Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 517.956.4

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ПЛОТНОСТИ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА ПО НАЧАЛЬНОЙ И КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРАМ

И. Оразов, М. А. Садыбеков

Аннотация. Рассматривается один класс задач, моделирующих процесс определения температуры и плотности источников тепла по заданным начальной и конечной температурам. При их математической формулировке возникают обратные задачи для уравнения теплопроводности, в которых вместе с решением уравнения требуется найти неизвестную правую часть, зависящую только от пространственной переменной. Доказаны существование и единственность классического решения задачи. Задача решена независимо от того, обладает ли соответствующая спектральная задача (для оператора кратного дифференцирования с не усиленно регулярными краевыми условиями) свойством базисности корневых функций.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение теплопроводности, начальная температура, конечная температура, не усиленно регулярные краевые условия, краевые условия типа Штурма, ряд Фурье, ортогональный базис.

§ 1. Постановка задачи

Задачи определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения одновременно с его решением носят название обратных задач математической физики. Такие задачи достаточно часто возникают в самых различных областях человеческой деятельности, что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. В работе рассматривается один класс задач, моделирующих процесс определения температуры и плотности источников тепла по заданным начальной и конечной температурам. При их математической формулировке возникают обратные задачи для уравнения теплопроводности, в которых вместе с решением уравнения требуется найти неизвестную правую часть, зависящую только от пространственной переменной. Вопросы разрешимости различных обратных задач для параболических уравнений изучались во многих работах (см., например, [1–8]). В отличие от предыдущих работ нами исследуются обратные задачи для уравнения теплопроводности с общими краевыми условиями по пространственной переменной, являющимися регулярными, но не усиленно регулярными.

В области $\Omega = \{(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим задачу о нахождении правой части $f(x)$ уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x) \tag{1}$$

и его решения $u(x,t)$, удовлетворяющего начальному и конечному условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(x,T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

и краевым условиям вида

$$\begin{cases} a_1u_x(0,t)+b_1u_x(1,t)+a_0u(0,t)+b_0u(1,t)=0, \\ c_1u_x(0,t)+d_1u_x(1,t)+c_0u(0,t)+d_0u(1,t)=0. \end{cases} \tag{3}$$

Коэффициентами a_k, b_k, c_k, d_k, $k=0,1$, краевого условия (3) являются действительные числа, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции.

Применение метода Фурье для решения задачи (1)–(3) приводит к спектральной задаче для оператора l, заданного дифференциальным выражением $l(y)=-y''(x)$, $0<x<1$, и краевыми условиями

$$\begin{cases} a_1y'(0)+b_1y'(1)+a_0y(0)+b_0y(1)=0, \\ c_1y'(0)+d_1y'(1)+c_0y(0)+d_0y(1)=0. \end{cases} \tag{4}$$

Краевые условия (4) называются *регулярными* [9], если выполнено одно из следующих трех условий:

$$\begin{gathered} a_1d_1-b_1c_1\neq 0; \\ a_1d_1-b_1c_1=0, \quad |a_1|+|b_1|>0, \quad a_1d_0+b_1c_0\neq 0; \\ a_1=b_1=c_1=d_1=0, \quad a_0d_0-b_0c_0\neq 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Регулярные краевые условия являются *усиленно регулярными* в первом и в третьем случаях, а во втором случае при дополнительном условии

$$a_1c_0+b_1d_0\neq \pm[a_1d_0+b_1c_0]. \tag{6}$$

В [10] рассмотрены частные случаи задачи (1)–(3), когда краевые условия (3) являются не усиленно регулярными — случай периодических краевых условий и случай условий типа Самарского — Ионкина. Однако методика доказательства из [10] не может быть автоматически перенесена на задачи с произвольными не усиленно регулярными краевыми условиями (3). Это связано с существенным использованием в [10] базисности системы собственных и присоединенных функций соответствующей задачи (4) для оператора кратного дифференцирования. Но, как следует из [11], не все такие задачи обладают свойством базисности. Для исследования таких задач независимо от свойств базисности нами предлагается новый метод исследования.

§ 2. Случай краевых условий типа Штурма

Частным случаем усиленно регулярных краевых условий являются условия типа Штурма, когда $b_0=b_1=c_0=c_1=0$. Пусть λ_k — собственные значения оператора l, занумерованные в порядке возрастания их модулей, а $y_k(x)$, $k=1,2,\ldots,$ — соответствующие им нормированные собственные функции. Известно [9], что собственные значения таких задач являются действительными, простыми, а система их собственных функций образует ортонормированный базис пространства $L_2(0,1)$. Поэтому решение $u(x,t), f(x)$ задачи (1)–(3) представимо в виде рядов:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)y_k(x), \quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_ky_k(x). \tag{7}$$

Подставляя (7) в уравнение (1), в начальные и конечные условия (2), для нахождения неизвестных функций $u_k(t)$ и коэффициентов f_k получаем следующие задачи:

$$u_k'(t)+\lambda_ku_k(t)=f_k, \quad u_k(0)=\varphi_k,\ u_k(T)=\psi_k, \tag{8}$$

где φ_k, ψ_k — коэффициенты Фурье разложения функций φ_k и ψ_k в ортогональный ряд по системе $\{y_k(x)\} : \varphi_k = (\varphi(x), y_k(x)),\ \psi_k = (\psi(x), y_k(x))$.

Решение задач (8) существует, единственно и может быть выписано в явном виде:

$$u_k(t) = e^{-\lambda_k t}\varphi_k + \frac{1 - e^{-\lambda_k t}}{1 - e^{-\lambda_k T}}(\psi_k - e^{-\lambda_k T}\varphi_k), \tag{9}$$

$$f_k = \frac{\lambda_k}{1 - e^{-\lambda_k T}}(\psi_k - e^{-\lambda_k T}\varphi_k). \tag{10}$$

Следует отметить, что формулы (9) и (10) остаются верными и для случая $\lambda_0 = 0$. В этом случае предельным переходом при $\lambda_0 \to 0$ из (9) и (10) получаем $u_0(t) = \varphi_0 + \frac{\psi_0 - \varphi_0}{T}t,\ f_0 = \frac{\psi_0 - \varphi_0}{T}$. Поэтому не будем отдельно выделять этот частный случай.

Подставляя (9) и (10) в (7), приходим к формальному решению задачи. Для завершения исследования необходимо (аналогично методу Фурье) обосновать гладкость полученного формального решения и сходимость всех встречающихся рядов. Сформулируем основной результат данного параграфа.

Лемма 1. *Пусть $b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = 0$, т. е. краевые условия* (4) *являются условиями типа Штурма. Если $\varphi(x), \psi(x) \in C^4[0,1]$ и функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi''(x)$, $\psi''(x)$ удовлетворяют краевым условиям* (4)*, то существует единственное классическое решение $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$, $f(x) \in C[0,1]$ задачи* (1)–(3).

Доказательство. Так как функции $\varphi''(x), \psi''(x) \in C^2[0,1]$ удовлетворяют краевым условиям (4), по теореме В. А. Стеклова [12, с. 41] они разлагаются в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды Фурье по собственным функциям $\{y_k(x)\}$. Поэтому ряды

$$\varphi''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k y_k(x), \quad \psi''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\psi_k y_k(x) \tag{11}$$

сходятся абсолютно и равномерно.

Из (9), (10) с учетом $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = +\infty$ несложно получить равномерные по k оценки

$$|u_k(t)| \le C(|\varphi_k| + |\psi_k|), \quad |u_k'(t)| \le C(|\varphi_k| + |\psi_k|)|\lambda_k|,$$

$$|f_k| \le C(|\varphi_k| + |\psi_k|)|\lambda_k|.$$

Отсюда и из равномерной и абсолютной сходимости рядов (11) следуют сходимость рядов (7) и принадлежность решения задачи (1)–(3) классам: $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$, $f(x) \in C[0,1]$. Так как система $\{y_k(x)\}$ образует ортонормированный базис пространства $L_2(0,1)$, любое решение задачи (1)–(3) из данного класса представимо рядами (7). Из однозначности построения решений (9), (10) задач (8) вытекает единственность решения задачи (1)–(3). Лемма 1 доказана полностью.

§ 3. Регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия

Для начала выделим класс регулярных, но не усиленно регулярных краевых условий в удобном нам виде.

Лемма 2. *Если краевые условия* (4) *регулярны, но не усиленно регулярны, то краевые условия* (3) *могут быть приведены к виду*

$$\begin{cases} a_1 u_x(0,t) + b_1 u_x(1,t) + a_0 u(0,t) + b_0 u(1,t) = 0, \\ c_0 u(0,t) + d_0 u(1,t) = 0, \end{cases} \qquad |a_1| + |b_1| > 0, \tag{12}$$

одного из следующих четырех типов:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 = 0, &\quad c_0 - d_0 \neq 0; \\ a_1 - b_1 = 0, &\quad c_0 + d_0 \neq 0; \\ c_0 - d_0 = 0, &\quad a_1 + b_1 \neq 0; \\ c_0 + d_0 = 0, &\quad a_1 - b_1 \neq 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Доказательство. Согласно [9, с. 73] если краевые условия (4) регулярны, но не усиленно регулярны, то $c_1 = d_1 = 0$ и

$$b_1 c_0 + a_1 d_0 \neq 0, \tag{14}$$

$$a_1 c_0 + b_1 d_0 = \pm[a_1 d_0 + b_1 c_0]. \tag{15}$$

В свою очередь, условие (15) может быть записано в виде $(a_1 \pm b_1)(c_0 \pm d_0) = 0$, что означает выполнение хотя бы одного из равенств условий (13). При выполнении одного из этих равенств условие (14) обеспечивает выполнение соответствующего неравенства из (13). Лемма 2 доказана.

В дальнейшем будем рассматривать только краевые условия вида (12).

Введем в рассмотрение четные $C(x,t)$ и нечетные $S(x,t)$ по переменной x части функции $u(x,t)$: $u(x,t) = C(x,t) + S(x,t)$, где

$$2C(x,t) = u(x,t) + u(1-x,t)б \quad 2S(x,t) = u(x,t) - u(1-x,t). \tag{16}$$

При этом для всех $(x,t) \in \Omega$ имеет место

$$\begin{aligned} C(x,t) = C(1-x,t), &\quad S(x,t) = -S(1-x,t), \\ C_x(x,t) = -C_x(1-x,t), &\quad S_x(x,t) = S_x(1-x,t). \end{aligned} \tag{17}$$

Очевидно, что для построения решения $u(x,t)$ достаточно определить функции $C(x,t)$ и $S(x,t)$ на «половине» области Ω — в подобласти $\Omega_0 = \{(x,t),\ 0 < 2x < 1,\ 0 < t < T\}$.

Нетрудно убедиться в том, что функции $C(x,t)$ и $S(x,t)$ являются в области Ω_0 решениями уравнения теплопроводности:

$$C_t(x,t) - C_{xx}(x,t) = f_0(x), \tag{18}$$

$$S_t(x,t) - S_{xx}(x,t) = f_1(x), \tag{19}$$

и удовлетворяют начальным и конечным условиям

$$C(x,0) = \varphi_0(x), \quad C(x,T) = \psi_0(x), \quad 0 \leq 2x \leq 1, \tag{20}$$

$$S(x,0) = \varphi_1(x), \quad S(x,T) = \psi_1(x), \quad 0 \leq 2x \leq 1, \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} 2f_0(x) = f(x) + f(1-x), &\quad 2f_1(x) = f(x) - f(1-x); \\ 2\varphi_0(x) = \varphi(x) + \varphi(1-x), &\quad 2\varphi_1(x) = \varphi(x) - \varphi(1-x); \\ 2\psi_0(x) = \psi(x) + \psi(1-x), &\quad 2\psi_1(x) = \psi(x) - \psi(1-x). \end{aligned}$$

Найдем краевые условия, которым на границе области Ω_0 удовлетворяют функции $C(x,t)$ и $S(x,t)$. Подчиняя функцию $u(x,t) = C(x,t) + S(x,t)$ краевым условиям (3), с учетом соотношений (17) получаем

$$\begin{gathered}(a_1 - b_1)C_x(0,t) + (a_1 + b_1)S_x(0,t) + (a_0 + b_0)C(0,t) + (a_0 - b_0)S(0,t) = 0,\\ (c_0 + d_0)C(0,t) + (c_0 - d_0)S(0,t) = 0.\end{gathered} \tag{22}$$

При выполнении каждого из условий (13) регулярности, но не усиленной регулярности краевых условий один из «главных» коэффициентов соотношения (22) всегда обращается в нуль. Пользуясь этим свойством, отдельно для каждого из типов (13) для функций $C(x,t)$ и $S(x,t)$ приходим к следующим краевым условиям на левой границе области Ω_0.

(I) При $a_1 + b_1 = 0$, $c_0 - d_0 \neq 0$

$$(a_1 - b_1)(c_0 - d_0)C_x(0,t) - (a_0 d_0 - b_0 c_0)C(0,t) = 0, \tag{23}$$

$$S(0,t) = \frac{(c_0 + d_0)}{(c_0 - d_0)}C(0,t). \tag{24}$$

(II) При $a_1 - b_1 = 0,\ c_0 + d_0 \neq 0$

$$(a_1 + b_1)(c_0 + d_0)S_x(0,t) + (a_0 d_0 - b_0 c_0)S(0,t) = 0, \tag{25}$$

$$C(0,t) = \frac{(c_0 - d_0)}{(c_0 + d_0)}S(0,t). \tag{26}$$

(III) При $c_0 - d_0 = 0,\ a_1 + b_1 \neq 0$

$$C(0,t) = 0, \tag{27}$$

$$(a_1 + b_1)S_x(0,t) + (a_0 - b_0)S(0,t) = -(a_1 - b_1)C_x(0,t). \tag{28}$$

(IV) При $c_0 + d_0 = 0,\ a_1 - b_1 \neq 0$

$$S(0,t) = 0, \tag{29}$$

$$(a_1 - b_1)C_x(0,t) + (a_0 + b_0)C(0,t) = -(a_1 + b_1)S_x(0,t). \tag{30}$$

Дополнительно из соотношений (17) получаем на правой границе области Ω_0 краевые условия

$$C_x(1/2,\ t) = 0, \tag{31}$$

$$S(1/2,\ t) = 0. \tag{32}$$

Следовательно, каждый из типов (13) не усиленно регулярных краевых условий сводится к последовательному решению двух краевых задач.

Задача I. *В области* Ω_0 *найти решение* $C(x,t)$ *уравнения* (18), *удовлетворяющее начальному и конечному условиям* (20) *и краевым условиям* (23), (31). *Используя найденное* $C(x,t)$, *в области* Ω_0 *найти решение* $S(x,t)$ *уравнения* (19), *удовлетворяющее начальному и конечному условиям* (21) *и краевым условиям* (24), (32).

Задача II. *В области* Ω_0 *найти решение* $S(x,t)$ *уравнения* (19), *удовлетворяющее начальному и конечному условиям* (21) *и краевым условиям* (25), (32). *Используя найденное* $S(x,t)$, *в области* Ω_0 *найти решение* $C(x,t)$ *уравнения* (18), *удовлетворяющее начальному и конечному условиям* (20) *и краевым условиям* (26), (31).

Задача III. *В области Ω_0 найти решение $C(x,t)$ уравнения* (18), *удовлетворяющее начальному и конечному условиям* (20) *и краевым условиям* (27), (31). *Используя найденное $C(x,t)$, в области Ω_0 найти решение $S(x,t)$ уравнения* (19), *удовлетворяющее начальному и конечному условиям* (21) *и краевым условиям* (28), (32).

Задача IV. *В области Ω_0 найти решение $S(x,t)$ уравнения* (19), *удовлетворяющее начальному и конечному условиям* (21) *и краевым условиям* (29), (32). *Используя найденное $S(x,t)$, в области Ω_0 найти решение $C(x,t)$ уравнения* (18), *удовлетворяющее начальному и конечному условиям* (20) *и краевым условиям* (30), (31).

Нетрудно видеть, что все полученные на границе области Ω_0 новые краевые условия для функций $C(x,t)$ и $S(x,t)$ являются разделенными, а следовательно, усиленно регулярными.

Таким образом, доказана

Лемма 3. *Решение задачи* (1)–(3) *в случае регулярных, но не усиленно регулярных условий всегда может быть эквивалентно сведено к последовательному решению двух задач с усиленно регулярными краевыми условиями Штурма.*

По найденным в области Ω_0 решениям краевых задач решение задачи (1)–(3) строится по формуле

$$u(x,t)=\begin{cases} C(x,t)+S(x,t), & 2x\le 1,\\ C(1-x,t)-S(1-x,t), & 2x\ge 1,\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} f_0(x)+f_1(x), & 2x\le 1,\\ f_0(1-x)-f_1(1-x), & 2x\ge 1.\end{cases}$$

При этом гладкость полученного решения во всей области Ω обеспечивается условиями (17).

§ 4. Решение задачи для случая не усиленно регулярных краевых условий

Пользуясь леммой 3, существование решения задачи (1)–(3), его единственность и гладкость можно получить из леммы 1 для соответствующих задач с усиленно регулярными краевыми условиями типа Штурма. Наличие неоднородного краевого условия на левой границе области Ω_0 не является существенным усложнением и обходится стандартным способом.

Основным результатом работы является

Теорема. *Пусть краевые условия* (3) *регулярны, но не усиленно регулярны, т. е. коэффициенты краевых условий удовлетворяют одному из условий* (13). *Если $\varphi(x),\psi(x)\in C^4[0,1]$ и функции $\varphi(x),\psi(x),\varphi''(x),\psi''(x)$ удовлетворяют краевым условиям* (4), *то существует единственное классическое решение $u(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$, $f(x)\in C[0,1]$ задачи* (1)–(3).

Доказательство. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться в том, что при выполнении условий теоремы начальные и конечные функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ принадлежат $C^4[0,\frac{1}{2}]$ и удовлетворяют соответствующим краевым условиям типа Штурма в точках $x=0$ и $x=\frac{1}{2}$. Доказательство теоремы завершается применением леммы 1 для соответствующих задач с краевыми условиями типа Штурма в области Ω_0.

В заключение отметим, что данным методом задача (1)–(3) решена независимо от того, обладает ли соответствующая спектральная задача для оператора кратного дифференцирования с краевыми условиями (4) свойством базисности корневых функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Ю. Е., Белов Ю. Я.* Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306, № 6. С. 1289–1293.

2. *Аниконов Ю. Е., Бубнов Б. А.* Существование и единственность решения обратной задачи для параболического уравнения // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298, № 4. С. 777–779.

3. *Бубнов Б. А.* Существование и единственность решения обратных задач для параболических и эллиптических уравнений // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1986. С. 25–29.

4. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 4. С. 49–68.

5. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 722–744.

6. *Монахов В. Н.* Обратные задачи для релаксационных моделей гидродинамики // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2003. Т. 3, № 3. С. 72–80.

7. *Калиев И. А., Первушина М. М.* Обратные задачи для уравнения теплопроводности // Современные проблемы физики и математики. Уфа: Гилем, 2004. Т. 1. С. 50–55.

8. *Калиев И. А., Первушина М. М.* Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования: Материалы конф. Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2005. С. 39–43.

9. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

10. *Калиев И. А., Сабитова М. М.* Задачи определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 1. С. 89–97.

11. *Lang P., Locker J.* Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$ // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 146, N 1. P. 148–191.

12. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 2 февраля 2011 г.

Оразов Исабек
Институт математики и математического моделирования
Южно-Казахстанского гос. университета,
пр. Тауке-хана, 5, Шымкент 160018, Казахстан

Садыбеков Махмуд Абдысаметович
Институт математики, информатики и механики
Министерства образования и науки Республики Казахстан,
ул. Шевченко, 28, Алматы 050010, Казахстан
makhmud-s@mail.ru