Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 531.911.5

О ПРИТЯЖЕНИИ И СЛАБОМ ПРИТЯЖЕНИИ ДЛЯ АВТОНОМНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕСКОЛЬКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА

И. А. Финогенко

Аннотация. Рассматриваются вопросы притяжения для автономных функционально-дифференциальных включений с использованием знакопостоянных инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова и набора вспомогательных функционалов, позволяющих более точно определять притягивающее множество в фазовом пространстве непрерывных функций.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение, функционал Ляпунова — Красовского, ω-предельное множество, полуинвариантное множество, притяжение, слабое притяжение.

Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $f : D \to \mathbb{R}^n$ — локально липшицева функция, $D \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область, $0 \in D$ и $f(0) = 0$. Вывод прямого метода Ляпунова об асимптотической устойчивости в целом точки $x = 0$, который можно сделать из условия знакопостоянства $\dot{V}(x) \leq 0$ производной функции Ляпунова $V(x)$ в силу уравнения (1), содержится в теореме Барбашина — Красовского (см. [1, с. 21]). В ней существенным является предположение о том, что множество $E(\dot{V} = 0) \overset{\Delta}{=} \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ не содержит целых траекторий, кроме точки $x = 0$. Если это предположение отбросить, то можно утверждать, что решение $x(t)$ с ростом времени стремится к наибольшему инвариантному подмножеству $G \subset E(\dot{V} = 0)$ (более точно, $\Lambda^+(x) \cap D \subset G$), где $\Lambda^+(x)$ — ω-предельное множество решения $x(t)$). Этот результат известен как принцип инвариантности Ла-Салля (см. [2, с. 190]). Для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа соответствующий результат установлен в [3, с. 147] (см. также [4, с. 110]).

Для эффективного использования принципа инвариантности важно знать наибольшее инвариантное множество или, что может оказаться проще, уметь

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00132–а), интеграционного проекта СО РАН № 85, а также междисциплинарного проекта СО РАН № 107.

определять те точки в множестве $E(\dot{V}=0)$, которые ему заведомо не принадлежат. Для этого могут использоваться вспомогательные функции Ляпунова (см. [2, с. 191]). Условие $\ddot{V}\neq 0$ как метод проверки отсутствия в множестве $E(\dot{V}=0)$ целых траекторий упомянуто в [1, с. 20] и, по сути дела, сводится к рассмотрению вспомогательной функции Ляпунова $W(x)=\dot{V}(x)$.

В целом идея использования в теории устойчивости нескольких функций Ляпунова является весьма содержательной и рассматривалась в работах многих авторов. Теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономной системы дифференциальных уравнений с использованием двух функций Ляпунова впервые дана В. М. Матросовым [5]. На функционально-дифференциальные уравнения она обобщена в [4, с. 111].

Отметим, что содержательность принципа инвариантности для функционально-дифференциальных уравнений может снижаться ввиду того, что вычисление производных функционалов Ляпунова — Красовского вдоль решений требует знания решений. Тем не менее в примерах и прикладных задачах эта трудность часто преодолевается в силу того, что эта производная естественным образом «распадается» на конечномерную и бесконечномерную части и последняя оказывается инвариантной по отношению к любым продолжениям решения в каждой фиксированной точке t. Таким образом, производная функционала вдоль решения может быть, как и для систем без запаздывания, записана в терминах правой части системы с запаздыванием. Формализация этого свойства в [6] привела к понятию инвариантно дифференцируемого функционала Ляпунова — Красовского и созданию удобного аппарата (i-гладкого анализа) для изучения ряда задач качественной теории функционально-дифференциальных уравнений. В данной работе исследуются принцип инвариантности и вопросы притяжения с использованием набора вспомогательных инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова — Красовского для автономных функционально-дифференциальных включений. На них распространяются некоторые результаты, полученные в [7], для обыкновенных дифференциальных уравнений (1).

1. Основные определения и предварительные сведения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\tau\geq 0$ — произвольное вещественное число, C_τ — пространство всех непрерывных функций $\phi(\cdot)$, определенных на отрезке $[-\tau,0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ с обычной sup-нормой $\|\phi(\cdot)\|_C=\sup\limits_{-\tau\leq\theta\leq 0}\|\phi(\theta)\|$. Для любых $T>0$, $t\in[0,T)$ и непрерывной функции $x:[-\tau,T)\to\mathbb{R}^n$ определим функцию $x_t(\cdot)\in C_\tau$ равенством $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $-\tau\leq\theta\leq 0$. Будем рассматривать функционально-дифференциальное включение

$$\dot{x}\in F(x_t(\cdot)),\quad x_0(\cdot)=\varphi_0(\cdot), \tag{2}$$

где функция $\varphi_0(\cdot)\in C_\tau$ задает начальное значение для задачи (2) в момент времени $t=0$ (начальная функция), $F:C_\tau\to\mathbb{R}^n$ — многозначное отображение, относительно которого всюду в дальнейшем предполагаем выполненными следующие условия.

A1. $F(\phi(\cdot))$ полунепрерывно сверху (см. [8, с. 27]) и имеет выпуклые компактные значения.

A2. Для любого ограниченного замкнутого множества $\Omega\subset C_\tau$ существует константа $L>0$ такая, что $\|z\|\leq L$ для всех $z\in F(\phi(\cdot))$ и всех $\phi(\cdot)\in\Omega$.

Под решением задачи (2), определенным на промежутке $[-\tau, a)$, понимается непрерывная функция $x(t)$, абсолютно непрерывная на каждом конечном отрезке $[0, t_1]$, $t_1 < a$, такая, что ее производная $\dot{x}(t)$ на этом отрезке почти всюду удовлетворяет включению $\dot{x}(t) \in F(x_t(\cdot))$ и выполняется начальное условие $x_0(\cdot) = \phi_0(\cdot)$.

При сделанных предположениях включение (2) для любой начальной функции имеет локальное решение, которое может быть продолжено на максимальный промежуток $[-\tau, \omega)$.

Следуя [6], введем следующие определения.

Для функции $\psi(\cdot) \in C_\tau$ и числа $\Delta > 0$ через $E_\Delta(\psi(\cdot))$ обозначим множество всех непрерывных продолжений $\Psi(\cdot)$ функции $\psi(\cdot)$ на отрезок $[-\tau, \Delta]$.

Будем говорить, что функционал $W : C_\tau \to R$ *имеет инвариантную производную* $\partial_\psi W$ в точке $\psi(\cdot) \in C_\tau$, если для любой функции $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ функция $Y_\Psi(\xi) = W(\Psi_\xi(\cdot))$, $\xi \in [0, \Delta)$, имеет в нуле конечную правую производную, инвариантную относительно функций $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ (т. е. значение правой производной в нуле одно и то же для всех $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$).

Функционал $V : \mathbb{R}^n \times C_\tau \to R$ *инвариантно дифференцируем* в точке $p = (x, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times C_\tau$, если в этой точке существуют конечные $\nabla_x V$, $\partial_\psi V$ и для любой $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ выполняется равенство

$$V(x + z, \Psi_\xi(\cdot)) - V(x, \psi(\cdot)) = \langle \nabla_x V[p], z \rangle + \partial_\psi V[p] \cdot \xi + o(\sqrt{\|z\|^2 + \xi^2}))$$

при всех $z \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in [0, \Delta)$, причем $o(\cdot)$ зависит от выбора $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ (здесь $\nabla_x V$ — градиент функционала V по переменной x, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — знак скалярного произведения).

Замечание 1. Для того чтобы функционал V был инвариантно дифференцируем в точке $p = (x, \psi(\cdot))$, необходимо, чтобы он имел в этой точке частные производные $\nabla_x V$, $\partial_\psi V$, и достаточно, чтобы они были инвариантно непрерывны в точке p (см. [6, с. 44]).

Верхнюю $\dot{V}^*$ *и нижнюю* $\dot{V}_*$ *производные функционала* $V(x, \psi(\cdot))$ (в точке $\psi(\cdot)$) в силу дифференциального включения (1) определим следующими равенствами:

$$\dot{V}^* = \sup_{y \in F(\psi(\cdot))} (\langle \nabla_x V, y \rangle + \partial_\psi V)|_{\,x=\psi(0)},$$

$$\dot{V}_* = \inf_{y \in F(\psi(\cdot))} (\langle \nabla_x V, y \rangle + \partial_\psi V)|_{\,x=\psi(0)}.$$

Если функционал $V(x, \phi(\cdot))$ инвариантно дифференцируем, то в силу леммы 1 из [9] для любого решения $x(t)$ включения (1) выполняются неравенства

$$\dot{V}_*(x(t), x_t(\cdot)) \le D_* v(t) \le D^* v(t) \le \dot{V}^*(x(t), x_t(\cdot)), \tag{3}$$

где $D_* v(t)$ и $D^* v(t)$ — нижнее правое и верхнее правое производные числа Дини функции $v(t) = V(x(t), x_t(\cdot))$.

Функцию $\psi(\cdot)$ назовем *ω-предельной* для решения $x(t)$ включения (2), определенного на промежутке $[-\tau, +\infty)$, если существует последовательность $t_n \to \omega$ такая, что $x_{t_n}(\cdot) \to \psi(\cdot)$. Множество всех ω-предельных функций обозначим через $\Lambda^+(x(\cdot))$.

Будем говорить, что множество $G \subset C_\tau$ *полуинвариантно* (относительно включения (2)), если для любой функции $\psi(\cdot) \in G$ существует решение $y(t)$ включения (2) такое, что $y_0(\cdot) = \psi(\cdot)$ и $y_t(\cdot) \in G$ для всех $t \ge 0$.

Лемма 1. *Пусть $x(t)$ — ограниченное непродолжимое решение включения (2), определенное на промежутке $[-\tau, \omega)$. Тогда $\omega = +\infty$, множество $\Lambda^+(x(\cdot))$ непусто, компактно, связно и полуивариантно и $d(x_t(\cdot), \Lambda^+(x(\cdot))) \to 0$ при $t \to +\infty$, где d — расстояние от точки до множества в пространстве C_τ.*

Доказательство. Из полунепрерывности сверху многозначного отображения $F(\phi(\cdot))$ следует, что оно локально ограничено в окрестности каждой точки пространства C_τ. Тогда, используя условие A2, так же, как при доказательствах теорем 2.3.1 и 2.3.2 из [3], заключаем, что для любого замкнутого ограниченного множества $U \subset \mathbb{R}^1 \times C_\tau$ существует точка $t_U \in (0, \omega)$ такая, что $(t, x_t(\cdot)) \notin U$ для всех $t \in (t_U, \omega)$.

Предположим теперь, что $x(t)$ — ограниченное непродолжимое решение и $\omega < +\infty$. Тогда множество $K = \overline{\bigcup\{x_t(\cdot)) : t \in [0, \omega)\}} \subset C_\tau$ замкнуто и ограничено. Положим $U = [0, \omega] \times K$. Тогда множество U замкнуто, ограничено и поэтому найдется точка t_U такая, что $x_t(\cdot) \notin K$ для всех $t \in (t_U, \omega)$, что невозможно. Итак, $\omega = +\infty$.

По условию A2 многозначное отображение $F(\phi(\cdot))$ ограничено на множестве K. Тогда непустота, компактность и полуинвариантность множества $\Lambda^+(x(\cdot))$ следуют из леммы 2 в [9].

Свойство $d(x_t(\cdot), \Lambda^+(x(\cdot))) \to 0$ при $t \to +\infty$ легко устанавливается от противного для любой непрерывной функции $x : [-\tau, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, если множество $\bigcup\{x_t(\cdot)) : t \in [0, +\infty)\} \subset C_\tau$ относительно компактно. Последнее следует из компактности множества $\Lambda^+(x(\cdot))$ и леммы 3 в [9].

С использованием относительной компактности множества $\bigcup\{x_t(\cdot) : t \in [0, \omega)\} \subset C_\tau$ и свойства $d(x_t(\cdot), \Lambda^+(x(\cdot))) \to 0$ связность множества $\Lambda^+(x(\cdot))$ доказывается от противного так же, как и при доказательстве теоремы из [2, с. 278]. Лемма доказана.

Замечание 2. Сформулированное выше свойство полуинвариантности множества G применительно к функционально-дифференциальному включению (2) отличается от свойства инвариантности множеств для функционально-дифференциальных уравнений (см. [3]) следующим образом. Во-первых, здесь для решения $x(\cdot)$ с начальной функцией из G предполагается, что условие $x_t(\cdot) \in G$ выполняется для всех $t \geq 0$, а не для всех $t \in (-\infty, +\infty)$. Во-вторых, предполагается, что условие $x_t(\cdot) \in G$ выполняется не для всех решений включения (2), а хотя бы для одного решения. Это существенно для систем, не обладающих свойством единственности решений. Отметим также, что в предположении единственности решений лемму 1 можно получить как следствие лемм 4.1.3 и 4.2.1 в [3], справедливых для абстрактных автономных динамических систем.

2. Принцип инвариантности и теоремы о притяжении

С учетом леммы 1 в дальнейшем считаем без оговорок, что любое ограниченное решение $x(t)$ включения (2) определено на промежутке $[-\tau, +\infty)$, а множество $\Lambda^+(x(\cdot)) \neq \varnothing$ связно, компактно и полуинвариантно.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset C_\tau$, $x^0(t)$ — ограниченное решение включения (2) такое, что $x^0_t(\cdot) \in \Omega$ для всех $t \geq 0$. Предположим, что существуют непрерывные инвариантно дифференцируемые функционалы $V_i(x, \phi(\cdot))$, $i = 0, \dots, m$, определенные на пространстве $\mathbb{R}^n \times C_\tau$ и обладающие свойствами:*

1) $\dot{V}^*_0(\phi(0), \phi(\cdot)) \leq 0$ *для всех* $\phi(\cdot) \in \overline{\Omega}$;

2) $\dot{V}_i^*(\phi(0),\phi(\cdot)) \le 0$ для всех $\phi(\cdot) \in \bigcap\{E(\dot{V}_\nu^* = 0) : \nu = 0,\ldots,i-1\}$, $i = 1,\ldots,m$, где

$$E(\dot{V}_\nu^* = 0) \stackrel{\Delta}{=} \{\phi(\cdot) \in \overline{\Omega} : \dot{V}_\nu^*(\phi(0),\phi(\cdot)) = 0\}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\Lambda^+(x^0(\cdot)) \subset G_0$, где G_0 — наибольшее полуинвариантное подмножество множества $E(\dot{V}_0^* = 0)$;

2) $\Lambda^+(x^0(\cdot)) \cap G \neq \varnothing$, где G — наибольшее полуинвариантное подмножество множества

$$E \stackrel{\delta}{=} \bigcap\{E(\dot{V}_\nu^* = 0) : \nu = 0,\ldots,m\}. \tag{4}$$

Доказательство. Докажем утверждение 1. В силу леммы 3 из [9] множество $D = \overline{\bigcup\{x_t^0(\cdot)) : t \ge 0\}}$ компактно. Так как функционал $V_0(x,\phi(\cdot))$ непрерывен, $\widetilde{V}_0(\phi(\cdot)) = V_0(\phi(0),\phi(\cdot))$ также непрерывен, стало быть, ограничен снизу на множестве D. Из условия 1 теоремы и неравенства (3) вытекает, что функция $t \to \widetilde{V}_0\big(x_t^0(\cdot)\big)$ невозрастающая и поэтому имеет предел $\lim\limits_{t\to+\infty} \widetilde{V}_0\big(x_t^0(\cdot)\big) = c$. Тогда $\Lambda^+(x^0(\cdot)) \subset \{\phi(\cdot) \in \overline{\Omega} : V_0(\phi(0),\phi(\cdot)) = c\}$. Теперь утверждение 1 теоремы вытекает из условия 1, полуинвариантности множества $\Lambda^+(x^0(\cdot))$ и неравенства (3).

Докажем утверждение 2. Пусть $\phi^1(\cdot) \in \Lambda^+(x^0(\cdot))$. Из полуинвариантности множества $\Lambda^+(x^0(\cdot))$ следует, что существует решение $x^1(t)$ включения (2), удовлетворяющее начальному условию $x_0^1(\cdot) = \phi^1(\cdot)$ и такое, что $x_t^1(\cdot) \in \Lambda^+(x^0(\cdot))$ для всех $t \ge 0$. Тогда из условия 2 при $i = 1$ и доказанного выше утверждения 1 получаем, что $\Lambda^+(x^1(\cdot)) \subset E(\dot{V}_1^* = 0)$. Из замкнутости множества $\Lambda^+(x^0(\cdot))$ вытекает, что $\Lambda^+(x^1(\cdot)) \subset \Lambda^+(x^0(\cdot))$.

Продолжая аналогичные рассуждения, убеждаемся в существовании набора решений $x^1(t),\ldots,x^m(t)$ таких, что

$$\Lambda^+(x^{i+1}(\cdot)) \subset \Lambda^+(x^i(\cdot)) \subset E(\dot{V}_i^* = 0), \quad i = 0,\ldots,m-1, \tag{5}$$

$$\Lambda^+(x^m(\cdot)) \subset E(\dot{V}_m^* = 0). \tag{6}$$

Из условий (5), (6) получаем, что $\Lambda^+(x^m(\cdot)) \subset \Lambda^+(x^0(\cdot)) \cap E$. Таким образом, множество $\Lambda^+(x^0(\cdot))$ содержит полуинвариантное ω-предельное подмножество $\Lambda^+(x^m(\cdot))$ из E, которое, очевидно, принадлежит наибольшему полуинвариантному множеству из E, откуда вытекает утверждение 2. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $E \subset C_\tau$ — некоторое множество, $\Lambda \subset E$ — полуинвариантное множество, $M \subset C_\tau$ — замкнутое множество и $E \backslash M \neq \varnothing$. Предположим, что существуют непрерывные инвариантно дифференцируемые функционалы $W_j(x,\phi(\cdot))$, $j = 1,\ldots,k$, такие, что для любой функции $\phi(\cdot) \in E\backslash M$ найдется индекс $j \in \{1,\ldots,k\}$, для которого*

$$W_j(\phi(0),\phi(\cdot)) = 0, \tag{7}$$

и выполняется одно из условий

$$\dot{W}_j^*(\phi(0),\phi(\cdot)) < 0, \quad \dot{W}_{*j}(\phi(0),\phi(\cdot)) > 0. \tag{8}$$

Тогда

$$\Lambda \subset M \cap E. \tag{9}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существует $\psi(\cdot) \in \Lambda \backslash M$. Из полуинвариантности множества Λ следует, что существует решение $y(t)$ включения (2) с начальным условием $y_0(\cdot) = \psi(\cdot)$, удовлетворяющее $y_t \in \Lambda$ для всех $t \geq 0$. Поскольку множество M замкнуто, $y_t(\cdot) \notin M$ для всех $t \in [0, \alpha)$ для некоторого достаточно малого $\alpha > 0$. В соответствии с неравенствами (3), (8) найдутся функционал W_{j_1} и достаточно малое число $h_1 > 0$ такие, что

$$W_{j_1}(y(0), y_0(\cdot)) = 0, \quad W_{j_1}(y(h_1), y_{h_1}(\cdot)) \neq 0, \quad y_{h_1}(\cdot) \in \Lambda \backslash M.$$

Следовательно, существуют функционал W_{j_2}, $j_1 \neq j_2$, и число $h_2 > 0$ настолько малое, что

$$W_{j_2}(y(h_1), y_{h_1}) = 0, \quad W_{j_2}(y(h_1 + h_2), y_{h_1+h_2}(\cdot)) \neq 0,$$
$$W_{j_1}(y(h_1 + h_2), y_{h_1+h_2}(\cdot)) \neq 0, \quad y_{h_1+h_2}(\cdot) \in \Lambda \backslash M.$$

Продолжая этот процесс, получим точку $t_k = \sum\limits_{j=1}^{k} h_j$ такую, что $y_{t_k}(\cdot) \in E \backslash M$ и $W_j(y(t_k), y_{t_k}(\cdot)) \neq 0$ для всех $j = 1, \ldots, k$. Последнее противоречит условию (7), и теорема доказана.

Будем говорить, что решение $x(t)$ включения (2), определенное на промежутке $[-\tau, +\infty)$, *стремится к множеству* $P \subset C_\tau$, если $d(x_t(\cdot), P) \to 0$ при $t \to +\infty$. Решение $x(t)$ *слабо стремится к множеству* P (см. соответствующее определение слабого притяжения для обыкновенных дифференциальных уравнений из [2, с. 194]), если существует последовательность $t_k \to +\infty$ такая, что $d(x_{t_k}(\cdot), P) \to 0$ при $k \to +\infty$.

Отметим, что решение с компактным ω-предельным множеством $\Lambda^+(x(\cdot))$ стремится (слабо стремится) к любому множеству P такому, что $\Lambda^+(x(\cdot)) \subset P$ ($\Lambda^+(x(\cdot)) \cap P \neq \varnothing$).

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теорем* 1 *и* 2 *с множеством* E, *определенным равенством* (4). *Тогда для любого ограниченного решения* $x(t)$ *включения* (2) *справедливы следующие утверждения.*

1. *Если* $m = 0$, *то* $\Lambda^+(x(\cdot)) \subset E \cap M$ *и* $x(t)$ *стремится к наибольшему полуинвариантному подмножеству из* $E \cap M$.

2. *Для любого* $m = 1, 2, \ldots$ *множество* $G = \Lambda^+(x(\cdot)) \cap E \cap M$ *содержит непустое связное компактное и полуинвариантное подмножество и* $x(t)$ *слабо стремится к множеству* $E \cap M$.

Утверждение 1 непосредственно вытекает из теорем 1 и 2, если учесть, что при $m = 0$ множество E равно $E(\dot{V}_0^* = 0)$. Утверждение 2 вытекает из теоремы 2, в которой следует положить $\Lambda = \Lambda^+(x^m(\cdot))$, и из соотношений (5), (6) и (9).

Теорема 4. *Пусть множество* $U_l = \{\phi \in C_\tau : V_0 < l\}$ *ограничено, выполняются все условия теоремы* 1 *с множеством* $\Omega = U_l$ *и все условия теоремы* 2 *с множеством* E, *определенным равенством* (4). *Тогда утверждения* 1 *и* 2 *теоремы* 3 *справедливы для любого решения* $x(t)$ *включения* (2) *с начальной функцией* $x_0(\cdot) \in U_l$.

Для доказательства достаточно заметить, что в теореме 1 для множества $\Omega = U_l$ любое решение с начальным условием $x_0(\cdot) \in U_l$ остается в Ω для всех $t \geq 0$ и поэтому ограничено.

Функционал $V(x, \phi(\cdot))$ будем называть *бесконечно большим*, если для любого $A > 0$ существует число $B > 0$ такое, что $|V(\phi(0), \phi(\cdot))| > A$ для всех $\|\phi(0)\| > B$.

Теорема 5. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1 *с множеством* $\Omega = C_\tau$ *и ограниченным снизу бесконечно большим функционалом* $V_0(x, \phi(\cdot))$ *и все условия теоремы* 2 *с множеством* E, *определенным равенством* (4). *Тогда утверждения* 1 *и* 2 *теоремы* 3 *справедливы для любого решения* $x(t)$ *включения* (2).

Легко видеть, что при сделанных относительно функционала V_0 предположениях любое решение включения (2) ограничено и утверждение теоремы следует из теорем 1, 2.

Замечание 3. Теоремы 3–5 не позволяют в полной мере решать задачу притяжения для включения (2), так как множество M заранее не известно и может формироваться, по сути дела, лишь в ходе анализа множеств $E(\dot{V}_i^* = 0)$ нулей верхних производных функционалов V_i. Чем богаче набор вспомогательных функционалов W_j, тем точнее определяется притягивающее множество и полнее те выводы, которые оно позволяет сделать на основе свойств ω-предельных множеств.

Отметим также, что свойство слабого притяжения полезно при наличии некоторой дополнительной информации. Например, если известно, что множество M обладает свойством устойчивости, то из слабого притяжения следует притяжение. Этот же вывод можно сделать, если известно, что ω-предельное множество решения состоит из одной точки.

Пример. Рассмотрим уравнение движения линейного осциллятора [10]:

$$m\ddot{q}(t) + c_1\dot{q}(t) + k_1 q(t) - F_{fr}(\dot{q}) - g(\dot{q}(t-\tau)) = 0, \tag{10}$$

где $F_{fr}(\dot{q}) = -Pf \operatorname{sgn} \dot{q}$ — сила сухого трения, параметры m, c_1, k_1, P и f положительны. После преобразования

$$x_1 = \dot{q}, \quad x_2 = q, \quad c = c_1/m, \quad k = k_1/m, \quad a = Pf/m$$

и доопределения разрывной функции $F_{fr}(\dot{q})$ в точке $\dot{q} = 0$ получаем дифференциальное включение

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) \in -cx_1(t) - kx_2(t) + F(x_1(t)) + g(x_1(t-\tau)), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t), \end{cases} \tag{11}$$

где

$$F(x_1) = \begin{cases} -a \operatorname{sgn} x_1, & x_1 \neq 0, \\ [-a, a], & x_1 = 0. \end{cases}$$

Решение дифференциального включения (11) является решением дифференциального уравнения (10) в смысле Филиппова [11].

Введем обозначения $x = (x_1, x_2)$, $\phi(\cdot) = (\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot))$ и рассмотрим инвариантно дифференцируемый функционал

$$V_0(x, \phi(\cdot)) = \frac{x_1^2}{c} + \frac{kx_2^2}{c} + \frac{1}{c^2}\int_{-\tau}^{0} g(\phi_1(s))\, ds. \tag{12}$$

Верхняя производная функционала V_0 в силу включения (11) имеет вид

$$\dot{V}_0^* = -\left[\phi_1(0) - \frac{1}{c}g(\phi_1(-\tau))\right]^2 - \phi_1^2(0) + \frac{1}{c^2}g^2(\phi_1(0)) - \frac{2a}{c}|\phi_1(0)|.$$

Условие знакоопределенности $\dot{V}_0^* \leq 0$ верхней производной дает следующее условие:

$$|g(z)| \leq c|z| \quad \forall z. \tag{13}$$

Тогда

$$\dot{V}_0^* = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c\phi_1(0) = g(\phi_1(-\tau)), \\ c|\phi_1(0)| = |g(\phi_1(0))|, \\ \phi_1(0) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Соотношение (14) позволяет выбрать вспомогательный функционал в виде $W_1(x, \phi(\cdot)) = x_1$. На множестве $E(\dot{V}_0^* = 0)$ справедливо равенство $W_1(\phi(0), \phi(\cdot)) = 0$, а неравенства

$$\dot{W}_1^* = a - k\phi_2(0) < 0, \quad \dot{W}_{1*} = -a - k\phi_2(0) > 0 \tag{15}$$

для верхней и нижней производных функционала W_1 выполняются тогда и только тогда, когда $k|\phi_2(0)| > a$. С учетом неравенств (15) выбираем множество

$$M = \{\phi(\cdot) : k|\phi_2(0)| \leq a\}.$$

Отметим, что функционал (12) бесконечно большой и ограниченный снизу. Поэтому в соответствии с теоремой 5 для любого решения включения (11) получаем

$$\Lambda^+(x(\cdot)) \subset M \cap E(\dot{V}_0^* = 0). \tag{16}$$

Проведем дальнейший анализ условия (16). В силу полуинвариантности множества $\Lambda^+(x(\cdot))$ для любой функции $\phi(\cdot) \in \Lambda(x(\cdot))$ существует решение $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ такое, что $y_0(\cdot) = \phi(\cdot)$ и $y_t(\cdot) \in M \cap E(\dot{V}_0^* = 0)$ для всех $t \geq 0$. Тогда $y_1(t-\tau) = \phi_1(t-\tau)$ и из условия (14) получаем $g(y_1(t-\tau)) = 0$ для всех $t \in [0, \tau]$. Следовательно, $g(\phi_1(s)) = 0$ для всех $s \in [-\tau, 0]$. Таким образом, заключаем, что

$$\Lambda^+(x(\cdot)) \subset \{\phi(\cdot) : \phi_1(0) = 0,\ k|\phi_2(0)| \leq a,\ g(\phi_1(s)) = 0\ \forall s \in [-\tau, 0]\}.$$

Если дополнительно предположить, что $g'(0) \neq 0$, то, как легко проверить, $g(\phi_1(s)) \equiv 0$ и

$$\Lambda^+(x(\cdot)) \subset \{\phi(\cdot) : \phi_1(\cdot) \equiv 0,\ k|\phi_2(0)| \leq a\}.$$

Далее, так как для любой функции $\phi(\cdot) \in \Lambda^+(x(\cdot))$ выполняется $\phi_1(s) = \dot{\phi}_2(s) = 0$, то $\phi_2(s) = \mathrm{const}$ для всех $s \in [-\tau, 0]$. Таким образом, установлено, что

$$\Lambda^+(x(\cdot)) \subset M_1 = \left\{\phi(\cdot) : \phi_1(\cdot) \equiv 0,\ \phi_2(\cdot) \equiv \alpha,\ |\alpha| \leq \frac{a}{k}\right\} \tag{17}$$

и $x_t(\cdot) \to M_1$.

Для любой функции $\phi(\cdot) \in M_1$ выполняется $V_0(\phi(0), \phi(\cdot)) = k\phi^2(0)/c$. Следовательно, пересечение $M_1 \cap \{\phi(\cdot) : V_0(\phi(0), \phi(\cdot)) = \mathrm{const}\}$ состоит из не более чем двух постоянных функций. Так как множество $\Lambda^+(x(\cdot))$ связно, оно состоит лишь из одной функции, и вывод, который можно сделать из условия (17), можно уточнить: $x_t(\cdot)$ стремится к некоторой функции $\phi(\cdot) \in M_1$. Таким образом, решается задача о притяжении для включения (11).

Исследуем свойство слабого притяжения. Пусть функционал V_0, как и ранее, определен равенством (12), но условие $\dot{V}_0^* \leq 0$ знакоопределенности верхней производной возьмем в виде более слабого, чем (13), неравенства

$$g^2(z)/c^2 \leq z^2 + a|z| \quad \forall z.$$

Тогда множество нулей $E(\dot{V}_0^* = 0)$ верхней производной функционала V_0 расширится:

$$\dot{V}_0^* = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c\phi_1(0) = g(\phi_1(-\tau)), \\ c^2\phi_1^2(0) + c^2a|\phi_1(0) = g^2(\phi_1(0)). \end{cases} \tag{18}$$

Обозначим множество, определенное условием (18), через $\widetilde{E}(\dot{V}_0^* = 0)$. Введем функционал

$$V_1 = \frac{kx_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2}.$$

Тогда на множестве $\widetilde{E}(\dot{V}_0^* = 0)$ выполняются неравенство $\dot{V}_1^* = -a|\phi_1(0)| \leq 0$ и соотношение $\dot{V}_1^* = 0 \Leftrightarrow \phi_1(0) = 0$. Применяя теоремы 1, 2 с функционалами $V_0, V_1, W_1 = x_1$, заключаем, что пересечение

$$F = \widetilde{E}(\dot{V}_0^* = 0) \cap E(\dot{V}_1^* = 0) \cap M \cap \Lambda^+(x(\cdot)) \tag{19}$$

содержит непустое связное полуинвариантное подмножество G. Отметим, что $\widetilde{E}(\dot{V}_0^* = 0) \cap E(\dot{V}_1^* = 0) = E(\dot{V}_0^* = 0)$ и поэтому $G \subset E(\dot{V}_0^* = 0) \cap M$. Тогда, как и выше, $G \subset M_1$. Очевидно, что $M_1 \subset E(\dot{V}_0^* = 0)$ и из (19) получаем $\Lambda^+(x(\cdot)) \cap M_1 \neq \varnothing$. Таким образом, можно сделать вывод о том, что решение $x(t)$ слабо стремится к множеству M_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.

2. *Руш Н., Абетс М., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.

3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

4. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.

5. *Матросов В. М.* Об устойчивости движения // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, № 6. С. 992–1002.

6. *Ким А. В.* i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.

7. *Матросов В. М., Финогенко И. А.* О притяжении для автономных механических систем с трением скольжения // ПММ. 1998. Т. 62, № 1. С. 100–120.

8. *Обуховский В. В., Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Машкин А. Д.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005.

9. *Сурков А. В.* Об устойчивости функционально-дифференциальных включений с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 8. С. 1055–1063.

10. *Lamarque C.-H., Bastien J., Holland M.* Study of maximal monotone model with a delay term // SIAM J. Numer Anal. 2003. V. 41, N 4. P. 1286–1300.

11. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Статья поступила 28 октября 2010 г.

Финогенко Иван Анатольевич
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
fin@icc.ru