то все проколы в этом случае суть устранимые особые точки для f на F_μ. Значит, $\tilde{\tilde{c}}_n = 0$ и из оставшегося ра-

венства получаем $\tilde{c}_1 = \cdots = \tilde{c}_{g-1} = 0$, так как не существует мультипликативной функции с простыми полюсами $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_{g-1}$ на F_μ по условию $r_\rho\bigl(\frac{1}{\widetilde{P}_1 \ldots \widetilde{P}_{g-1}}\bigr) = 0$.

2. Если P_1 — полюс порядка $m \geq 1$ для функции f, где $P_2, \ldots, P_n$ — устранимые особые точки, то df имеет полюс в P_1 порядка $m+1 \geq 2$. Но в выражении слева в точке P_1 полюс первого порядка, а значит, $\tilde{\tilde{c}}_n = 0$. Продолжая, как в первом случае, получим $\tilde{c}_1 = \cdots = \tilde{c}_{g-1} = 0$.

Осталось рассмотреть равенство $c_1\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} = df$.

1. Если f имеет в проколах P_j все устранимые особые точки, то f — мультипликативная единица на F_μ для существенного характера ρ. Поэтому $f \equiv 0$. Остается равенство $c_1\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} = 0$, и в силу линейной независимости таких дифференциалов на F_μ для ρ получаем, что $c_1 = \cdots = c_{g-1} = 0$.

2. Если f имеет хотя бы в одном проколе полюс или существенно особую точку, то особенности слева и справа различны, а значит, $df = 0$. Как и в первом случае, получаем, что $c_1 = \cdots = c_{g-1} = 0$.

Рассмотрим линейную комбинацию для набора (6) с ненулевыми коэффициентами

$$c_1\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + \tilde{c}_1\tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1} + \cdots + \tilde{c}_{g-1}\tau^{(n_{g-1}+1)}_{\widetilde{P}_1} + \tilde{\tilde{c}}_1\tau_{P_2P_1} + \cdots + \tilde{\tilde{c}}_{n-1}\tau_{P_nP_1} + \tilde{\tilde{c}}_n\tau_{Q_0^2P_1} = df$$

на F'_μ. Так же, как для предыдущего базиса, получаем, что $\tilde{\tilde{c}}_1 = \cdots = \tilde{\tilde{c}}_{n-1} = 0$. Осталось рассмотреть равенство

$$c_1\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + \tilde{c}_1\tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1} + \cdots + \tilde{c}_{g-1}\tau^{(n_{g-1}+1)}_{\widetilde{P}_1} + \tilde{\tilde{c}}_n\tau_{Q_0^2P_1} = df$$

на F'_μ. Снова f имеет либо только устранимые особые точки во всех проколах, либо только полюс в проколе P_1:

1) если P_1 — устранимая особая точка для f, то все проколы — устранимые особые точки для f на F_μ и $\tilde{\tilde{c}}_n = 0$;

2) если P_1 — полюс порядка $m \geq 1$ для f, снова $P_2, \ldots, P_n$ — устранимые особые точки для f, то df имеет в P_1 полюс порядка $m + 1 \geq 2$ и $\tilde{\tilde{c}}_n = 0$.

После этого получаем равенство

$$c_1\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + \tilde{c}_1\tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1} + \cdots + \tilde{c}_{g-1}\tau^{(n_{g-1}+1)}_{\widetilde{P}_1} = df.$$

Если в проколах есть хотя бы один полюс или существенно особая точка для f, то получаем противоречие, так как их нет в выражении слева. Поэтому f имеет единственный полюс в $\widetilde{P}_1$ некоторого порядка n_j на F_μ, что противоречит мультипликативным пробелам в $\widetilde{P}_1$ на F_μ. Следовательно, $\tilde{c}_1 = \cdots = \tilde{c}_{g-1} = 0$. Осталось равенство $c_1\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} = df$ на F'_μ. Как и раньше, показывается, что $c_1 = \cdots = c_{g-1} = 0$. Теорема 5.1 доказана.

Теорема 5.2. *Векторное расслоение* $E_4 = \bigcup \Omega_\rho\bigl(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}; F'_\mu\bigr)/\Omega_{e,\rho}(1, F'_\mu)$ *является голоморфным векторным расслоением ранга* $2g - 2 + n + s$ *над базой* $\mathbf{T}_{g,n} \times \mathrm{Hom}(\Gamma', \mathbf{C}^*)\backslash L_g$ *при попарно различных точках* $Q_1, \ldots, Q_s$, $s \geq 1$, *на поверхности* F'_μ *типа* (g, n), $g \geq 2$, $n \geq 2$. *При этом набор классов смежности дифференциалов Прима*

$$\begin{gathered}\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_{g-1}, \tau^{(n_1(P_1)+1)}_{P_1}, \ldots, \tau^{(n_{g-1}(P_1)+1)}_{P_1}, \\ \tau_{P_2P_1}, \ldots, \tau_{P_nP_1}, \tau_{Q_1P_1}, \ldots, \tau_{Q_sP_1}, \tau_{P_2^2P_1},\end{gathered} \tag{7}$$

где $n_1, \dots, n_{g-1}$ — мультипликативные пробелы Вейерштрасса в P_1 на F_μ для ρ, задает базис локально голоморфных сечений этого расслоения.

Доказательство. Достаточно доказать только линейную независимость классов смежности дифференциалов из набора (7). Предположим, что существует линейная комбинация, у которой не все коэффициенты равны нулю, следующего вида:

$$c_1\tilde{\zeta}_1 + \dots + c_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + \tilde{c}_1\tau_{P_1}^{(n_1(P_1)+1)} + \dots + \tilde{c}_{g-1}\tau_{P_1}^{(n_{g-1}(P_1)+1)}$$
$$+ \tilde{\tilde{c}}_2\tau_{P_2P_1} + \dots + \tilde{\tilde{c}}_n\tau_{P_nP_1} + \tilde{\tilde{c}}_{n+1}\tau_{Q_1P_1} + \dots + \tilde{\tilde{c}}_{n+s}\tau_{Q_sP_1} + c'\tau_{P_2^2P_1} = df.$$

Если f имеет существенно особые точки в проколах, то сразу получаем противоречие, так как их нет в выражении слева. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, с помощью вычетов и периодов получим, что $\tilde{\tilde{c}}_j = 0$, $j = 2, \dots, n+s$. Остается рассмотреть равенство

$$c_1\tilde{\zeta}_1 + \dots + c_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + \tilde{c}_1\tau_{P_1}^{(n_1(P_1)+1)} + \dots + \tilde{c}_{g-1}\tau_{P_1}^{(n_{g-1}(P_1)+1)} + c'\tau_{P_2^2P_1} = df.$$

Так как $n_1(P_1) + 1 \geq 2$, все остальные показатели не менее двух [2]. Вычет при обходе только вокруг P_1 будет кратен c', т. е. имеет вид Mc', $M \neq 0$, а справа из-за мультипликативной точности df классический период при обходе только вокруг P_1 можно сделать нулевым. Отсюда $c' = 0$. Продолжая доказательство, как в предыдущей теореме, получаем, что все остальные коэффициенты равны нулю. Классы смежности дифференциалов из набора (7) образуют базис в нашем фактор-пространстве. Теорема 5.2 доказана.

Следствие 5.1. *Векторное расслоение*

$$E'_4 = \bigcup H^1_{\mathrm{hol},\rho}(F'_\mu) = \bigcup \Omega_\rho(1; F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$$

является голоморфным векторным расслоением ранга $2g+n-2$ над базой $\mathbf{T}_{g,n} \times (\mathrm{Hom}(\Gamma', \mathbf{C}^*)\backslash L_g)$ при $g \geq 2$, $n \geq 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gunning R. C.* On the period classes of Prym differentials // J. Reine Angew. Math. 1980. Bd 319. S. 153–171.
2. *Чуешев В. В.* Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Кемерово: КемГУ, 2003. Ч. 2.
3. *Чуешев В. В., Якубов Э. Х.* Мультипликативные точки Вейерштрасса на компактной римановой поверхности // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1408–1429.
4. *Dick R.* Krichever–Novikov-like bases on punctured Riemann surface // Deutsches Elektronen–Synchrotron (DESY) 89-059. May, 1989. 11 p.
5. *Dick R.* Holomorphic differentials on punctured Riemann surface // Differ. Geom. Math. Theor. Phys.: Phys. and Geom. / Proc. NATO Adv. Res. Workshop and 18 Int. Conf. Davis. Calif. 2–8 June. New York; London, 1990. P. 475–483.
6. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New-York: Springer-Verl., 1992. (Grad. Text's Math.; V. 71).
7. *Кричевер И. М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 6. С. 180–208.
8. *Fay J.* Analytic torsion and Prym differential // Proc. of the 1978 Stony Brook Conf. Princeton: Princeton Univ. Press, 1980. P. 107–122.
9. *Kempf G.* A property of the periods of Prym differentials // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 54. P. 181–184.
10. *Альфорс Л. В., Берс Л.* Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

11. *Крушкаль С. Л.* Квазиконформные отображения и римановы поверхности. Новосибирск: Наука, 1975.

12. *Earle C. J.* Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties // Ann. Math. 1978. V. 107. P. 255–286.

Статья поступила 8 февраля 2011 г.

Казанцева Алена Алексеевна
Горно-Алтайский гос. университет, математический факультет,
кафедра математического анализа, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 649000
albesik@mail.ru

Чуешев Виктор Васильевич
Кемеровский гос. университет, математический факультет,
кафедра математического анализа,
ул. Красная, 6, Кемерово 650043
vvchueshev@ngs.ru