Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 517.54

УСЛОВИЕ МЁБИУСОВЫХ СЕРЕДИН КАК ПРИЗНАК КВАЗИКОНФОРМНОСТИ И КВАЗИМЁБИУСОВОСТИ

В. В. Асеев

Аннотация. Условие середин, введенное Голдбергом (1974 г.) как критерий квазисимметричности отображения прямой на себя и рассмотренное В. В. Асеевым и Д. Г. Кузиным (1998 г.) в том же качестве для топологических вложений прямой в пространство $\mathbb{R}^n$, не дает, однако, никакой информации о квазиконформности или квазисимметричности топологического вложения $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$ при $1 < k \le n$. В статье вводится мёбиусово-инвариантная модификация условия середин, названная условием «мёбиусовых середин» УМС$(f) \le H < 1$. Доказано, что при выполнении этого условия гомеоморфизм областей в $\overline{\mathbb{R}^n}$ является $K(H)$-квазиконформным, а топологическое вложение сферы $\overline{\mathbb{R}^k}$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ $(1 \le k \le n)$ — ω_H-квазимёбиусовым. Коэффициент квазиконформности $K(H)$ и функция искажения ω_H зависят только от H и выражены явными формулами, показывающими, что $K(H) \to 1$ и $\omega_H \to \mathrm{id}$ при $H \to 1/2$. Так как УМС$(f) = 1/2$ равносильно мёбиусовости отображения f, полученные формулы дают близость отображения к мёбиусову при H, близком к $1/2$.

Ключевые слова: квазиконформность, квазиконформное отображение, квазисимметричность, квазисимметрическое вложение, квазимёбиусовость, квазимёбиусово вложение, условие середин, ограниченное искривление, абсолютное двойное отношение, мёбиусово-инвариантная характеристика, функция искажения.

1. Квазиконформность, квазисимметричность и условие середин. Мы пользуемся метрическим определением квазиконформности.

1.1. Определение [1]. Гомеоморфизм $f : D \to f(D)$ области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется K-*квазиконформным*, если для любой точки $x_0 \in D$ величина

$$\delta_f(x_0) = \limsup_{r\to 0} \frac{\max\limits_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|}{\min\limits_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|}$$

ограничена сверху единой константой, не зависящей от выбора точки $x_0 \in D$, и почти всюду (относительно n-мерной меры Лебега) в D выполняется неравенство $\delta_f(x_0) \le K$.

В случае отображения области $D \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ на область в $\overline{\mathbb{R}^n}$ гомеоморфизм f называется K-*квазиконформным*, если его ограничение на область $D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$ K-квазиконформно (здесь неявно используется устранимость точки для квазиконформных отображений).

Свойство квазисимметричности вещественной функции $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ возникло в теории плоских квазиконформных отображений как критерий продолжимости этой функции до квазиконформного отображения верхней полуплоскости на себя (задача Альфорса — Бейрлинга [2, теорема 1]).

Для того чтобы вещественная монотонно возрастающая функция $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, осуществляющая гомеоморфизм вещественной оси $\mathbb{R}^1$ на себя, продолжалась до квазиконформного автоморфизма верхней полуплоскости, необходимо и достаточно существование такой константы k, чтобы для всех $x \in \mathbb{R}^1$ и $t > 0$ выполнялась оценка

$$\frac{1}{k} \le \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \le k. \tag{1.1}$$

1.2. В работе Келингоса [3] монотонно возрастающие функции, заданные на связном подмножестве $J \subset \mathbb{R}^1$ и удовлетворяющие условию (1.1) при всех таких x и $t > 0$, для которых $[x - t, x + t] \subset J$, названы *k-квазисимметрическими* и дано описание их основных свойств. Гольдберг [4] показал, что квазисимметричность вещественной непрерывной функции эквивалентна следующему условию, названному им *условием выпуклости-вогнутости*: существует такая константа $0 \le h < 1/2$, что для любого отрезка $[x_1, x_2] \subset J$

$$\left| f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right| \le h|f(x_1) - f(x_2)| \tag{1.2}$$

(образ середины отрезка не может подходить слишком близко к образам его концов).

1.3. Условие (1.1) естественно распространяется на топологические вложения произвольных метрических пространств: Пусть $f : X \to Y$ — топологическое вложение метрического пространства X в метрическое пространство Y с метриками $|a - b|_X$ и $|a - b|_Y$ соответственно. Отображение f *удовлетворяет условию Келингоса с константой* k (используется запись УК$(f) \le k$), если для любой тройки попарно различных точек $x_1, x_2, x_3 \in X$, у которых $|x_1 - x_3|_X = |x_2 - x_3|_X$, выполняется оценка

$$\frac{1}{k} \le \frac{|f(x_1) - f(x_3)|_Y}{|f(x_2) - f(x_3)|_Y} \le k. \tag{1.3}$$

В том случае, когда f — гомеоморфизм областей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, из условия (1.3) тривиально следует его квазиконформность (но не наоборот). В общей ситуации условие Келингоса не дает удовлетворительного описания тех свойств отображений, которые можно было бы считать обобщением понятия квазиконформности.

1.4. В фундаментальной работе [5] Тукиа и Вяйсяля ввели более сильное понятие квазисимметричности топологического вложения $f : X \to Y$ метрических пространств.

Пусть на полуоси $[0, +\infty)$ задана вещественная непрерывная монотонно возрастающая функция $\eta(t)$ с $\eta(0) = 0$. Топологическое вложение $f : X \to Y$ называется *η-квазисимметрическим* (с функцией искажения η), если для любой тройки попарно различных точек $x_1, x_2, x_3 \in X$ выполняется оценка

$$\frac{|f(x_1) - f(x_3)|_Y}{|f(x_2) - f(x_3)|_Y} \le \eta\left(\frac{|x_1 - x_3|_X}{|x_2 - x_3|_X}\right). \tag{1.4}$$

Именно такое определение квазисимметричности дало полноценный аналог квазиконформности в общих метрических пространствах, ибо класс квазиконформных отображений областей в $\mathbb{R}^n$ совпадает с классом локально квазисимметрических отображений в смысле этого определения.

1.5. С квазисимметричностью тесно связано понятие квазимёбиусовости, введенное Вяйсяля в [6] (см. также [7, с. 17]).

Пусть на полуоси $[0,+\infty)$ задана вещественная непрерывная монотонно возрастающая функция $\eta(t)$ с $\eta(0)=0$. Топологическое вложение $f: X \to Y$ называется *η-квазимёбиусовым* (с функцией искажения η), если для любой четверки попарно различных точек $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ выполняется оценка

$$\frac{|f(x_1)-f(x_2)|_Y |f(x_3)-f(x_4)|_Y}{|f(x_1)-f(x_3)|_Y |f(x_2)-f(x_4)|_Y} \le \eta\left(\frac{|x_1-x_2|_X |x_3-x_4|_X}{|x_1-x_3|_X |x_2-x_4|_X}\right). \tag{1.5}$$

1.6. Условие (1.2), введенное Гольдбергом, также естественно распространяется на случай отображений, заданных на подмножествах пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ и X — метрическое пространство. Топологическое вложение $f: D \to X$ *удовлетворяет условию середин с константой* $H < 1$, если для любой пары точек $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $(x+y)/2 \in D$, выполняется оценка

$$\left| f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) \right|_X \le H \cdot |f(y)-f(x)|_X. \tag{1.6}$$

В этой ситуации используем запись $\text{УС}(f) \le H$.

Замечание. В частности, при $X = \mathbb{R}^m$ из $\text{УК}(f) \le H < 1$ легко выводится оценка

$$\left| \frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \le \sqrt{H^2 - 2^{-2}} \cdot |f(x)-f(y)|, \tag{1.6.1}$$

показывающая, что условие середин является прямым обобщением на пространственный случай условия (1.2), введенного Гольдбергом для отображений из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^1$.

Условие середин рассмотрено в [8, определение 0.2] для топологических вложений $f: I \to X$ связного подмножества $I \subset \mathbb{R}^1$ в метрическое пространство X. В частности, доказано [8, теорема 2.3], что при $\text{УС}(f) \le H < 1$ топологическое вложение $F: I \to \mathbb{R}^n$ является η-квазисимметрическим с функцией искажения η, зависящей лишь от H и n. Ниже будет показано, что на самом деле в этой теореме имеется функция искажения η, не зависящая от размерности n.

Константа H в условии середин всегда удовлетворяет неравенству $H \ge 1/2$ [8, утверждение 2.4]. При $\text{УС}(f) = 1/2$ топологическое вложение $f: I \to \mathbb{R}^n$ аффинно и $f(I)$ лежит на прямой в $\mathbb{R}^n$. Вместе с тем любой гомеоморфизм прямой на себя (не являющийся квазисимметрическим) удовлетворяет условию середин с константой $H = 1$. Так что ограничение $H < 1$ в приведенной выше теореме существенно.

В более общем случае топологического вложения $f: D \to \mathbb{R}^n$ выпуклой области $D \subset \mathbb{R}^n$ свойство $\text{УС}(f) \le H < 1$ также не дает никакой информации о квазиконформности, ибо любое аффинное отображение удовлетворяет условию середин с константой $H = 1/2$, но может иметь сколь угодно большой коэффициент квазиконформности.

1.7. Мы предлагаем придать условию середин мёбиусово-инвариантную форму. Для этого заметим, что в пространстве $\overline{\mathbb{R}^n}$, наделенном хордовой метрикой $q(x,y)$, для любой упорядоченной тройки попарно различных точек $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ имеется единственная точка $x = \text{Mid}(T)$, для которой

$$\frac{q(x_1,x)q(x_2,x_3)}{q(x_1,x_2)q(x,x_3)} = \frac{q(x_2,x)q(x_1,x_3)}{q(x_2,x_1)q(x,x_3)} = \frac{1}{2} \tag{1.7}$$

(мёбиусово преобразование $\mu : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, переводящее точки x_1, x_2, x_3 соответственно в точки $0, e, \infty$, переводит точку x в середину отрезка $[0, e]$). Точку $x = \mathrm{Mid}(T)$ мы назовем *мёбиусовой серединой* упорядоченной тройки $T = \{x_1, x_2, x_3\}$.

1.8. Определение. Пусть $D \subset \overline{\mathbb{R}^n}$. Топологическое вложение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^m}$ удовлетворяет на D *условию мёбиусовых середин* с константой $H < 1$, если для любой упорядоченной тройки точек $T = \{x_1, x_2, x_3\} \subset D$, у которой $\mathrm{Mid}(T) \in D$, выполняется неравенство

$$\frac{q(f(\mathrm{Mid}(T)), f(x_1)) \cdot q(f(x_2), f(x_3))}{q(f(x_1), f(x_2)) \cdot q(f(\mathrm{Mid}(T)), f(x_3))} \leq H. \tag{1.8}$$

В этом случае используем запись $\text{УМС}(f) \leq H$.

1.9. Утверждение. *Если топологическое вложение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^m}$ множества $D \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, содержащего точку ∞, удовлетворяет условию мёбиусовых середин $\text{УМС}(f) \leq H < 1$ и $f(\infty) = \infty$, то его ограничение $f|(D \setminus \{\infty\})$ удовлетворяет условию середин с той же константой H, т. е. $\text{УС}(f) \leq H$.*

Доказательство. Пусть точки $x, y, z = (x + y)/2$ лежат в $D \setminus \{\infty\}$. Тогда точка z служит мёбиусовой серединой тройки точек $T = \{x, y, \infty\}$, так как

$$\frac{q(x, z) \cdot q(y, \infty)}{q(x, y) \cdot q(z, \infty)} = \frac{|x - z|}{|x - y|} = \frac{1}{2} = \frac{|y - z|}{|x - y|} = \frac{q(y, z) \cdot q(x, \infty)}{q(x, y) \cdot q(z, \infty)}.$$

Применив $\text{УМС}(f) \leq H$ к тройке точек T, получим требуемое неравенство (1.6):

$$\frac{|f(z) - f(x)|}{|f(x) - f(y)|} = \frac{q(f(z), f(x)) \cdot q(f(y), \infty)}{q(f(x), f(y)) \cdot q(f(z), \infty)} \leq H.$$

Утверждение доказано.

Основным результатом статьи является доказательство следующих утверждений, анонсированных автором в [9].

1.10. Теорема. *Пусть D — область в пространстве $\overline{\mathbb{R}^n}$, и пусть гомеоморфизм $f : D \to f(D) \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ удовлетворяет условию мёбиусовых середин с константой $H < 1$, т. е. $\text{УМС}(f) \leq H < 1$. Тогда f является K-квазиконформным отображением с*

$$K \leq 2H + \sqrt{4H^2 - 1}. \tag{1.9.1}$$

В частности, при $H = 1/2$ отображение f 1-квазиконформно. При $H = (1/2) + \delta$, где $0 \leq \delta < 1/2$, коэффициент квазиконформности K отображения f имеет оценку

$$K \leq 1 + (2\delta + 2\sqrt{\delta(1 + \delta)}), \tag{1.9.2}$$

стремящуюся к 1 при $\delta \to 0$.

1.11. Теорема. *Если топологическое вложение $f : \overline{\mathbb{R}^k} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ $(1 \leq k \leq n)$ удовлетворяет условию мёбиусовых середин $\text{УМС}(f) \leq H < 1$, то оно ω-квазимёбиусово с функцией искажения*

$$\omega(t) = C(H) \cdot \begin{cases} t^{1-\beta(H)} & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ t^{1+\gamma(H)} & \text{при } t \geq 1, \end{cases} \tag{1.10.1}$$

где

$$\beta(H) = 1 + \frac{\operatorname{Ln} H}{\operatorname{Ln} 2}\left(1 - \sqrt[4]{H - \frac{1}{2}}\right) \geq 0, \tag{1.10.2}$$

$$\gamma(H) = -1 - \frac{\operatorname{Ln}(1-H)}{\operatorname{Ln} 2} \geq 0, \tag{1.10.3}$$

$$C(H) = \frac{H}{1-H}\left(1 + \frac{48}{(1-H)^5}\sqrt[4]{H^2 - \frac{1}{4}}\right) \times \exp\left[2\left(\operatorname{Ln}\frac{H}{1-H} - \sqrt[4]{H - \frac{1}{2}} \cdot \operatorname{Ln} H\right)\right] \times \left[1 + \sqrt[4]{H - \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{H + \frac{1}{2}}\left(\frac{1}{eH^2 \operatorname{Ln}(1/H)} + \frac{\sqrt[4]{H - 1/2}}{H(H-1)}\right)\right] \geq 1. \tag{1.10.4}$$

При $H \to 1/2$ имеем сходимость $C(H) \to 1$, $\beta(H) \to 0$, $\gamma(H) \to 0$.

В доказательстве этой теоремы существенно используются идеи Д. А. Троценко, отраженные в его статьях [10, 11]. С учетом того, что условие мёбиусовых середин с константой $H = 1/2$ равносильно мёбиусовости отображения f (т. е. η-квазимёбиусовости с функцией искажения $\eta(t) \equiv t$), это означает устойчивость по H в полученной выше оценке квазимёбиусовости.

1.12. Замечание. Для произвольного ω-квазимёбиусова вложения с функцией искажения $\omega(t)$, очевидно, выполняется условие мёбиусовых середин с константой $H = \omega(1/2)$, которая не обязана удовлетворять неравенству $H < 1$. К сожалению, автору не удалось получить никакой информации о свойствах отображений, удовлетворяющих условию УМС с константой $H \geq 1$. Не удалось также построить пример отображения с $\text{УМС}(f) \geq 1$, которое не является квазимёбиусовым.

2. Кривые и дуги с ограниченным искривлением. *Жордановой дугой* γ в метрическом пространстве X называется гомеоморфный образ интервала I на вещественной прямой $\mathbb{R}^1$. В зависимости от того, является I замкнутым или открытым промежутком, дугу γ называют соответственно *открытой* или *замкнутой.* В литературе по квазиконформным отображениям (см., например, [12]) под искривлением (turning) жордановой дуги понимается величина, характеризующая отличие этой дуги от прямолинейного отрезка или от дуги окружности.

2.1. Определения. Пусть γ — жорданова дуга в метрическом пространстве X.

2.1.1 [5, 2.7]. Соотношение $\mathrm{BT}(\gamma) \leq c$ означает, что для любой пары точек $a, b \in \gamma$ диаметр поддуги $\gamma_{ab} \subset \gamma$ с концами в этих точках удовлетворяет неравенству $\operatorname{diam}_X(\gamma_{ab}) \leq c|a-b|_X$.

2.1.2 [10]. Соотношение $\mathrm{AB}(\gamma) \leq c$ означает, что для любой пары точек $a, b \in \gamma$ и для любой точки $x \in \gamma_{ab}$ на поддуге $\gamma_{ab} \subset \gamma$ с концами в точках a и b выполняется оценка $|a-x|_X + |x-b|_X \leq c|a-b|_X$.

2.1.3 [13, 3.1]. Соотношение $\mathrm{RT}(\gamma) \leq c$ означает, что для любой четверки попарно различных точек x_1, x_2, x_3, x_4, расположенных последовательно на дуге γ, выполняется оценка

$$\frac{|x_1 - x_2|_X |x_3 - x_4|_X + |x_1 - x_4|_X |x_2 - x_3|_X}{|x_1 - x_3|_X |x_2 - x_4|_X} \leq c.$$

2.1.4 [10]. Пусть $\gamma \subset \mathbb{R}^n$. Соотношение $\mathrm{TT}(\gamma) \le r$ означает, что для любой пары точек $a, b \in \gamma$ поддуга γ_{ab} с концами в этих точках лежит в евклидовой $r|a-b|$-окрестности прямолинейного отрезка с концами a и b.

В каждом из этих случаев дуга γ называется дугой с *ограниченным искривлением.* Каждое из соотношений в 2.1 инвариантно при отображениях подобия; соотношение 2.1.3 инвариантно при мёбиусовых отображениях (т. е. при отображениях, сохраняющих абсолютное двойное отношение четверок точек). Кроме того, соотношение $\mathrm{RT}(\gamma) \le c$ дословно переносится и на случай *жордановой кривой* γ (гомеоморфный образ окружности). В пространстве $\overline{\mathbb{R}^n}$ с хордовым расстоянием соотношение $\mathrm{RT}(\gamma) = 1$ эквивалентно тому, что дуга γ содержится в обобщенной окружности либо кривая γ является обобщенной окружностью (см. [13, с. 9]).

2.2. Утверждение. *Пусть γ — жорданова дуга в метрическом пространстве X. Тогда*

2.2.1. $\langle \mathrm{AB}(\gamma) \le c\rangle \Rightarrow \langle \mathrm{BT}(\gamma) \le 1 + 2c\rangle$.

2.2.2. $\langle \mathrm{BT}(\gamma) \le c\rangle \Rightarrow \langle \mathrm{AB}(\gamma) \le 2c\rangle$.

2.2.3. $\langle \mathrm{AB}(\gamma) \le c\rangle \Rightarrow \langle \mathrm{RT}(\gamma) \le c^2\rangle$.

Кроме того, в евклидовом пространстве $X = \mathbb{R}^n$

2.2.4. $\langle \mathrm{TT}(\gamma) \le r\rangle \Rightarrow \langle \mathrm{AB}(\gamma) \le 1 + 2r\rangle$.

2.2.5. $\langle \mathrm{AB}(\gamma) \le c\rangle \Rightarrow \langle \mathrm{TT}(\gamma) \le \sqrt{c^2-1}/2\rangle$.

2.2.6. *Пусть $\gamma \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ либо жорданова дуга с одним из концов в точке ∞, либо жорданова кривая, проходящая через ∞. Тогда*

$$\langle \mathrm{RT}(\gamma) \le c\rangle \Rightarrow \langle \mathrm{AB}(\gamma \setminus \{\infty\}) \le c\rangle.$$

Доказательство. 2.2.1. Пусть $a, b \in \gamma$. Для любых $x, y \in \gamma_{ab}$ в силу неравенства треугольника и условия $\mathrm{AB}(\gamma) \le c$ имеем оценку

$$|x-y|_X \le |a-b|_X + |x-a|_X + |b-y|_X \le |a-b|_X + 2c|a-b|_X = (1+2c)|a-b|_X.$$

Следовательно, $\operatorname{diam}_X(\gamma_{ab}) \le (1+2c)|a-b|_X$.

2.2.2. Пусть $a, b \in \gamma$. Для любого $x \in \gamma_{ab}$ из условия $\mathrm{BT}(\gamma) \le c$ следует

$$|a-x|_X + |x-b|_X \le 2\operatorname{diam}_X(\gamma_{ab}) \le 2c|a-b|_X.$$

2.2.3. Возьмем произвольно четверку попарно различных точек x_1, x_2, x_3, x_4, расположенных последовательно на дуге γ. Так как $x_2 \in \gamma_{x_1x_3}$ и $x_3 \in \gamma_{x_2x_4}$, условие $\mathrm{AB}(\gamma) \le c$ дает неравенства

$$|x_1-x_2|_X + |x_2-x_3|_X \le c|x_1-x_3|_X, \quad |x_2-x_3|_X + |x_3-x_4|_X \le c|x_2-x_4|_X,$$

используя которые, приходим к требуемой оценке:

$$\begin{aligned} &|x_1-x_3|_X|x_2-x_4|_X \ge c^{-2}(|x_1-x_2|_X + |x_2-x_3|_X)(|x_2-x_3|_X + |x_3-x_4|_X) \\ &= c^{-2}[|x_2-x_3|_X(|x_1-x_2|_X + |x_2-x_3|_X + |x_3-x_4|_X) + |x_1-x_2|_X|x_3-x_4|_X] \\ &\qquad \ge c^{-2}(|x_2-x_3|_X|x_1-x_4|_X + |x_1-x_2|_X|x_3-x_4|_X). \end{aligned}$$

2.2.4. Пусть $a, b \in \gamma$ и $x \in \gamma_{ab}$. В силу условия $\mathrm{TT}(\gamma) \le r$ на отрезке l_{ab} с концами a и b имеется точка x', для которой $|x-x'| \le r|a-b|$. Сложив неравенства $|a-x| \le |a-x'|+|x'-x| \le |a-x'|+r|a-b|$ и $|x-b| \le |b-x'|+|x-x'| \le |x'-b|+r|a-b|$, получим требуемую оценку: $|a-x|+|x-b| \le |a-b|+2r|a-b| = (1+2r)|a-b|$.

2.2.5. Пусть $a, b \in \gamma$ и $x \in \gamma_{ab}$. На прямолинейном отрезке l_{ab} с концами в точках a и b найдем точку x', ближайшую к точке x. Положим $\varepsilon = |x - x'|/|a-b|$. Если $x' = a$, то угол между отрезками l_{ab} и l_{ax} тупой, поэтому $|x-b| \geq \sqrt{|a-b|^2 + |x-a|^2}$. Из условия $\mathrm{AB}(\gamma) \leq c$ вытекает неравенство

$$(\varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2})|a-b| = |x-a| + \sqrt{|x-a|^2 + |a-b|^2} \leq |x-a| + |x-b| \leq c|a-b|.$$

Разрешив полученное неравенство $\varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2} \leq c$, приходим к оценке $\varepsilon \leq (c^2-1)/(2c)$. Такая же оценка получается и в случае $x' = b$. Если x' лежит на отрезке l_{ab} строго между его концами, то

$$|x-a| + |x-b| = \sqrt{\varepsilon^2|a-b|^2 + |x'-a|^2} + \sqrt{\varepsilon^2|a-b|^2 + |x'-b|^2} \leq c|a-b|.$$

Положив $t = |x'-b|/|a-b|$, приходим к неравенству

$$\sqrt{\varepsilon^2 + t^2} + \sqrt{\varepsilon^2 + (1-t)^2} \leq c,$$

левая часть которого как функция от $t \in (0,1)$ имеет единственную точку экстремума $t = 1/2$, в которой она достигает минимума, равного $2\sqrt{\varepsilon^2 + (1/2)^2}$. Следовательно, $2\sqrt{\varepsilon^2 + (1/2)^2} \leq c$ и $\varepsilon \leq \sqrt{c^2-1}/2$. Таким образом, во всех случаях справедливо неравенство

$$|x-x'| = \varepsilon|a-b| \leq \max\left\{\frac{c^2-1}{2c}, \frac{\sqrt{c^2-1}}{2}\right\}|a-b| = \frac{\sqrt{c^2-1}}{2}|a-b|,$$

которое означает, что x лежит в евклидовой d-окрестности отрезка l_{ab}, где $d = \sqrt{c^2-1}/2$.

2.2.6. Пусть $a, b \in \gamma \setminus \{\infty\}$ и $x \in \gamma_{ab}$, $\infty \notin \gamma_{ab}$. Тогда либо точки a, x, b, ∞, либо b, x, a, ∞ расположены последовательно на γ и в силу условия $\mathrm{RT}(\gamma) \leq c$ выполняется неравенство

$$\frac{|a-x| + |x-b|}{|a-b|} = \frac{q(a,x)q(b,\infty) + q(a,\infty)q(x,b)}{q(a,b)q(x,\infty)} \leq c.$$

Это и означает, что $\mathrm{AB}(\gamma \setminus \{\infty\}) \leq c$.

Утверждение полностью доказано.

В следующей лемме утверждение [8, лемма 2.1] уточняется для случая $\mathscr{X} = \mathbb{R}^n$.

2.3. Лемма. *Пусть I — связное подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}^1$ и топологическое вложение $f : I \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию середин с константой $H < 1$, т. е. $\text{УС}(f) \leq H < 1$. Тогда дуга $f(I)$ имеет ограниченное искривление*

$$\mathrm{TT}(f(I)) \leq \frac{\sqrt{H^2 - (1/2)^2}}{1-H}. \tag{2.3.1}$$

Доказательство. Пусть на I задан произвольный отрезок $\mathscr{I} = [a_0, a_1] \subset I$. Для каждого $N = 0, 1, \ldots$ рассмотрим на $\mathscr{I}$ сеть N-го ранга

$$a_0 = a_N^{(0)} < a_N^{(1)} < \cdots < a_N^{(2^N)} = a_1$$

с узлами $a_N^{(j)} = a_0 + (a_1 - a_0)j2^{-N}$ $(j = 0, 1, \ldots, 2^N)$, ячейками которой служат отрезки $\mathscr{I}_N^{(i)} = \big[a_N^{(i-1)}, a_N^{(i)}\big]$ $(i = 1, \ldots, 2^N)$. Введем обозначения $b_N^{(j)} = f\big(a_N^{(j)}\big)$

и рассмотрим кусочно линейное отображение $g_N(t)$, совпадающее с f в узлах $a_N^{(j)}$ $(j = 0, 1, \dots, 2^N)$ и линейное на каждой ячейке $\mathscr{I}_N^{(i)}$ $(i = 1, \dots, 2^N)$. Прямолинейный отрезок с концами в точках $b_N^{(i-1)}$ и $b_N^{(i)}$ обозначим через $L_N^{(i)}$ $(i = 1, \dots, 2^N)$.

Убедимся, что

$$\lambda_N := \max_{i=1,\dots,2^N} \left|b_N^{(i)} - b_N^{(i-1)}\right| \le H^N |f(a_1) - f(a_0)|. \tag{2.3.2}$$

При $N = 0$ имеем тривиальное равенство $\lambda_0 = \left|b_0^{(1)} - b_0^{(0)}\right| = |f(a_1) - f(a_0)|$. Допустив выполнение оценки (2.3.2), докажем справедливость соответствующей оценки для $N+1$. Любое звено ломаной $g_{N+1}(\mathscr{I})$ является либо отрезком $L_{N+1}^{(2i+1)}$ с концами в точках $b_{N+1}^{(2i)} = b_N^{(i)}$ и $b_{N+1}^{(2i+1)}$ $(i \in \{0, \dots, 2^N - 1\})$, либо отрезком $L_{N+1}^{(2i)}$ с концами в точках $b_{N+1}^{(2i-1)}$ и $b_{N+1}^{(2i)} = b_N^{(i)}$. В каждом из этих случаев условие середин $\text{УС}(f) \le H < 1$ показывает, что длина этого звена не превосходит числа $H\lambda_N$ и, следовательно, $\lambda_{N+1} \le H\lambda_N \le H^{N+1}|f(a_1) - f(a_0)|$. Неравенство (2.3.2) доказано.

Положим $\delta_N := \sqrt{H^2 - (1/2)^2}\, H^N |f(a_1) - f(a_0)|$. Для каждого звена $L_N^{(i)}$ ломаной $g_N(\mathscr{I})$ точка $b_{N+1}^{(2i-1)}$ является f-образом середины отрезка $\mathscr{I}_N^{(i)}$ и в силу условия середин $\text{УС}(f) \le H < 1$ точка $b_{N+1}^{(2i-1)}$ лежит в евклидовой замкнутой $\varepsilon_N^{(i)}$-окрестности отрезка $L_N^{(i)}$, где

$$\varepsilon_N^{(i)} = \sqrt{H^2 - (1/2)^2}\left|b_N^{(i-1)} - b_N^{(i)}\right| \le \sqrt{H^2 - (1/2)^2}\,\lambda_N \le \delta_N.$$

Ввиду выпуклости δ_N-окрестности отрезка $L_N^{(i)}$ оба звена $L_{N+1}^{(2i-1)}$ и $L_{N+1}^{(2i)}$ ломаной $g_{N+1}(\mathscr{I})$ лежат в δ_N-окрестности звена $L_N^{(i)}$ ломаной $g_N(\mathscr{I})$. Следовательно, ломаная $g_{N+1}(\mathscr{I})$ лежит в замкнутой евклидовой δ_N-окрестности ломаной $g_N(\mathscr{I})$. Так как это верно для всех $N = 0, 1, \dots$, ломаная $g_N(\mathscr{I})$ содержится в замкнутой евклидовой σ_N-окрестности отрезка $g_0(\mathscr{I})$ с концами $f(a_1)$ и $f(a_0)$, где

$$\begin{aligned}\sigma_N = \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{N-1} &\le \sqrt{H^2 - (1/2)^2}\,|f(a_1) - f(a_0)|(1 + H + \dots + H^{N-1}) \\ &\le \frac{\sqrt{H^2 - (1/2)^2}}{1 - H}|f(a_1) - f(a_0)| = \sigma.\end{aligned}$$

Но тогда и дуга $f(\mathscr{I})$, будучи топологическим пределом последовательности ломаных $g_N(\mathscr{I})$, содержится в замкнутой евклидовой σ-окрестности прямолинейного отрезка с концами $f(a_0)$ и $f(a_1)$. В силу произвольности выбора точек $a_0, a_1 \in I$ это означает, что дуга $f(I)$ имеет ограниченное искривление (2.3.1). Лемма доказана.

2.4. Лемма. *Пусть* Γ *— связное подмножество обобщенной окружности в пространстве* $\overline{\mathbb{R}^1}$ *и топологическое вложение* $f : \Gamma \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *удовлетворяет условию мёбиусовых середин* $\text{УМС}(f) \le H < 1$*. Тогда для жордановой дуги (или жордановой кривой)* $f(\Gamma)$ *выполняется соотношение*

$$\text{RT}(f(\Gamma)) \le 1 + 2\frac{\sqrt{H^2 - (1/2)^2}}{1 - H}. \tag{2.4.1}$$

Доказательство. Возьмем произвольную четверку попарно различных точек b_1, b_2, b_3, b_4, последовательно расположенных на дуге (или кривой) $f(\Gamma)$.

Тогда точки $a_j = f^{-1}(b_j)$ $(j = 1,2,3,4)$ попарно различны и последовательно расположены на Γ. Построим мёбиусово преобразование $\mu : \overline{\mathbb{R}^1} \to \overline{\mathbb{R}^1}$, переводящее точку a_4 в ∞, и мёбиусово преобразование $\nu : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, переводящее точку b_4 в ∞. Дуга $\gamma \subset \Gamma$ обобщенной окружности $\overline{\mathbb{R}^1}$ с концами в точках a_1 и a_4, содержащая точки a_2 и a_3, переводится преобразованием μ в луч, исходящий из точки $\mu(a_1)$ и пополненный точкой ∞. Положив $I = \mu(\gamma)\setminus\{\infty\}$, получим связное подмножество на вещественной прямой, содержащее точки $\mu(a_1), \mu(a_2), \mu(a_3)$; при этом точка $\mu(a_2)$ лежит между точками $\mu(a_1)$ и $\mu(a_3)$.

Рассмотрим отображение $g = \nu \circ f \circ \mu^{-1} : \mu(\gamma) \to \overline{\mathbb{R}^n}$. Ввиду того, что условие мёбиусовых середин инвариантно при мёбиусовых преобразованиях, для топологического вложения $g : \mu(\gamma) \to \overline{\mathbb{R}^n}$ также выполняется условие УМС$(g) \le H < 1$. Для произвольной пары точек t_0, t_1 на луче I точка $t = (t_0 + t_1)/2 \in I$ является мёбиусовой серединой тройки точек $\{t_0, t_1, \infty\}$ на $\mu(\gamma) = I \cup \{\infty\}$. Поэтому должна выполняться оценка

$$\frac{|g(t) - g(t_0)|}{|g(t_1) - g(t_0)|} = \frac{q(g(t), g(t_0)) \cdot q(g(t_1), g(\infty))}{q(g(t_0, t_1) \cdot q(g(t), g(\infty)))} \le H.$$

Из-за произвольности выбора точек $t_0, t_1 \in I$ это означает, что отображение g удовлетворяет условию середин УС$(g) \le H < 1$. Тогда по лемме 2.3 жорданова дуга $g(I)$ имеет ограниченное искривление $\mathrm{TT}(g(I)) \le \sqrt{H^2 - (1/2)^2}(1 - H)^{-1}$. В силу утверждения 2.2.4 верно соотношение

$$\mathrm{AB}(g(I)) \le 1 + 2\sqrt{H^2 - (1/2)^2}(1 - H)^{-1}.$$

Следовательно, для точек $\mu(a_1), \mu(a_2), \mu(a_3) \in I$ справедливо неравенство

$$\frac{|g(\mu(a_1)) - g(\mu(a_2))| + |g(\mu(a_2)) - g(\mu(a_3))|}{|g(\mu(a_1)) - g(\mu(a_3))|} \le 1 + 2\frac{\sqrt{H^2 - (1/2)^2}}{1 - H}. \tag{2.4.2}$$

С учетом того, что $g(\mu(a_4)) = \infty$, левая часть этого неравенства выражается через хордову метрику в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и равна величине

$$\begin{aligned} &\frac{q(g(\mu(a_1)), g(\mu(a_2)))q(g(\mu(a_3)), g(\mu(a_4)))}{q(g(\mu(a_1)), g(\mu(a_3)))q(g(\mu(a_2)), g(\mu(a_4)))} \\ &\qquad\qquad + \frac{q(g(\mu(a_1)), g(\mu(a_4)))q(g(\mu(a_2)), g(\mu(a_3)))}{q(g(\mu(a_1)), g(\mu(a_3)))q(g(\mu(a_2)), g(\mu(a_4)))} \\ &\qquad = \frac{q(\nu(b_1), \nu(b_2))q(\nu(b_3), \nu(b_4)) + q(\nu(b_1), \nu(b_4)q(\nu(b_2), \nu(b_3)))}{q(\nu(b_1), \nu(b_3))q(\nu(b_2)\nu(b_4))} = \dots \end{aligned}$$

(с учетом мёбиусовой инвариантности абсолютного двойного отношения)

$$\dots = \frac{q(b_1, b_2)q(b_3, b_4) + q(b_1, b_4)q(b_2, b_3)}{q(b_1, b_3)q(b_2, b_4)}.$$

Таким образом, неравенство (2.4.2) означает, что для произвольной четверки попарно различных точек b_1, b_2, b_3, b_4, последовательно расположенных на $f(\Gamma)$, выполняется оценка

$$\frac{q(b_1, b_2)q(b_3, b_4) + q(b_1, b_4)q(b_2, b_3)}{q(b_1, b_3)q(b_2, b_4)} \le 1 + 2\frac{\sqrt{H^2 - (1/2)^2}}{1 - H}.$$

Это и означает выполнение требуемого соотношения (2.4.1). Лемма доказана.

2.5. Лемма (случай $X = \mathbb{R}^1$ см. в [8, лемма 2.1(i)]). *Пусть I — связное подмножество в $\mathbb{R}^1$ и топологическое вложение $f : I \to X$ в метрическое пространство X удовлетворяет условию середин* $\text{УС}(f) \le H < 1$. *Тогда f удовлетворяет условию Келингоса с константой $H/(1-H)$, т. е.* $\text{УК}(f) \le H/(1-H)$.

Доказательство. Возьмем произвольную тройку точек $t_0-h, t_0, t_0+h \in I$ и положим $t = |f(t_0+h) - f(t_0-h)|_X$. Из условия середин $\text{УС}(f) \le H < 1$ вытекают неравенства $|f(t_0+h) - f(t_0)|_X \le Ht$ и $|f(t_0) - f(t_0-h)|_X \le Ht$. Следовательно, $|f(t_0+h) - f(t_0)|_X \ge t - |f(t_0) - f(t_0-h)|_X \ge (1-H)t$; $|f(t_0) - f(t_0-h)|_X \ge t - |f(t_0+h) - f(t_0)|_X \ge (1-H)t$, поэтому

$$\frac{1-H}{H} \le \frac{|f(t_0+h) - f(t_0)|_X}{|f(t_0) - f(t_0-h)|_X} \le \frac{H}{1-H}.$$

Лемма доказана.

2.6. Лемма. *Если невырожденное аффинное преобразование $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию мёбиусовых середин* $\text{УМС}(L) \le H < 1$, *то оно является K-квазиконформным с оценкой*

$$K \le 2H + \sqrt{4H^2 - 1}. \tag{2.6.1}$$

Доказательство. Применив вспомогательные изометрии и растяжения, можно считать без нарушения общности, что преобразование L имеет вид

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, k_2 x_2, \dots, k_n x_n),$$

где $1 \le k_2 \le \dots \le k_n = K$. Точка $x = (0, \dots, 0, 1)$ является мёбиусовой серединой тройки точек $a_1 = (-1, 0, \dots, 0)$, $a_2 = (1, 0, \dots, 0)$, $a_3 = (0, \dots, 0, -1)$. Поэтому для образов этих точек имеем неравенство

$$\frac{|L(x) - L(a_1)||L(a_2) - L(a_3)|}{|L(a_1) - L(a_2)||L(x) - L(z_3)|} \le H,$$

т. е. $(1+K^2)/(4K) \le H$. Следовательно, $K \le 2H + \sqrt{4H^2-1}$. Лемма доказана.

2.7. Лемма. *Пусть топологическое вложение $f : B \to \mathbb{R}^n$ замкнутого шара $B = \overline{B}(x_0, r) \subset \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию середин* $\text{УС}(f|L) \le H < 1$ *на любом диаметральном отрезке $x_0 \in L \subset B$ и условию мёбиусовых середин* $\text{УМС}(f|S) \le H < 1$ *на сфере $S = \partial B$. Тогда*

$$M := \frac{\max\limits_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|}{\min\limits_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|} \le 1 + \sqrt[4]{H^2 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{48}{(1-H)^5}. \tag{2.7.1}$$

Доказательство. Отметим на сфере S точки z_1 и z_2, для которых

$$|f(z_1) - f(x_0)| = \max_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)| \quad \text{и} \quad |f(z_2) - f(x_0)| = \min_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|.$$

По лемме 2.5 на любом диаметральном отрезке $L \subset B$ выполняется условие Келингоса $\text{УК}(f|L) \le H/(1-H)$, поэтому для любой точки $x \in S$ и диаметрально противоположной точки $x^* = x_0 - (x - x_0) \in S$ справедливо неравенство

$$\frac{1-H}{H} \le \frac{|f(x^*) - f(x_0)|}{|f(x) - f(x_0)|} \le \frac{H}{1-H}. \tag{2.7.2}$$

Если $z_1 = z_2$, то $|f(x) - f(x_0)| = \mathrm{const}$ на S, и (2.7.1) тривиально верно. Если $z_2 = z_1^*$, то в силу (2.7.2) $M = |f(z_1) - f(x_0)|/|f(z_2) - f(z_0)| \le H/(1-H)$, и оценка (2.7.1) верна и в этом случае.

Итак, рассматриваем случай, когда $z_2 \ne z_1$ и $z_2 \ne z_1^*$. Тогда точки z_1, z_2, z_1^*, z_2^* лежат в двумерной плоскости P, проходящей через x_0, и расположены последовательно на окружности $\Sigma = P \cap S$. Из УМС$(f|S) \le H < 1$ и леммы 2.4 следует, что $\mathrm{RT}(f(\Sigma)) \le 1 + 2\sqrt{H^2 - 2^{-2}}/(1-H)$, поэтому

$$\frac{|f(z_1) - f(z_2)| \cdot |f(z_1^*) - f(z_2^*)| + |f(z_1) - f(z_2^*)| \cdot |f(z_2) - f(z_1^*)|}{|f(z_1) - f(z_1^*)| \cdot |f(z_2) - f(z_2^*)|} \le 1 + 2\frac{\sqrt{H^2 - 2^{-2}}}{1-H}. \tag{2.7.3}$$

Вначале получим грубую верхнюю оценку для величины M, а затем выполним ее уточнение для H, близких к $1/2$.

Пусть $M > 2H/(1-H)$. Положим $a := |f(z_2) - f(x_0)|$. Используя (2.7.2), получаем следующие нижние оценки для множителей во втором слагаемом числителя дроби в (2.7.3):

$$|f(z_1) - f(z_2^*)| \ge |f(z_1) - f(x_0)| - |f(z_2^*) - f(x_0)| \ge Ma - \frac{H}{1-H}a \ge \frac{M}{2}a,$$

$$|f(z_2) - f(z_1^*)| \ge |f(z_1^*) - f(x_0)| - |f(z_2) - f(x_0)| \ge \frac{1-H}{H}Ma - a \ge \frac{M}{2} \cdot \frac{1-H}{H}a.$$

Для множителей знаменателя дроби в (2.7.3) получаем верхние оценки (с использованием неравенства (2.7.2))

$$|f(z_1) - f(z_1^*)| \le |f(z_1) - f(x_0)| + |f(z_1^*) - f(x_0)| \le \left(1 + \frac{H}{1-H}\right)|f(z_1) - f(x_0)| = \frac{Ma}{1-H}, \tag{2.7.4}$$

$$|f(z_2) - f(z_2^*)| \le |f(z_2) - f(x_0)| + |f(z_2^*) - f(x_0)| \le \left(1 + \frac{H}{1-H}\right)a = \frac{a}{1-H}. \tag{2.7.5}$$

Отбросив первое слагаемое в числителе дроби в (2.7.3) и применяя полученные оценки для множителей, приходим к неравенству

$$\frac{a^2M^2(1-H)/(4H)}{a^2M/(1-H)^2} \le 1 + 2\frac{\sqrt{H^2 - 2^{-2}}}{1-H},$$

из которого следует, что

$$M \le K(H) := \frac{4H}{(1-H)^3}\left[1 + 2\frac{\sqrt{H^2 - 2^{-2}}}{1-H}\right] < \frac{8}{(1-H)^4}. \tag{2.7.6}$$

Так как $2H/(1-H) < K(H)$, оценка (2.7.6) выполняется и в том случае, когда $M \le 2H/(1-H)$.

Теперь рассмотрим неравенство (2.7.3) более подробно.

Пусть $H = (1/2) + \delta$, $\delta \in [0, 1/2)$. Для любой точки $x \in S$ и диаметрально противоположной к ней точки $x^* \in S$ в силу условия середин УС$(f|L) \le H < 1$ на прямолинейном отрезке $L = [x, x^*]$ и вытекающего из него неравенства (1.6.1) выполняется оценка

$$\left|\frac{f(x) + f(x^*)}{2} - f(x_0)\right| \le \sqrt{\delta + \delta^2} \cdot |f(x) - f(x^*)|.$$

Из этой оценки для точек $w_1 := (f(z_1) + f(z_1^*))/2$ и $w_2 := (f(z_2) + f(z_2^*))/2$ получаем с учетом (2.7.4) и (2.7.5) неравенства

$$|w_1 - f(x_0)| \le \sqrt{\delta+\delta^2} \cdot |f(z_1) - f(z_1^*)| \le \frac{Ma}{1-H}\sqrt{\delta+\delta^2},$$

$$|w_2 - f(x_0)| \le \sqrt{\delta+\delta^2} \cdot |f(z_2) - f(z_2^*)| \le \frac{a}{1-H}\sqrt{\delta+\delta^2}$$

и

$$|w_1 - w_2| \le \frac{(M+1)a}{1-H}\sqrt{\delta+\delta^2} \le \frac{2Ma}{1-H}\sqrt{\delta+\delta^2}. \tag{2.7.7}$$

Для множителей числителя дроби в (2.7.3) выводим следующие оценки:

$$\begin{aligned}&|f(z_1^*) - f(z_2^*)| = |(f(z_1^*) - w_1) - (f(z_2^*) - w_2) + (w_1 - w_2)|\\ &= |-(f(z_1) - w_1) + (f(z_2) - w_2) + (w_1 - w_2)| = |(f(z_2) - f(z_1)) + 2(w_1 - w_2)|\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ge |f(z_1) - f(z_2)| - 2|w_1 - w_2|\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&|f(z_2) - f(z_1^*)| = |(f(z_2) - w_2) - (f(z_1^*) - w_1) + (w_2 - w_1)|\\ &= |-(f(z_2^*) - w_2) + (f(z_1) - w_1) + (w_2 - w_1)| = |(f(z_1) - f(z_2^*)) + 2(w_2 - w_1)|\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ge |f(z_1) - f(z_2^*)| - 2|w_1 - w_2|.\end{aligned}$$

Используя эти оценки и неравенство (2.7.7), получаем из (2.7.3) соотношение

$$\begin{aligned}&|f(z_1) - f(z_2)|^2 + |f(z_1) - f(z_2^*)|^2\\ &\qquad \le 2\frac{2Ma}{1-H}\sqrt{\delta+\delta^2}(|f(z_1) - f(z_2)| + |f(z_1) - f(z_2^*)|)\\ &\qquad\qquad + \left(1 + 2\frac{\sqrt{\delta+\delta^2}}{1-H}\right) \cdot |f(z_2) - f(z_2^*)| \cdot |f(z_1) - f(z_1^*)|.\end{aligned} \tag{2.7.8}$$

Так как $|f(z_1) - f(z_2)| + |f(z_1) - f(z_2^*)| \le 4Ma$, $|f(z_2) - f(z_2^*)| \cdot |f(z_1) - f(z_1^*)| \le 4M^2a^2$ и $|f(z_1) - w_1| \le |f(z_1) - w_2| + |w_1 - w_2|$, правую часть этого неравенства можно записать в виде

$$\begin{aligned}&2|f(z_2) - f(z_2^*)| \cdot |f(z_1) - w_1| + \frac{16M^2a^2}{1-H}\sqrt{\delta+\delta^2} + \frac{8M^2a^2}{1-H}\sqrt{\delta+\delta^2}\\ &\le 2|f(z_2) - f(z_2^*)| \cdot |f(z_1) - w_2| + 2 \cdot 2Ma \cdot \frac{2Ma}{1-H}\sqrt{\delta+\delta^2} + \frac{24M^2a^2}{1-H}\sqrt{\delta+\delta^2}\\ &\qquad\qquad = 2|f(z_2) - f(z_2^*)| \cdot |f(z_1) - w_2| + a^2\sqrt{\delta+\delta^2}\frac{32M^2}{1-H}.\end{aligned} \tag{2.7.9}$$

Треугольник с вершинами $f(z_2^*)$, $f(z_1)$, $f(z_2)$ изометрически переносим на комплексную плоскость переменной $\zeta = u + iv$, полагая $\zeta(w_2) = 0$, $\zeta(f(z_2)) = |f(z_2) - w_2| = \tilde{a}$, $\zeta(f(z_2^*)) = -\tilde{a}$ и $\zeta(f(z_1)) = \zeta_1$. Тогда неравенство (2.7.8) с учетом (2.7.9) дает соотношение

$$|\zeta_1 - \tilde{a}|^2 + |\zeta_1 + \tilde{a}|^2 \le 4\tilde{a} \cdot |\zeta_1| + a^2\sqrt{\delta+\delta^2} \cdot \frac{32M^2}{1-H}.$$

Так как левая часть этого неравенства равна $2|\zeta_1|^2 + 2\tilde{a}^2$, то

$$(|\zeta_1| - \tilde{a})^2 \le a^2\sqrt{\delta+\delta^2} \cdot \frac{16M^2}{1-H} \quad \text{и} \quad |\zeta_1| \le \tilde{a} + a\sqrt[4]{\delta+\delta^2} \cdot \frac{4M}{\sqrt{1-H}}.$$

Возвращаясь в пространство $\mathbb{R}^n$, получаем оценку

$$|f(z_1)-w_2| \le |f(z_2)-w_2| + a\sqrt[4]{\delta+\delta^2}\cdot\frac{4M}{\sqrt{1-H}} \le |f(z_2)-w_2| + a\sqrt[4]{\delta+\delta^2}\cdot\frac{4M}{1-H}.$$

Отсюда с учетом оценки (2.7.7) для $|w_2 - f(x_0)|$ выводим неравенство

$$\begin{aligned} Ma = |f(z_1)-f(x_0)| &\le |f(z_1)-w_2| + |w_2 - f(x_0)| \\ &\le |f(z_2)-f(x_0)| + 2|w_2 - f(x_0)| + a\sqrt[4]{\delta+\delta^2}\cdot\frac{4M}{1-H} \\ &\le a + 2\frac{a}{1-H}\sqrt{\delta+\delta^2} + a\sqrt[4]{\delta+\delta^2}\cdot\frac{4M}{1-H}, \end{aligned}$$

т. е. ввиду оценки (2.7.6) для M

$$M \le 1 + \sqrt[4]{\delta+\delta^2}\left[\frac{2\sqrt[4]{\delta+\delta^2}}{1-H} + \frac{4M}{1-H}\right] \le 1 + \sqrt[4]{H^2 - \frac{1}{4}}\cdot\frac{48}{(1-H)^5}.$$

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1.10. В силу мёбиусовой инвариантности условия УМС можно считать без ограничения общности, что область D содержит точку ∞ и $f(\infty)=\infty$.

Для произвольной точки $z_0 \in D \setminus \{\infty\}$ и любого $r > 0$ такого, что $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ (в евклидовой метрике), рассмотрим евклидову сферу $S = S(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}$. Из УМС$(f) \le H < 1$ следует, что отображение f на замкнутом шаре $\overline{B}(z_0, r)$ удовлетворяет условиям леммы 2.7, поэтому

$$\limsup_{r\to 0}\frac{\max\limits_{|x-z_0|=r}|f(x)-f(z_0)|}{\min\limits_{|x-z_0|=r}|f(x)-f(z_0)|} \le 1 + \sqrt[4]{H^2 - 2^{-2}}\cdot\frac{48}{(1-H)^5}.$$

В силу произвольности точки $z_0 \in D \setminus \{\infty\}$ это означает квазиконформность отображения f и, следовательно, дифференцируемость f почти всюду в D.

Теперь уточним оценку квазиконформности отображения f, оценив дилатацию касательного отображения Tf_{z_0} в точке дифференцируемости z_0 отображения f. Не ограничивая общности, можно считать, что $z_0 = 0$ и $f(z_0) = 0$. Тогда касательное отображение Tf_0 является пределом последовательности отображений $T_N(z) = Nf(z/N)$ при $N \to +\infty$ (для любой точки $z \in \mathbb{R}^n$ имеется номер $N(z)$ такой, что все отображения T_N при $N \ge N(z)$ определены в точке z и $Tf_0(z) = \lim T_N(z)$ при $n \to +\infty$). В силу инвариантности условия УМС относительно мёбиусовых преобразований для каждого из отображений T_N верно соотношение УМС$(T_N) \le H$. Благодаря непрерывности абсолютного двойного отношения это же соотношение остается верным и для предельного отображения, т. е. УМС$(Tf_0) \le H$. Применение леммы 2.6 дает K-квазиконформность касательного отображения Tf_0 с $K \le 2H + \sqrt{4H^2 - 1}$. Таким образом, в соответствии с метрическим определением квазиконформности f является K-квазиконформным отображением в D с требуемой оценкой для K. Теорема доказана.

4. В следующей теореме существенно уточняется вид функции искажения из [8, теорема 2.3] в случае $X = \mathbb{R}^n$.

4.1. Теорема. *Пусть I — связное подмножество в $\mathbb{R}^1$ и топологическое вложение $f : I \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию середин* УС$(f) \le H < 1$. *Тогда отображение f является η-квазисимметрическим с функцией искажения*

$$\eta(t) = \frac{H}{1-H} A_0(H) A_1(H) \cdot \begin{cases} t^{1-\beta(H)} & \text{при } 0 \le t \le 1, \\ t^{1+\gamma(H)} & \text{при } t \ge 1 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

с константами

$$A_0(H) = 1 + \sqrt[4]{H - 2^{-1}} \cdot \sqrt{H + 2^{-1}} \left[\frac{1}{eH^2 \operatorname{Ln}(1/H)} + \frac{\sqrt[4]{H - 2^{-1}}}{H(1-H)} \right] \ge 1, \tag{4.1.2}$$

$$A_1(H) = \exp\left[2 \left(\operatorname{Ln} \frac{H}{1-H} - \sqrt[4]{H - \frac{1}{2}} \cdot \operatorname{Ln} H \right) \right] \ge 1, \tag{4.1.3}$$

$$\beta(H) = 1 + \frac{\operatorname{Ln} H}{\operatorname{Ln} 2} (1 - \sqrt[4]{H - 2^{-1}}) \ge 0, \tag{4.1.4}$$

$$\gamma(H) = -\frac{\operatorname{Ln}(1-H)}{\operatorname{Ln} 2} - 1 \ge 0. \tag{4.1.5}$$

При этом $A_0(H) \to 1$, $A_1(H) \to 1$, $\beta(H) \to 0$ и $\gamma(H) \to 0$, когда $H \searrow 1/2$.

Доказательство этой теоремы опирается на две вспомогательные леммы.

4.2. Лемма. *Пусть $I = [0,1] \subset \mathbb{R}^1$, точка $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ такова, что $|\vec{e}| = 1$, и пусть топологическое вложение $f : I \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию середин* УС$(f) \le H < 1$, *таково, что $f(0) = 0$ и $f(1) = \vec{e}$. Тогда для любого $t \in [0, 1/2]$ справедлива оценка*

$$|f(t)| \le A_0(H) t^{1-\beta(H)} \tag{4.2.1}$$

с константами $A_0(H)$ и $\beta(H)$, заданными формулами (4.1.2), (4.1.4).

Доказательство. Положим $P_0 = \{0, 1\}$, $P_1 = \{0, 2^{-1}, 1\}, \ldots, P_N = \{j2^{-N} : j = 0, 1, \ldots, 2^N\}$ и введем обозначения $a_N^{(j)} := j2^{-N}$. Для $0 \le t \le 1$ символом $r_N(t)$ обозначим расстояние от точки t до множества P_N. Очевидно, что

$$0 \le r_N(t) \le 2^{-(N+1)}. \tag{4.2.2}$$

Построим последовательность кусочно линейных отображений $g_N : I \to \mathbb{R}^n$ $(N = 0, 1, \ldots)$, задав их следующим образом: отображение g_N совпадает с f на множестве P_N и линейно на каждом отрезке $I_N^{(j)} := \bigl[a_N^{(j)}, a_N^{(j+1)}\bigr]$, где $j = 0, 1, \ldots, 2^N - 1$. Докажем, что при всех $N = 0, 1, \ldots$ выполняется оценка

$$|g_{N+1}(t) - g_N(t)| \le 2(2H)^N \sqrt{H^2 - 2^{-2}} \cdot r_N(t). \tag{4.2.3}$$

Для заданного $t \in [0, 1]$ найдем $i \in \{0, 1, \ldots, 2^N - 1\}$ такое, что $t \in I_N^{(i)}$. Поскольку g_N линейно на $I_N^{(i)}$, то

$$g_N((i + 2^{-1})2^{-N}) = \frac{g_N\bigl(a_N^{(i)}\bigr) + g_N\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)}{2} = \frac{f\bigl(a_N^{(i)}\bigr) + f\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)}{2} \tag{4.2.4}$$

и

$$\begin{aligned} g_N(t) &= g_N\bigl(a_N^{(i)}\bigr) + \bigl[g_N\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr) - g_N\bigl(a_N^{(i)}\bigr)\bigr] \cdot \frac{t - a_N^{(i)}}{2^{-N}} \\ &= f\bigl(a_N^{(i)}\bigr) + \bigl(t - a_N^{(i)}\bigr) 2^N \bigl[f\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr) - f\bigl(a_N^{(i)}\bigr)\bigr]. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Неравенства

$$\bigl|f((i+2^{-1})2^{-N})-f\bigl(a_n^{(i)}\bigr)\bigr|\le H\bigl|f\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)-f\bigl(a_N^{(i)}\bigr)\bigr|$$

и

$$\bigl|f((i+2^{-1})2^{-N})-f\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)\bigr|\le H\bigl|f\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)-f\bigl(a_N^{(i)}\bigr)\bigr|,$$

вытекающие из условия середин УС$(f)\le H$, дают (с учетом равенства (4.2.4)) оценку

$$|g_{N+1}((i+2^{-1})2^{-N})-g_N((i+2^{-1})2^{-N})| \\ \le\sqrt{H^2-2^{-2}}\cdot\bigl|g_N\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)-g_N\bigl(a_N^{(i)}\bigr)\bigr|. \quad (4.2.6)$$

(Пояснение: из двух треугольников $\Delta f\bigl(a_N^{(i)}\bigr)g_N((i+2^{-1})2^{-N})f((i+2^{-1})2^{-N})$ и $\Delta f\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)g_N((i+2^{-1})2^{-N})f((i+2^{-1})2^{-N})$ следует выбрать тот, у которого угол при вершине $g_N((i+2^{-1})2^{-N})$ не меньше, чем $\pi/2$, и применить к нему одно из двух предыдущих неравенств.)

Случай 1. Пусть $t\in\bigl[a_N^{(i)},(i+2^{-1})2^{-N}\bigr]$. Тогда $r_N(t)=t-a_N^{(i)}$. Треугольник с вершинами $g_N\bigl(a_N^{(i)}\bigr)$, $g_N((i+2^{-1})2^{-N})$ и $g_{N+1}((i+2^{-1})2^{-N})$ подобен треугольнику с вершинами $g_N\bigl(a_N^{(i)}\bigr)$, $g_N(t)$ и $g_{N+1}(t)$. Поэтому

$$\frac{|g_{N+1}(t)-g_N(t)|}{|g_{N+1}((i+2^{-1})2^{-N})-g_N((i+2^{-1})2^{-N})|}=\frac{\bigl|g_N(t)-g_N\bigl(a_N^{(i)}\bigr)\bigr|}{\bigl|g_N((i+2^{-1})2^{-N})-g_N\bigl(a_N^{(i)}\bigr)\bigr|}.$$

Отсюда с учетом (4.2.6) и (4.2.5) получаем неравенство

$$\begin{aligned}|g_{N+1}(t)-g_N(t)|&\le\sqrt{H^2-2^{-2}}\cdot 2\bigl|g_N(t)-g_N\bigl(a_N^{(i)}\bigr)\bigr|\\ &=2\sqrt{H^2-2^{-2}}\cdot\bigl(t-a_N^{(i)}\bigr)2^N\bigl|g_N\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)-g_N\bigl(a_N^{(i)}\bigr)\bigr|\\ &=2^{N+1}\sqrt{H^2-2^{-2}}\cdot r_N(t)\bigl|f\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)-f\bigl(a_N^{(i)}\bigr)\bigr|\le\dots\end{aligned}$$

(теперь используем оценку (2.3.2), полученную в ходе доказательства леммы 2.3, положив в ней $a_0=0$, $a_1=1$)

$$\dots\le 2^{N+1}\sqrt{H^2-2^{-2}}\cdot r_N(t)H^N|f(1)-f(0)|=2\sqrt{H^2-2^{-2}}\ \cdot r_N(t)(2H)^N.$$

Таким образом, в этом случае оценка (4.2.3) доказана.

Случай 2. Пусть $(i+2^{-1})2^N<t\le a_N^{(i+1)}$. В этом случае $r_N(t)=(i+1)2^{-N}-t=a_N^{(i+1)}-t$. В силу линейности отображений g_N и g_{N+1} на отрезке $\bigl[(i+2^{-1})2^{-N},a_N^{(i+1)}\bigr]$ треугольник с вершинами $g_N\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)$, $g_N((i+2^{-1})2^{-N})$ и $g_{N+1}((i+2^{-1})2^{-N})$ подобен треугольнику с вершинами $g_N\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)$, $g_N(t)$, $g_{N+1}(t)$, поэтому

$$\frac{|g_{N+1}(t)-g_N(t)|}{|g_{N+1}((i+2^{-1})2^{-N})-g_N((i+2^{-1})2^{-N})|}=\frac{\bigl|g_N(t)-g_N\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)\bigr|}{\bigl|g_N((i+2^{-1})2^{-N})-g_N\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)\bigr|}.$$

Отсюда с учетом (4.2.6) и равенства (4.2.5) получаем оценку

$$\begin{aligned}|g_{N+1}(t)-g_N(t)|&\le2\sqrt{H^2-2^{-2}}\cdot\bigl|g_N(t)-g_N\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)\bigr|\\ &=2\sqrt{H^2-2^{-2}}\cdot\bigl(a_N^{(i+1)}-t\bigr)2^N\bigl|g_N\bigl(a_N^{(i+1)}\bigr)-g_N\bigl(a_N^{(i)}\bigr)\bigr|=\dots\end{aligned}$$

(используем оценку (2.3.2) из доказательства леммы 2.3)

$$\cdots = 2^{N+1}\sqrt{H^2-2^{-2}}\cdot r_N(t)\big|f\big(a_N^{(i+1)}\big)-f_N\big(a_N^{(i)}\big)\big| \le 2\sqrt{H^2-2^{-2}}\cdot r_N(t)(2H)^N.$$

Таким образом, и в этом случае оценка (4.2.3) верна.

Используя (4.2.3), получаем неравенство

$$\begin{aligned}|g_N(t)-t\vec{e}| &\le |g_N(t)-g_{N-1}(t)|+|g_{N-1}(t)-g_{N-2}(t)|+\cdots+|g_1(t)-g_0(t)|\\ &\le 2\sqrt{H^2-2^{-2}}\cdot[r_{N-1}(t)(2H)^{N-1}+\cdots+r_1(t)(2H)+r_0(t)].\end{aligned}$$

Из сходимости последовательности отображений g_N к f вытекает неравенство

$$|f(t)-t\vec{e}| \le 2\sqrt{H^2-2^{-2}}\cdot[r_0(t)+2r_1(t)H+\cdots+2^N r_N(t)H^N+\ldots]. \quad (4.2.7)$$

Заметим, что при $H=1/2$ отсюда следует, что $f(t)\equiv t\vec{e}$.

Пусть теперь $H>1/2$ и $t\in[0,1/2]$. Возьмем натуральное p, для которого $2^{-(p+1)}\le t\le 2^{-p}$. Тогда $r_0(t)=r_1(t)=\cdots=r_{p-1}(t)=t$ и для всех $N\ge p$ выполняется оценка $r_N(t)\le 2^{-(N+1)}$. Поэтому неравенство (4.2.7) в этой ситуации выглядит следующим образом:

$$|f(t)-t\vec{e}| \le \{t[1+(2H)+\cdots+(2H)^{p-1}]+(1/2)H^p[1+H+H^2+\ldots]\}\cdot 2\sqrt{H^2-2^{-2}},$$

т. е.

$$|f(t)-t\vec{e}| \le 2\sqrt{H^2-2^{-2}}\left\{pt(2H)^{p-1}+\frac{H^p}{2(1-H)}\right\}.$$

Так как $t\le 2^{-p}$, то

$$|f(t)-t\vec{e}| \le \sqrt{H^2-2^{-2}}\left\{pH^{p-1}+\frac{H^p}{1-H}\right\}. \quad (4.2.8)$$

Введя обозначение

$$\alpha(H) := 1-\frac{\operatorname{Ln} H}{\operatorname{Ln}(1/2)} \in (0,1)$$

и учитывая, что $2^{-(p+1)}\le t$, приходим к оценке

$$H^{p+1} = \exp((p+1)\operatorname{Ln} H) = \left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)^{1-\alpha(H)} \le t^{1-\alpha(H)}.$$

Таким образом, ввиду неравенства $t\le 2^{-p}$ из (4.2.8) вытекает

$$\begin{aligned}|f(t)-t\vec{e}| &\le \frac{\sqrt{H^2-2^{-2}}}{H^2}\cdot t^{1-\alpha(H)}\left[p+\frac{H}{1-H}\right]\\ &\le \frac{\sqrt{H^2-2^{-2}}}{H^2\operatorname{Ln}2}\cdot t^{1-\alpha(H)}\left[\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{H\operatorname{Ln}2}{1-H}\right]. \quad (4.2.9)\end{aligned}$$

Для получения верхней оценки слагаемого

$$\frac{\sqrt{H^2-2^{-2}}}{H^2\operatorname{Ln}2}\cdot t^{1-\alpha(H)}\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{t}\right)$$

положим

$$\delta(H) := \sqrt[4]{H-2^{-1}}\cdot\frac{\operatorname{Ln}(1/H)}{\operatorname{Ln}2} = \sqrt[4]{H-2^{-1}}\cdot(1-\alpha(H)) > 0$$

и рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^{-\delta(H)} \operatorname{Ln} x$ на интервале $1 \le x < +\infty$. Ее производная $\varphi'(x) = x^{-1-\delta(H)}(1 - \delta(H) \cdot \operatorname{Ln} x)$ обращается в нуль в точке $x_0 = \exp(1/\delta(H)) > 1$. Следовательно,

$$\max_{x \ge 1} \varphi(x) = \varphi(x_0) = \left[\delta(H) x_0^{\delta(H)}\right]^{-1} = [\delta(H) \cdot e]^{-1}.$$

Значит, для всех $x \ge 1$ имеем неравенство $\operatorname{Ln} x \le x^{\delta(H)}/(\delta(H)e)$. В частности, при $x = 1/t$, где $0 < t < 1$, верна оценка

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{t}\right) \le \frac{1}{\delta(H)e} \cdot t^{-\delta(H)},$$

благодаря которой получаем неравенство

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{H^2 - 2^{-2}}}{H^2 \operatorname{Ln} 2} \cdot t^{1-\alpha(H)} \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{t}\right) \\ &\qquad \le \sqrt[4]{H - 2^{-1}} \; \frac{\sqrt{H + 2^{-1}}}{(1 - \alpha(H)) e H^2 \operatorname{Ln} 2} \cdot t^{(1-\alpha(H))(1 - \sqrt[4]{H - 1/2})} \\ &\qquad\qquad = \sqrt[4]{H - 2^{-1}} \; \frac{\sqrt{H + 2^{-1}}}{H^2 e \operatorname{Ln}(1/H)} \cdot t^{(1-\alpha(H))(1 - \sqrt[4]{H - 1/2})}. \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Так как $0 < t < 1$ и $1 - \alpha(H) > (1 - \alpha(H))(1 - \sqrt[4]{H - 1/2})$, то

$$t^{1-\alpha(H)} < t^{(1-\alpha(H))(1 - \sqrt[4]{H - 1/2})}.$$

Поэтому из (4.2.9) с учетом (4.2.10)

$$|f(t) - t\vec{e}| \le \sqrt[4]{H - 2^{-1}} \cdot C(H) t^{1-\beta(H)} \tag{4.2.11}$$

с константами

$$C(H) = \sqrt{H + 2^{-1}} \left(\frac{1}{e H^2 \operatorname{Ln}(1/H)} + \frac{\sqrt[4]{H - 2^{-1}}}{H(1 - H)} \right) < +\infty$$

и

$$\beta(H) = 1 - (1 - \alpha(H))(1 - \sqrt[4]{H - 1/2}) = 1 + \frac{\operatorname{Ln} H}{\operatorname{Ln} 2}(1 - \sqrt[4]{H - 1/2}). \tag{4.2.12}$$

Заметим, что если $H \to 1/2$, то $\beta(H) \to 0$ и $C(H) \to 4/(e \operatorname{Ln} 2) < +\infty$.

Из (4.2.11) следует, что при всех $0 \le t \le 1/2$ выполняется

$$|f(t)| \le t + \sqrt[4]{H - 2^{-1}} \cdot C(H) t^{1-\beta(H)} \le A_0(H) \cdot t^{1-\beta(H)}$$

с константой $A_0(H) = 1 + \sqrt[4]{H - 1/2} \cdot C(H)$, стремящейся к 1 при $H \to 1/2$. Лемма доказана.

4.3. Лемма. *Пусть $t \in [1/2, +\infty) \subset \mathbb{R}^1$ и топологическое вложение $f : [0,1] \cup [0,t] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию середин* УС(f) $\le H < 1$ *и $f(0) = 0$, $f(1) = \vec{e}$, где $|\vec{e}| = 1$. Тогда*

$$|f(t)| \le A_0(H) \cdot A_1(H) \cdot t^{1+\gamma(H)} \tag{4.3.1}$$

с константами $A_0(H)$, $A_1(H)$ и $\gamma(H)$, заданными формулами (4.1.2), (4.1.3) *и* (4.1.5).

Доказательство. Так как $t \ge 1/2$, имеется целое неотрицательное p, при котором $2^{p-1} \le t \le 2^p$. Положим $h := t/2^{p+1}$. Тогда $h \in [1/4, 1/2]$ и $t = 2^{p+1}h$.

По лемме 2.5 отображение f удовлетворяет условию Келингоса УК$(f) \leq H/(1-H)$, поэтому при любом $j = 0, 1, \dots, p$ имеем оценку

$$|f(2^{j+1}h) - f(2^j h)| \leq \frac{H}{1-H}|f(2^j h) - f(0)|,$$

из которой следует, что

$$|f(2^{j+1}h)| \leq \frac{H}{1-H}|f(2^j h)| + |f(2^j h)| = \frac{1}{1-H}|f(2^j h)|.$$

Последовательное применение этой оценки приводит к неравенству

$$|f(t)| = |f(2^{p+1}h)| \leq \frac{|f(2^p h)|}{1-H} \leq \frac{|f(2^{p-1}h)|}{(1-H)^2} \leq \dots \leq \left(\frac{1}{1-H}\right)^{p+1}|f(h)|.$$

Так как

$$\left(\frac{1}{1-H}\right)^{p+1} = \left(2^{p+1}\right)^{-\operatorname{Ln}(1-H)/\operatorname{Ln}2} = t^{1+\gamma(H)} \cdot h^{-1-\gamma(H)},$$

приходим к неравенству $|f(t)| \leq t^{1+\gamma(H)} \cdot h^{-1-\gamma(H)} \cdot |f(h)|$. Использование оценки $|f(h)| \leq A_0(H)h^{1-\beta(H)}$, полученной в лемме 4.2, дает неравенство $|f(t)| \leq t^{1+\gamma(H)} \cdot A_0(H) \cdot h^{-\gamma(H)-\beta(H)}$. Поскольку

$$-\gamma(H) - \beta(H) = -\frac{1}{\operatorname{Ln}2}\left[\operatorname{Ln}\frac{H}{1-H} - \sqrt[4]{H-2^{-1}} \cdot \operatorname{Ln}H\right] \leq 0$$

и $h \in [1/4, 1/2]$, то

$$h^{-\gamma(H)-\beta(H)} \leq 4^{\gamma(H)+\beta(H)} = \exp\left[2\left(\operatorname{Ln}\frac{H}{1-H} - \sqrt[4]{H-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{Ln}H\right)\right] = A_1(H).$$

Таким образом, $|f(t)| \leq t^{1+\gamma(H)} \cdot A_0(H) \cdot A_1(H)$, что и требовалось доказать.

5. Доказательство теоремы 4.1. Для произвольной тройки попарно различных точек $x_0, x_1, x_2 \in I$ вводим обозначения $t := |x_2 - x_0|/|x_1 - x_0|$ и $s := |f(x_2) - f(x_0)|/|f(x_1) - f(x_0)|$. Построим преобразования подобия (композиции изометрий и растяжений) $\mu : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ и $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, у которых $\mu(x_0) = \nu(f(x_0)) = 0$ и $\mu(x_1) = \nu(f(x_1)) = \vec{e} \in \mathbb{R}^n$, где $|\vec{e}| = 1$. Тогда топологическое вложение $g = \nu \circ f \circ \mu^{-1} : \mu(I) \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет тому же условию середин УС$(g) \leq H < 1$ и оставляет неподвижными точки 0 и 1. При этом для точки $a = \mu(x_2)$

$$|a| = \frac{|\mu(x_2) - \mu(x_0)|}{|\mu(x_1) - \mu(x_0)|} = \frac{|x_2 - x_0|}{|x_1 - x_0|} = t \quad \text{и} \quad |g(a)| = \frac{|f(x_2) - f(x_0)|}{|f(x_1) - f(x_0)|} = s.$$

Случай 1. Если $a > 0$, то из лемм 4.2 и 4.3 с учетом неравенства $A_1(H) \geq 1$ получаем оценку

$$s = |g(a)| \leq A_0(H) \cdot A_1(H) \cdot \begin{cases} t^{1-\beta(H)} & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ t^{1+\gamma(H)} & \text{при } t \geq 1. \end{cases} \tag{5.1}$$

Случай 2. Если $a < 0$, то придется рассмотреть два варианта: $-1 \leq a < 0$ и $a < -1$. При $-1 \leq a < 0$ точка $(-a)$ попадает в интервал $[0, 1] \subset \mu(I)$, и мы можем применить к ней оценку (5.1). В силу выполнения условия Келингоса (лемма 2.5) УК$(g) \leq H/(1-H)$ получаем оценку

$$s = \frac{|g(a)|}{|g(-a)|} \cdot |g(-a)| \leq \frac{H}{1-H} \cdot A_0(H) \cdot t^{1-\beta(H)}. \tag{5.2}$$

Если $a < -1$, то $(-1) \in \mu(I)$. Используя отражение $\varphi : x \to -x$ в $\mathbb{R}^1$ и преобразование подобия $\psi(x) = x/|g(-1)|$ в $\mathbb{R}^n$, построим отображение $\tilde{g} = \psi \circ g \circ \varphi : \varphi(\mu(I)) \to \mathbb{R}^n$. Так как $|\tilde{g}(1)| = |\psi(g(-1))| = 1$, к нему применима лемма 4.3, в силу которой

$$\frac{|g(a)|}{|g(-1)|} = |\tilde{g}(-a)| \leq A_0(H) \cdot A_1(H) \cdot (-a)^{1+\gamma(H)}.$$

Из этого неравенства с учетом условия Келингоса УК$(g) \leq H/(1-H)$ получаем оценку

$$s = |g(a)| \leq \frac{H}{1-H} \cdot A_0(H) \cdot A_1(H) \cdot t^{1+\gamma(H)}. \tag{5.3}$$

Таким образом, во всех случаях (5.1)–(5.3) верна требуемая оценка

$$s \leq \frac{H}{1-H} A_0(H) A_1(H) \cdot \left\{ \begin{matrix} t^{1-\beta(H)} & \text{при } 0 \leq t \leq 1 \\ t^{1+\gamma(H)} & \text{при } t \geq 1 \end{matrix} \right\} = \eta(t).$$

Теорема доказана.

6. В качестве следствия из теоремы 4.1 получим аналогичную теорему о квазимёбиусовости.

6.1. Теорема. *Пусть Σ либо обобщенная окружность, либо дуга обобщенной окружности в $\overline{\mathbb{R}^m}$ и топологическое вложение $f : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}^n}$ удовлетворяет условию мёбиусовых середин* УМС$(f) \leq H < 1$. *Тогда f является η-квазимёбиусовым вложением с функцией искажения $\eta(t)$, заданной формулами* (4.1.1)–(4.1.5).

Доказательство. Для произвольно заданной четверки попарно различных точек $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \Sigma$ введем обозначения:

$$t = \frac{q(z_1, z_2) \cdot q(z_3, z_4)}{q(z_1, z_3) \cdot q(z_2, z_4)} \quad \text{и} \quad s = \frac{q(f(z_1), f(z_2)) \cdot q(f(z_3), f(z_4))}{q(f(z_1), f(z_3)) \cdot q(f(z_2), f(z_4))}.$$

Требуется установить оценку $s \leq \eta(t)$.

В наборе $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ имеется точка z_j такая, что три оставшиеся точки из этого набора лежат в одной связной компоненте Σ_0 множества $\Sigma \setminus \{z_j\}$. Перестановки индексов $\sigma_2 : (1,2,3,4) \mapsto (3,4,1,3)$, $\sigma_3 : (1,2,3,4) \mapsto (2,1,4,3)$, $\sigma_1 = \sigma_3 \circ \sigma_2 : (1,2,3,4) \mapsto (4,3,2,1)$ и тождественная перестановка $\sigma_4 : (1,2,3,4) \mapsto (1,2,3,4)$ не меняют абсолютного двойного отношения четверки точек. Поэтому для точек $w_i := z_{\sigma_j(i)}$ сохраняются равенства

$$t = \frac{q(w_1, w_2) \cdot q(w_3, w_4)}{q(w_1, w_3) \cdot q(w_2, w_4)} \quad \text{и} \quad s = \frac{q(f(w_1), f(w_2)) \cdot q(f(w_3), f(w_4))}{q(f(w_1), f(w_3)) \cdot q(f(w_2), f(w_4))}.$$

Так как $\sigma_j(j) = 4$, то $w_4 = z_j$ и $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma_0$.

Возьмем мёбиусовы преобразования $\mu : \overline{\mathbb{R}^m} \to \overline{\mathbb{R}^m}$ и $\nu : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ такие, что $\mu(w_4) = \infty$, $\nu(f(w_4)) = \infty$. Тогда $J = \mu(\Sigma_0)$ есть связное множество на некоторой прямой L. Топологическое вложение $g = \nu \circ f \circ \mu^{-1} : \mu(\Sigma) \to \overline{\mathbb{R}^n}$

также удовлетворяет условию мёбиусовых середин УМС$(g) \leq H < 1$, и так как $g(\infty) = \infty$, в силу утверждения 1.9 его ограничение на J удовлетворяет УС$(g) \leq H < 1$. Имеем равенства

$$t = \frac{q(w_1, w_2) \cdot q(w_3, \infty)}{q(w_1, w_3) \cdot q(w_2, \infty)} = \frac{|w_1 - w_2|}{|w_1 - w_3|},$$

и так как $g(w_4) = g(\infty) = \infty$, то

$$s = \frac{q(g(w_1), g(w_2)) \cdot q(g(w_3), \infty)}{q(g(w_1), g(w_3)) \cdot q(g(w_2), \infty)} = \frac{|g(w_1) - g(w_2)|}{|g(w_1) - g(w_3)|}.$$

По теореме 4.1 из условия середин УС$(g) \leq H < 1$ получаем η-квазисимметричность отображения g на J с функцией искажения η, заданной формулами (4.1.1)–(4.1.5). Следовательно,

$$s = \frac{|g(w_1) - g(w_2)|}{|g(w_1) - g(w_3)|} \leq \eta\left(\frac{|w_1 - w_2|}{|w_1 - w_3|}\right) = \eta(t),$$

и требуемая оценка искажения $s \leq \eta(t)$ получена. Теорема доказана.

7. Доказательство теоремы 1.11. Для произвольно заданной тетрады $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \overline{\mathbb{R}^k}$ положим

$$t := \frac{q(x_1, x_2) \cdot q(x_3, x_4)}{q(x_1, x_3) \cdot q(x_2, x_4)}, \quad s := \frac{q(f(x_1), f(x_2)) \cdot q(f(x_3), f(x_4))}{q(f(x_1), f(x_3)) \cdot q(f(x_2), q(x_4))}.$$

Считая $\mathbb{R}^k$ канонически вложенным в $\mathbb{R}^n$, фиксируем точку $\vec{e} \in \mathbb{R}^k$ с $|\vec{e}| = 1$ и построим мёбиусовы преобразования $\mu : \overline{\mathbb{R}^k} \to \overline{\mathbb{R}^k}$, $\nu : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ такие, что $\mu(x_4) = \infty = \nu(f(x_4))$, $\mu(x_1) = 0 = \nu(f(x_1))$ и $\mu(x_3) = \vec{e} = \nu(f(x_3))$. Топологическое вложение $g = \nu \circ f \circ \mu^{-1} : \overline{\mathbb{R}^k} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ с неподвижными точками $0, \vec{e}, \infty$ удовлетворяет условию мёбиусовых середин УМС$(g) \leq H < 1$, при этом $t = |\mu(x_2)|$, $s = |g(\mu(x_2))|$. На луче L, выходящем из точки 0 в направлении $\vec{e}$, отметим точку $z_2 = |\mu(x_2)|\vec{e} = t\vec{e}$. Отображение g удовлетворяет условиям леммы 2.7 в шаре $\{z \in \mathbb{R}^k : |z| \leq t\}$, поэтому

$$s = |g(\mu(x_2))| \leq \left(1 + \sqrt[4]{H^2 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{48}{(1-H)^5}\right) |g(z_2)|. \tag{7.1.1}$$

Ограничение отображения g на луче L удовлетворяет УС$(g|L) \leq H < 1$ (см. утверждение 1.9). Тогда по теореме 4.1 оно является η-квазисимметрическим с функцией искажения η, заданной формулами (4.1.1)–(4.1.5). Следовательно, $|g(z_2)| \leq \eta(|z_2|) = \eta(|\mu(x_2)|) = \eta(t)$, и тогда из (7.1.1) вытекает требуемое соотношение

$$s \leq \left(1 + \sqrt[4]{H^2 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{48}{(1-H)^5}\right) \cdot \eta(t) = \omega(t)$$

с функцией искажения ω, заданной формулами (1.10.1)–(1.10.4). В силу произвольного выбора тетрады $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \overline{\mathbb{R}^k}$ это означает ω-квазимёбиусовость отображения f. Теорема доказана.

Автор признателен рецензенту, сделавшему несколько ценных замечаний по содержанию статьи, которые были учтены в окончательной редакции текста.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1961. V. 47, N 1. P. 98–105.
2. *Beurling A., Ahlfors L.* The boundary correspondence under quasiconformal mappings // Acta Math. 1956. V. 96. P. 125–142.
3. *Kelingos J. A.* Boundary correspondence under quasiconformal mappings // Mich. Math. J. 1966. V. 13. P. 235–249.
4. *Goldberg K.* A new definition for quasisymmetric function // Mich. Math. J. 1974. V. 21. P. 49–62.
5. *Tukia P., Väisälä J.* Quasisymmetric embeddings of metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A I. Math. 1980. P. 97–114.
6. *Väisälä J.* Quasimöbius maps // J. Anal. Math. 1984/85. V. 44. P. 218–234.
7. *Асеев В. В.* Квазисимметрические вложения и ОИМ-гомеоморфизмы жордановых дуг и кривых / Ред. «Сиб. мат. журн.». Новосибирск, 1984. 33 с. Деп. в ВИНИТИ 18.03.84, № 3209-84.
8. *Асеев В. В., Кузин Д. Г.* Достаточные условия квазисимметричности отображений прямой и плоскости // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1225–1235.
9. *Асеев В. В.* Условие мёбиусовых середин, квазиконформность и квазимёбиусовость // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы конф. Воронежской зимн. мат. школы. Воронеж: Изд.-полиграф. центр Воронежск. гос. ун-та, 2009. С. 13–14.
10. *Троценко Д. А.* Фрактальные прямые и квазисимметрии // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 6. С. 1399–1425.
11. *Троценко Д. А.* Фрактальные прямые и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 6. С. 1387–1396.
12. *Lehto O., Virtanen K.* Quasikonforme Abbildungen. Berlin: Springer-Verl., 1965.
13. *Rickman S.* Characterization of quasiconformal arcs // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1966. V. 395. P. 1–30.

Статья поступила 24 декабря 2010 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
btp@math.nsc.ru