Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 510.5+510.6+512.563

МИНИМАЛЬНОСТЬ НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

М. Н. Леонтьева

Аннотация. Завершается исследование разрешимости булевых алгебр в терминах вычислимости некоторой последовательности канонических идеалов. Приведено доказательство минимальности полученных условий такой разрешимости для булевых алгебр всех элементарных характеристик.

Ключевые слова: булева алгебра, вычислимое множество, вычислимая модель, сильно вычислимая модель, n-вычислимость, разрешимая модель, элементарная характеристика булевой алгебры, идеал Ершова — Тарского.

1. Основные понятия и результаты

Модель называется *вычислимой*, если ее носитель — вычислимое множество, операции — вычислимые функции и отношения вычислимы. Вычислимая модель называется *n-вычислимой*, если существует алгоритм, определяющий по конечной Σ_n-формуле и набору элементов, истинна ли эта формула на этом наборе. *Сильно вычислимой* называют модель, для которой подобный алгоритм существует для всех формул исчисления предикатов. Будем называть модель *разрешимой*, если у нее существует сильно вычислимая изоморфная копия. В данной работе рассматриваются счетные булевы алгебры, которые кратко будем называть алгебрами; в качестве источника предварительных сведений по теории булевых алгебр будем использовать [1].

Множество атомов некоторой алгебры $\mathfrak{B}$ обозначим через $\mathrm{At}_0(\mathfrak{B})$, идеал безатомных элементов — через $\mathrm{Als}_0(\mathfrak{B})$, идеал атомных элементов — через $\mathrm{Atm}_0(\mathfrak{B})$. Через $\mathrm{F}_0(\mathfrak{B})$ обозначим *идеал Фреше* (идеал, порожденный атомами), $\mathrm{E}(\mathfrak{B}) = \mathrm{Als}_0(\mathfrak{B}) + \mathrm{Atm}_0(\mathfrak{B})$ — идеал Ершова — Тарского (элементы этого идеала также будем называть *разложимыми*). Пусть $\{\mathrm{E}_n\}_{n\in\omega}$ — последовательность итерированных идеалов Ершова — Тарского, т. е. $\mathrm{E}_0(\mathfrak{B}) = \{0\}$, $\mathrm{E}_{n+1}(\mathfrak{B}) = (\mathrm{E}_n \circ \mathrm{E})(\mathfrak{B}) = \{x \in \mathfrak{B} \mid x/\mathrm{E}_n \in \mathrm{E}(\mathfrak{B}/\mathrm{E}_n)\}$. Для каждого $k \in \omega$ обозначим через At_k предикат, выделяющий в каждой алгебре множество таких элементов x, что x/E_k — атом. Аналогично определяются предикаты F_k, Als_k и Atm_k. Для предикатов $\mathrm{At}_0, \mathrm{F}_0, \mathrm{Als}_0, \mathrm{Atm}_0, \mathrm{E}_1$ будут иногда использоваться обозначения $\mathrm{At}, \mathrm{F}, \mathrm{Als}, \mathrm{Atm}, \mathrm{E}$ соответственно в целях облегчения восприятия и записи, когда других предикатов нет.

Определим некоторые наборы одноместных предикатных символов. Пусть $\Sigma_0 = \{\mathrm{E}_0\}$, $\Sigma_n = \Sigma_0 \cup \{\mathrm{At}_0, \mathrm{Als}_0, \mathrm{Atm}_0, \mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{At}_{n-1}, \mathrm{Als}_{n-1}, \mathrm{Atm}_{n-1}, \mathrm{E}_n\}$ для $n \geq 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00236).

Пусть T — элементарная теория некоторой алгебры $\mathfrak{B}$. Для каждой такой теории, кроме теории, соответствующей элементарной характеристике $(\infty, 0, 0)$, Ю. Л. Ершов в [2] нашел конечный набор одноместных предикатов $P_0, \ldots, P_m$, определяемых формулами первого порядка, такой, что $\mathfrak{B}$ сильно вычислима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ вычислима и вычислимы все предикаты $P_0, \ldots, P_m$. Набор $P_0, \ldots, P_m$ имеет вид Σ_{n+1}, где n — первая элементарная характеристика алгебры. Позже С. С. Гончаров показал, что при $k \leq m$ вычислимость $\mathfrak{B}$ вместе с вычислимостью предикатов $P_1, \ldots, P_k$ равносильна вычислимости Σ_k-диаграммы в $\mathfrak{B}$, т. е. k-вычислимости.

Мы рассматриваем следующую задачу: *если $S \subseteq \Sigma_{n+1}$ — некоторое подмножество и известно, что $\mathfrak{B}$ вычислима и в $\mathfrak{B}$ вычислимы все предикаты из S, то можно ли утверждать, что $\mathfrak{B}$ разрешима, т. е. обладает сильно вычислимым представлением?*

Некоторые частные случаи рассматриваемой задачи были ранее рассмотрены в работах С. С. Гончарова, С. П. Одинцова, В. Н. Власова и П. Е. Алаева. Приведем краткий обзор этих результатов. В [3] построен пример неразрешимой алгебры с характеристикой $(\infty, 0, 0)$, которая n-вычислима для всех $n \in \omega$ (без равномерности по n). В [4] приводится пример неразрешимой и 0-вычислимой (т. е. просто вычислимой) алгебры характеристики $(0, \infty, 0)$. При этом из [2] следует, что в этом случае 1-вычислимость влечет не только разрешимость, но и сильную вычислимость. Для $(0, k, 0)$ и $(0, k, 1)$, $k \in \omega$, ответ сразу вытекает из [2]: вычислимость означает и сильную вычислимость.

В [2] указаны достаточные условия сильной вычислимости (а значит, и разрешимости) и для всех остальных характеристик вида $(m, *, *)$, где $m \in \omega$. Например, для характеристик $(m, \infty, 0)$ и $(m, \infty, 1)$ сильная вычислимость следует из $(4m+1)$-вычислимости. Примеры из [4] можно изменить так, чтобы показать, что $4m$-вычислимости недостаточно и для разрешимости.

В [5] показано, что для характеристики $(1, 1, 0)$ 2-вычислимость влечет разрешимость, а для $(1, 0, 1)$ 3-вычислимость влечет разрешимость. В [1] завершено доказательство того, что для $(1, 1, 0)$ уже 1-вычислимость влечет разрешимость. В [6] для характеристики $(1, 0, 1)$ построен пример 1-вычислимой и неразрешимой алгебры. В [7] доказано, что для характеристики $(1, 0, 1)$ уже 2-вычислимость влечет разрешимость. В [8] получено, что для характеристики $(m, 1, 0)$, $m \geq 2$, разрешимость следует из $(4m-3)$-вычислимости, а для $(m, 0, 1)$, $m \geq 2$, — из $(4m-2)$-вычислимости. В [9] доказано, что в случае алгебры характеристики $(m, 0, 1)$, $m > 0$, из $(4m-3)$-вычислимости и вычислимости предиката Atm_{m-1} также следует разрешимость.

В данной работе завершено исследование рассматриваемой задачи и получен ответ для всех возможных подмножеств S, который сформулирован в теореме 1.

Теорема 1. *Пусть $n, p \in \omega$, $\mathfrak{B}$ — вычислимая булева алгебра с первой элементарной характеристикой, равной n, $S \subseteq \Sigma_{n+1}$ и в $\mathfrak{B}$ вычислимы все предикаты из S.*

(1) *Пусть элементарная характеристика $\mathfrak{B}$ равна $(n, p, 1)$. Если для каждого $k < n$ в S содержатся At_k и хотя бы один из предикатов Als_k и Atm_k, то $\mathfrak{B}$ разрешима; в противном случае она не является, вообще говоря, разрешимой.*

(2) *Пусть элементарная характеристика $\mathfrak{B}$ равна $(n, p+1, 0)$. Если для каждого $k < n$ в S содержатся At_k и для каждого $m < n-1$ хотя бы один из предикатов Als_m и Atm_m, то $\mathfrak{B}$ разрешима; в противном случае она не является, вообще говоря, разрешимой.*

(3) *Пусть элементарная характеристика* $\mathfrak{B}$ *равна* $(n,\infty,0)$ *или* $(n,\infty,1)$. *Если для каждого* $k\le n$ *в* S *содержатся* At_k *и для каждого* $m<n$ *хотя бы один из предикатов* Als_m *и* Atm_m, *то* $\mathfrak{B}$ *разрешима; в противном случае она не является, вообще говоря, разрешимой.*

Мы покажем существенность условий разрешимости булевых алгебр, сформулированных в теореме 1, а именно для каждого условия построим неразрешимые булевы алгебры, обладающие всеми условиями, кроме данного. Достаточность данных условий рассматривается в [10].

2. Неразрешимая булева алгебра характеристики $(n,\infty,0)$ с вычислимыми предикатами из $\Sigma_{n+1}\backslash\{\mathrm{At}_n\}$

Следуя [11], будем говорить, что *идеальный оператор* — это соответствие T, которое каждой алгебре $\mathfrak{A}$ сопоставляет идеал $\mathrm{T}(\mathfrak{A})\subseteq\mathfrak{A}$ и при этом обладает свойством: если $x\in\mathfrak{A}$, $y\in\mathfrak{B}$ и $\hat{x}\cong\hat{y}$, то $x\in\mathrm{T}(\mathfrak{A})\Leftrightarrow y\in\mathrm{T}(\mathfrak{B})$.

Если $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ — алгебры и T — идеальный оператор, то изоморфное вложение $f:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ назовем *Т-стабильным*, когда выполняются следующие свойства:

(1) $f^{-1}(\mathrm{T}(\mathfrak{B}))=\mathrm{T}(\mathfrak{A})$,

(2) $\widehat{f(a)}=f(\hat{a})$ для $a\in\mathrm{T}(\mathfrak{A})$.

В этом случае $\widehat{f(a)}\cong\hat{a}$ для $a\in\mathrm{T}(\mathfrak{A})$.

Идеальный оператор T *стабилен*, если для любой последовательности алгебр $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ и любых Т-стабильных вложений $h_n:\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{A}_{n+1}$ верно утверждение: если $\mathfrak{C}=\mathrm{Lim}\{\mathfrak{A}_n,h_n\}_{n\in\omega}$ и $g_n:\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{C}$ — естественные вложения, то g_n также являются Т-стабильными.

Для элементов x,y будем обозначать $x\bigtriangleup y=(x-y)+(y-x)$.

Лемма 1. *Композиция стабильных операторов — стабильный оператор.*

Доказательство. Рассмотрим стабильные операторы T_1 и T_2 и покажем, что оператор $\mathrm{T}=\mathrm{T}_1\circ\mathrm{T}_2$ стабилен. Оператор T алгебре $\mathfrak{A}$ ставит в соответствие идеал $\mathrm{T}(\mathfrak{A})=\{x\in\mathfrak{A}\mid x/\mathrm{T}_1(\mathfrak{A})\in\mathrm{T}_2(\mathfrak{A}/\mathrm{T}_1(\mathfrak{A}))\}$. Пусть $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ — последовательность алгебр, $h_n:\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{A}_{n+1}$ — Т-стабильные вложения и $\mathfrak{C}=\mathrm{Lim}\{\mathfrak{A}_n,h_n\}_{n\in\omega}$, $g_n:\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{C}$ — естественные вложения. Как было замечено в лемме 1 из [12], в данных условиях свойство (2) из определения Т-стабильного вложения выполняется для g_n, какой бы ни был оператор T.

Осталось проверить, что $g_n^{-1}(\mathrm{T}(\mathfrak{C}))\subseteq\mathrm{T}(\mathfrak{A}_n)$. Для этого рассмотрим последовательность алгебр $\mathfrak{D}_n=\mathfrak{A}_n/\mathrm{T}_1$ и вложения $h_n':\mathfrak{D}_n\to\mathfrak{D}_{n+1}$, определенные формулой $h_n'(a/\mathrm{T}_1(\mathfrak{A}_n))=h_n(a)/\mathrm{T}_1(\mathfrak{A}_{n+1})$.

Покажем, что отображения h_n' определены корректно. Если $a\in\mathrm{T}_1(\mathfrak{A}_n)$, то $a\in\mathrm{T}(\mathfrak{A}_n)$. Вложения h_n являются Т-стабильными, поэтому $\hat{a}\cong\widehat{h_n(a)}$, а значит, $h_n(a)\in\mathrm{T}_1(\mathfrak{A}_{n+1})$ в силу того, что T_1 — идеальный оператор.

Теперь покажем, что h_n' являются T_2-стабильными вложениями. Из определения очевидно, что h_n' — гомоморфизм. Почти дословно так же, как для корректности, можно показать, что $\mathrm{Ker}(h_n')=\{0\}$, т. е. h_n' является изоморфным вложением. Проверим (1) из определения T_2-стабильного вложения. Вложения h_n являются Т-стабильными, поэтому $h_n^{-1}(\mathrm{T}(\mathfrak{A}_{n+1}))=\mathrm{T}(\mathfrak{A}_n)$. Ввиду последнего имеем

$$\begin{aligned}x/\mathrm{T}_1\in\mathrm{T}_2(\mathfrak{A}_n/\mathrm{T}_1)&\Leftrightarrow x\in\mathrm{T}(\mathfrak{A}_n)\Leftrightarrow x\in h_n^{-1}(\mathrm{T}(\mathfrak{A}_{n+1}))\\&\Leftrightarrow h_n(x)\in\mathrm{T}(\mathfrak{A}_{n+1})\Leftrightarrow h_n(x)/\mathrm{T}_1\in\mathrm{T}_2(\mathfrak{A}_{n+1}/\mathrm{T}_1)\\&\Leftrightarrow h_n'(x/\mathrm{T}_1)\in\mathrm{T}_2(\mathfrak{A}_{n+1}/\mathrm{T}_1)\Leftrightarrow x/\mathrm{T}_1\in(h_n')^{-1}(\mathrm{T}_2(\mathfrak{A}_{n+1}/\mathrm{T}_1)).\end{aligned}$$

В результате получаем $(h'_n)^{-1}(\mathrm{T}_2(\mathfrak{A}_{n+1}/\mathrm{T}_1)) = \mathrm{T}_2(\mathfrak{A}_n/\mathrm{T}_1)$. Перейдем к (2). Если $a/\mathrm{T}_1 \in \mathrm{T}_2(\mathfrak{A}_n/\mathrm{T}_1)$, что равносильно тому, что $a \in \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_2(\mathfrak{A}_n)$, то $h_n(\hat{a}) = \widehat{h_n(a)}$. Отсюда $h'_n\widehat{(a/\mathrm{T}_1)} = \widehat{h_n(a)}/T_1 = h_n(\hat{a})/\mathrm{T}_1 = h'_n\widehat{(a/\mathrm{T}_1)}$.

Определим $\mathfrak{D} = \mathrm{Lim}\{\mathfrak{D}_n, h'_n\}_{n\in\omega}$. По определению имеем $D^0 = \{(x,i) \mid i \in \omega,\ x \in \mathfrak{A}_i/\mathrm{T}_1\}$ и $\mathfrak{D} = D^0/_{\sim'}$, $C^0 = \{(y,j) \mid j \in \omega,\ y \in \mathfrak{A}_j\}$ и $\mathfrak{C} = C^0/_{\sim}$. Здесь отношение эквивалентности $\sim'$ определяется на D^0 следующим образом ($i \le j$): $(z/\mathrm{T}_1, i) \sim' (t/\mathrm{T}_1, j) \Leftrightarrow h'_{j-1} \circ \cdots \circ h'_i(z/\mathrm{T}_1) = t/\mathrm{T}_1$. Отношение $\sim$ определяется на C^0 аналогично. Стало быть,

$$(z/\mathrm{T}_1, i) \sim' (t/\mathrm{T}_1, j) \Leftrightarrow (h_{j-1} \circ \cdots \circ h_i(z))/\mathrm{T}_1 = t/\mathrm{T}_1$$
$$\Leftrightarrow (h_{j-1} \circ \cdots \circ h_i(z)) \triangle t \in \mathrm{T}_1(\mathfrak{A}_j) \Leftrightarrow^{\star} g_j((h_{j-1} \circ \cdots \circ h_i(z))$$
$$\triangle t) \in \mathrm{T}_1(\mathfrak{C}) \Leftrightarrow ((z,i)/_{\sim}) \triangle ((t,j)/_{\sim}) \in \mathrm{T}_1(\mathfrak{C}).$$

Переход, помеченный знаком *, основан на следующих наблюдениях. Несложно видеть, что любое T-стабильное вложение является также и T_1-стабильным вложением, так как $\mathrm{T}_1 \subseteq \mathrm{T}$. Поэтому h_n являются T_1-стабильными вложениями, а значит, таковыми будут и вложения g_n, поскольку по условию T_1 — стабильный оператор.

Пусть g'_n — естественные вложения $\mathfrak{D}_n$ в $\mathfrak{D}$. Выше было показано, что $(z/\mathrm{T}_1, i) \sim' (t/\mathrm{T}_1, j) \Leftrightarrow (z,i)/_{\sim}) \triangle ((t,j)/_{\sim}) \in \mathrm{T}_1(\mathfrak{C})$. На основании этого можно заключить, что для всех $a \in \mathfrak{A}_n$ выполняется $g'_n\widehat{(a/\mathrm{T}_1)} \cong \widehat{g_n(a)}/\mathrm{T}_1$. Поэтому если $g_n(a) \in \mathrm{T}(\mathfrak{C})$, что равносильно $g_n(a)/\mathrm{T}_1 \in \mathrm{T}_2(g_n(\mathfrak{A}_n)/\mathrm{T}_1)$, то получим, что $g'_n(a/\mathrm{T}_1) \in \mathrm{T}_2(g'_n(\mathfrak{A}_n/\mathrm{T}_1))$. По условию T_2 — стабильный оператор, тем самым $a/\mathrm{T}_1 \in \mathrm{T}_2(\mathfrak{A}_n/\mathrm{T}_1) \Leftrightarrow a \in \mathrm{T}(\mathfrak{A}_n)$. Значит, $g_n^{-1}(\mathrm{T}(\mathfrak{C})) \subseteq \mathrm{T}(\mathfrak{A}_n)$. Лемма доказана.

Через $\mathfrak{B}(L)$ будем обозначать алгебру, порожденную линейным порядком L. Ее элементами являются конечные дизъюнктные объединения полуинтервалов вида $[x,y[$ и $[x,+\infty[$, где $x,y \in L$. Если $\mathfrak{L}_1 = (L_1, \le_1)$ и $\mathfrak{L}_2 = (L_1, \le_2)$ — линейные порядки, то определим для них две операции. Пусть $L_1 \cap L_2 = \varnothing$. Тогда сумма $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 = (L_1 \cup L_2, \le)$, где $x \le y \Leftrightarrow (x \in L_1$ и $y \in L_2)$ или $(x,y \in L_i$ и $x \le_i y)$ для некоторого $i \in \{1,2\}$. Произведение $\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$ определяется как $(L_1 \times L_2, \le)$, где $\langle x_1, x_2\rangle \le \langle y_1, y_2\rangle$, если $x_2 \le_2 y_2$ или $(x_2 = y_2\ x_1 \le_1 y_1)$. Тем самым на $(L_1 \times L_2)$ определен обратный лексикографический порядок.

Очевидно, что тип изоморфизма алгебры $\mathfrak{B}(L)$ зависит только от типа изоморфизма порядка L, поэтому конкретное строение L в этой конструкции неважно. Традиционно через ω обозначается тип изоморфизма порядка натуральных чисел $(\mathbb{N}, \le)$, через n — тип конечного n-элементного порядка $(\{0,1, \ldots, n-1\}, \le)$, через η — тип порядка рациональных чисел $(\mathbb{Q}, \le)$.

Через $\Pi_\alpha(\mathfrak{M})$ обозначим множество всех бесконечных Π_α-предложений, истинных в модели $\mathfrak{M}$, через $\mathfrak{M} \le_\alpha \mathfrak{N}$ — то, что $\Pi_\alpha(\mathfrak{M}) \subseteq \Pi_\alpha(\mathfrak{N})$. Точное определение и свойства бесконечных Π_α-предложений можно найти в [13].

Пусть σ — некоторый конечный набор 1-местных предикатных символов (может быть, пустой), для каждого из которых заранее определена его реализация в любой алгебре, причем эта реализация сохраняется при изоморфизмах. Тогда $\mathfrak{A}^\sigma$ означает единственное обогащение алгебры $\mathfrak{A}$ предикатами из σ. Если $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — алгебры, то запись вида $\mathfrak{A} \le^\sigma_\alpha \mathfrak{B}$ означает, что $\mathfrak{A}^\sigma \le_\alpha \mathfrak{B}^\sigma$. Следуя [14], набор σ назовем *локальным*, если для любых алгебр $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, любых $a_0, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$, $a_0, \ldots, a_n | 1$, и любых $b_0, \ldots, b_n \in \mathfrak{B}$, $b_0, \ldots, b_n | 1$, верна эквивалентность: $(\mathfrak{A}, a_0, \ldots, a_n) \le^\sigma_0 (\mathfrak{B}, b_0, \ldots, b_n) \Leftrightarrow$ для всех $i \in [0,n]$ $\hat{a}_i \le^\sigma_0 \hat{b}_i$.

Пусть $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — изоморфное вложение, σ — локальный набор. Будем говорить, что f — *σ-вложение*, если f является изоморфным вложением $\mathfrak{A}^\sigma$ в

$\mathfrak{B}^\sigma$, т. е. $\mathfrak{A} \models P(a) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P(f(a))$ для всех $a \in \mathfrak{A}$, $P \in \sigma$.

Пусть T — идеальный оператор, σ — локальный набор. Будем говорить, что σ *согласован* с T, если для любой последовательности алгебр $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ и T-стабильных σ-вложений $h_n : \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}_{n+1}$ верно: если $\mathfrak{C} = \mathrm{Lim}\{\mathfrak{A}_n, h_n\}_{n\in\omega}$ и $g_n : \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{C}$ — естественные вложения, то g_n также являются σ-вложениями.

Для каждого идеального оператора R обозначим через At_R предикат, выделяющий в каждой алгебре множество таких элементов x, что x/R — атом. Заметим, что если $\mathrm{R} = \mathrm{E}_k$, то $\mathrm{At}_\mathrm{R} = \mathrm{At}_k$.

Лемма 2. *Пусть $\sigma = \{P_0, \ldots, P_k\}$ — некоторый конечный набор 1-местных предикатных символов таких, что для каждого $i \le k$ либо P_i — предикат, соответствующий некоторому идеальному оператору или множеству атомов, либо P_i — предикат вида At_R для некоторого ненулевого идеального оператора* R, *при этом предикат* R *тоже есть среди $P_0, \ldots, P_k$. Пусть* T *— стабильный идеальный оператор. Если для любой алгебры $\mathfrak{A}$ выполняется $P_i(\mathfrak{A}) \subseteq T(\mathfrak{A})$ для всех $i \in [0, k]$, то σ — локальный набор, согласованный с* T.

Доказательство. В [14] замечено, что $\{\mathrm{At}\}$ — локальный набор, и если R — предикат, соответствующий некоторому идеальному оператору в алгебрах, то $\{\mathrm{R}\}$ — локальный набор. Там же было отмечено, что объединение конечного множества локальных наборов является локальным набором. Нетрудно показать, что набор $\{\mathrm{R}, \mathrm{At}_\mathrm{R}\}$ локален.

Пусть $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ — последовательность алгебр, $\mathfrak{C} = \mathrm{Lim}\{\mathfrak{A}_n, h_n\}_{n\in\omega}$, $h_n : \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}_{n+1}$ — T-стабильные σ-вложения, $g_n : \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{C}$ — порожденные ими естественные вложения.

В силу того, что T — стабильный идеальный оператор, g_n — T-стабильные вложения. Пусть P — произвольный предикат из набора $\{P_0, \ldots, P_k\}$. Если $\mathfrak{A}_n \models \mathrm{P}(x)$, $\mathrm{P} \in \sigma$, то $x \in \mathrm{T}(\mathfrak{A}_n)$ и ввиду T-стабильности g_n будет $\hat{x} \cong \widehat{g_n(x)}$, откуда получаем $\mathfrak{C} \models \mathrm{P}(g_n(x))$, так как истинность предиката P на некотором элементе определяется только тем, что лежит под этим элементом (таковы все предикаты нашего набора).

Теперь допустим, что $\mathfrak{C} \models \mathrm{P}(g_n(x))$. Если $x \notin \mathrm{T}(\mathfrak{A}_n)$, то $g_n(x) \notin \mathrm{T}(\mathfrak{C})$; противоречие. Если же $x \in \mathrm{T}(\mathfrak{A}_n)$, то $\hat{x} \cong \widehat{g_n(x)}$, а значит, $\mathfrak{A}_n \models \mathrm{P}(x)$. Лемма доказана.

Для каждого $n \in \omega$ зафиксируем некоторый порядок на $\{0,1\}^n$. Если $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — набор элементов из алгебры $\mathfrak{A}$, то положим $\bar{a}^\perp = \big\{a_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\varepsilon_n}\big\}_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^n}$, где $a^1 = a$, $a^0 = 1 - a$.

Лемма 3 [14]. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — алгебры, σ — локальный набор, $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{B}$ и α — ординал. Тогда*

(1) *$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \le_\alpha^\sigma (\mathfrak{B}, \bar{b})$ равносильно $(\mathfrak{A}, \bar{a}^\perp) \le_\alpha^\sigma (\mathfrak{B}, \bar{b}^\perp)$;*

(2) *если $a_1, \ldots, a_n | 1 \in \mathfrak{A}$, $b_1, \ldots, b_n | 1 \in \mathfrak{B}$, то $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \le_\alpha^\sigma (\mathfrak{B}, \bar{b})$ равносильно тому, что $\hat{a}_i \le_\alpha^\sigma \hat{b}_i$ для $i \in [1, n]$;*

(3) *$\mathfrak{A} \le_{\alpha+1}^\sigma \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда для любых $b_1, \ldots, b_n | 1$ из $\mathfrak{B}$ существуют $a_1, \ldots, a_n | 1$ из $\mathfrak{A}$ такие, что $\hat{b}_i \le_\alpha^\sigma \hat{a}_i$ для $i \in [1, n]$.*

Индекс вычислимой функции — номер любой машины Тьюринга, вычисляющей эту функцию. *Индекс вычислимой алгебры* — это набор, состоящий из одного индекса носителя и индексов операций (по одному для каждой операции).

Последовательность вида $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$, где $\mathfrak{A}_n$ — алгебры, назовем *вычислимой*, если $\mathfrak{A}_n$ вычислимы для всех $n \in \omega$ и индекс $\mathfrak{A}_n$ может быть вычислен по $n \in \omega$. Если α — вычислимый ординал, то вычислимая последовательность $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ является *α-дружественной*, если отношение $(\mathfrak{A}_n, \bar{a}) \leq_\beta (\mathfrak{A}_m, \bar{b})$ на $n, m \in \omega$, наборах $\bar{a}$ из $\mathfrak{A}_n$ и $\bar{b}$ из $\mathfrak{A}_m$, где $|\bar{a}| = |\bar{b}|$, и $\beta < \alpha$ является вычислимо-перечислимым. Точная формулировка вычислимой перечислимости по ординалам $\beta < \alpha$, вообще говоря, требует перехода к обозначениям для вычислимых ординалов, но поскольку ниже будут рассматриваться только конечные α, не будем приводить полного определения.

Алгебру $\mathfrak{A}$ назовем *σ-вычислимой*, если $\mathfrak{A}^\sigma$ — вычислимая модель. Ее индексом считается набор из вычислимого индекса $\mathfrak{A}$ и вычислимых индексов реализаций элементов σ.

Теорема 2 [14]. *Пусть T — стабильный идеальный оператор, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$ — бесконечные вычислимые алгебры, $\mathfrak{B}_0/\mathrm{T}$, $\mathfrak{B}_1/\mathrm{T} \cong \mathfrak{B}(1)$, $\mathrm{T}(\mathfrak{B}_0)$, $\mathrm{T}(\mathfrak{B}_1)$ — вычислимые подмножества в $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$ соответственно. Пусть также $\alpha \geq 1$ — вычислимый ординал, σ — локальный набор, согласованный с T, и выполняются условия:*

(a) $\forall a \in \mathfrak{B}_0 \backslash \mathrm{T}(\mathfrak{B}_0)\ \forall \beta < \alpha\ (\hat{a} \leq^\sigma_\beta \hat{a} \times \mathfrak{B}_0$ *и* $\hat{a} \leq^\sigma_\beta \hat{a} \times \mathfrak{B}_1)$;

(b) $\forall a \in \mathfrak{B}_1 \backslash \mathrm{T}(\mathfrak{B}_1)\ \forall \beta < \alpha\ (\hat{a} \leq^\sigma_\beta \hat{a} \times \mathfrak{B}_1)$;

(c) $\{(\mathfrak{B}_0^n \times \mathfrak{B}_1^m)^\sigma\}_{\langle n,m\rangle\in\omega}$ — *α-дружественное семейство.*

Тогда для любой Δ^0_α-алгебры $\mathfrak{A} \neq 0$ и для любого Δ^0_α-идеала G алгебры $\mathfrak{A}$ найдется такая σ-вычислимая алгебра $\mathfrak{C}$, что $\mathfrak{C}/\mathrm{T} \cong \mathfrak{A}$. При этом найдется изоморфизм $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}/\mathrm{T}$ со свойствами:

(1) *если $a \in \mathfrak{A}\backslash G$ и $f(a) = b/\mathrm{T}(\mathfrak{C})$, то найдутся $z \leq b$, $e \in \mathfrak{B}_0\backslash\mathrm{T}(\mathfrak{B}_0)$ и T-стабильное вложение $g : \hat{e} \to \hat{z}$;*

(2) *если $a \in G$, то существует такой $d \in \mathfrak{C}$, что $f(a) = d/\mathrm{T}(\mathfrak{C})$ и при любом $y \leq d$*

(i) *если $y \notin \mathrm{T}(\mathfrak{C})$, то найдутся $z \leq y$, $e \in B_1\backslash\mathrm{T}(\mathfrak{B}_1)$ и T-стабильное вложение $g : \hat{e} \to \hat{z}$,*

(ii) *если $y \in \mathrm{T}(\mathfrak{C})$, то $\hat{y} \cong \hat{a}_1 \times \cdots \times \hat{a}_n$, где $a_i \in \mathrm{T}(\mathfrak{B}_1)$;*

(3) *если $y \in \mathrm{T}(\mathfrak{C})$, то $\hat{y} \cong \hat{a}_1 \times \cdots \times \hat{a}_n$, где $a_i \in \mathrm{T}(\mathfrak{B}_0)$ или $a_i \in \mathrm{T}(\mathfrak{B}_1)$.*

Теорема 3. *Для любого $n \in \omega$ существует $4n$-вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n, \infty, 0)$, у которой нет сильно вычислимой изоморфной копии.*

Доказательство. Для $n = 0$ пример такой алгебры можно найти в [1]. Поэтому дальше предполагаем, что $n > 0$.

Воспользуемся теоремой 2. Для этого возьмем $\mathrm{T} = \mathrm{E}_n$, $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}((\omega + \eta)^n)$ и обозначим эту алгебру через $\mathfrak{B}$, $\sigma = \Sigma_n$, $\alpha = 1$, $G = \{0\}$. Для $\mathfrak{B}$ возьмем вычислимое представление, полученное из вычислимых нумераций для ω и η с помощью стандартных приемов для построения нумерации прямого произведения порядков, суммы порядков и нумерации алгебры, построенной по линейному порядку. Далее в данной статье, применяя теорему 2, подразумеваем, что используется таким образом полученная нумерация. В качестве алгебры $\mathfrak{A}$ возьмем вычислимую атомную алгебру, у которой нет сильно вычислимого представления, например алгебру, построенную в [1].

E — стабильный идеальный оператор, что доказано в [11]. По лемме 1 получаем, что E_n тоже стабильный идеальный оператор. При этом $\mathrm{E}_n(\mathfrak{B})$ — вычислимое подмножество в $\mathfrak{B}$, так как принадлежность элемента этому идеалу проверяется определением положения концов интервалов, составляющих этот элемент. Заметим также, что $\mathfrak{B}/\mathrm{E}_n \cong \mathfrak{B}(1)$, так как идеалу $\mathrm{E}(\mathfrak{B})$ не принадлежат только элементы, имеющие в своем составе интервал, последняя координата одного из концов которого лежит в линейном порядке ω, а другого — в η.

По лемме 2 имеем, что σ — локальный набор, согласованный с E_n.

Проверим выполнение условий (a) и (b) теоремы 2. Для этого покажем, что для любого $a \notin \mathrm{T}(\mathfrak{B})$ выполняется $\hat{a} \leq_0^\sigma \hat{a} \times \mathfrak{B}$. Это равносильно тому, что $\hat{a}$ и $\hat{a} \times \mathfrak{B}$ неразличимы атомарными предложениями языка $L_{BA} \cup \sigma$. В указанном языке только две константы, поэтому все атомарные предложения эквивалентны одному из выражений $0 = 0$, $0 \neq 0$, $0 = 1$, $\mathrm{At}_0(1)$, $\mathrm{Als}_0(1)$, $\mathrm{Atm}_0(1)$, $\mathrm{E}_1(1)$, $\mathrm{At}_1(1), \ldots, \mathrm{At}_{n-1}(1)$, $\mathrm{Als}_{n-1}(1)$, $\mathrm{Atm}_{n-1}(1)$, $\mathrm{E}_n(1)$; все они, кроме первого, ложны и в $\hat{a}$, и в $\hat{a} \times \mathfrak{B}$.

Осталось проверить условие (c), т. е. что $\{(\mathfrak{B}^n)^\sigma\}_{n\in\omega}$ — 1-дружественное семейство. Пусть $n, m \in \omega$, $\bar{a} \in \mathfrak{B}^n$, $\bar{b} \in \mathfrak{B}^m$, $|\bar{a}| = |\bar{b}|$. По лемме 3(1) $(\mathfrak{B}^n, \bar{a}) \leq_0^\sigma (\mathfrak{B}^m, \bar{b})$ равносильно $(\mathfrak{B}^n, \bar{a}^\perp) \leq_0^\sigma (\mathfrak{B}^m, \bar{b}^\perp)$. Пусть $\bar{a}^\perp = (a_1, \ldots, a_k)$, $\bar{b}^\perp = (b_1, \ldots, b_k)$. По лемме 3(2) $(\mathfrak{B}^n, \bar{a}^\perp) \leq_0^\sigma (\mathfrak{B}^m, \bar{b}^\perp)$ равносильно тому, что $\hat{a}_i \leq_0^\sigma \hat{b}_i$ для каждого $i \in [1, k]$. Условие $\hat{a}_i \leq_0^\sigma \hat{b}_i$ равносильно неразличимости алгебр $\hat{a}_i$ и $\hat{b}_i$ с помощью предложений $0 = 1$, $\mathrm{At}_0(1)$, $\mathrm{Als}_0(1)$, $\mathrm{Atm}_0(1)$, $\mathrm{E}_1(1)$, $\mathrm{At}_1(1), \ldots, \mathrm{At}_{n-1}(1)$, $\mathrm{Als}_{n-1}(1)$, $\mathrm{Atm}_{n-1}(1)$, $\mathrm{E}_n(1)$, что можно проверить, зная, какому из порядков ω или η принадлежит каждая координата концов интервалов, образующих элементы a_i и b_i. В результате получаем, что отношение $(\mathfrak{B}^n, \bar{a}) \leq_0^\sigma (\mathfrak{B}^m, \bar{b})$ на $n, m \in \omega$, $\bar{a} \in \mathfrak{B}^n$, $\bar{b} \in \mathfrak{B}^m$, $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ вычислимо.

Все условия теоремы 2 выполнены, поэтому получаем σ-вычислимую алгебру $\mathfrak{C}$ такую, что $\mathfrak{C}/\mathrm{E}_n \cong \mathfrak{A}$. Ясно, что характеристика $\mathfrak{C}$ равна $(n, \omega, 0)$. Для любой вычислимой алгебры σ-вычислимость равносильна $4n$-вычислимости.

Предположим, что алгебра $\mathfrak{C}$, полученная в результате применения теоремы 2, разрешима. Тогда в некотором вычислимом представлении $\mathfrak{C}' \cong \mathfrak{C}$ предикаты $\mathrm{At}_n(\mathfrak{C}')$ и $\mathrm{E}_n(\mathfrak{C}')$ вычислимы. Значит, $\mathfrak{C}'/\mathrm{E}_n(\mathfrak{C}')$ изоморфна вычислимой атомной алгебре с вычислимым множеством атомов. Получаем противоречие с тем, что $\mathfrak{A}$ — неразрешимая алгебра. Теорема доказана.

Следствие 1. (1) *Для любого $n \geq 1$ и для любого $k < n$ существует вычислимая алгебра $\mathfrak{A}$ элементарной характеристики $(n, 0, 1)$ с вычислимыми предикатами из множества $\Sigma_n \backslash \{\mathrm{At}_k\}$, не имеющая сильно вычислимого представления.*

(2) *Для любого $n \geq 1$ и для любого $k < n$ существует вычислимая алгебра $\mathfrak{A}$ элементарной характеристики $(n, 1, 0)$ с вычислимыми предикатами из множества $\Sigma_n \backslash \{\mathrm{At}_k\}$, не имеющая сильно вычислимого представления.*

(3) *Для любого $n \in \omega$ и для любого $k \leq n$ существует вычислимая алгебра $\mathfrak{A}$ элементарной характеристики $(n, \infty, 0)$ с вычислимыми предикатами из множества $(\Sigma_n \cup \{\mathrm{At}_n\}) \backslash \{\mathrm{At}_k\}$, не имеющая сильно вычислимого представления.*

Доказательство. (1) Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторая сильно вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n, 0, 1)$. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}$, определенную следующим образом: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — неразрешимая алгебра из теоремы 3 характеристики $(k, \infty, 0)$. Алгебра $\mathfrak{A}$ имеет элементарную характеристику $(n, 0, 1)$ и неразрешима.

Для (2) и (3) доказательство аналогично п. (1). В качестве $\mathfrak{B}$ надо взять сильно вычислимую алгебру элементарной характеристики $(n, 1, 0)$ или $(n, \infty, 0)$. Следствие доказано.

3. Неразрешимая булева алгебра характеристики $(n, 0, 1)$ с вычислимыми предикатами из $\Sigma_{n+1} \backslash \{\mathrm{Als}_{n-1}, \mathrm{Atm}_{n-1}\}$

Через $\mathrm{Finat}(\mathfrak{A})$ обозначим идеал алгебры $\mathfrak{A}$, состоящий из конечных сумм атомов и безатомного элемента, т. е. $\mathrm{Finat} = \mathrm{F} + \mathrm{Als}$. Определим идеалы $\mathrm{Finat}_0(\mathfrak{A}) = \{0\}$, а при $n > 1$ $\mathrm{Finat}_n(\mathfrak{A}) = \mathrm{Finat}_{n-1} \circ \mathrm{Finat}(\mathfrak{A})$.

Назовем алгебру $\mathfrak{A}$ *чистой* или 1-*чистой*, если в $\mathfrak{A}$ под каждым атомным элементом лежит лишь конечное число атомов. Будем также называть алгебру $\mathfrak{A}$ n-*чистой* при $n > 1$, если $\mathfrak{A}$ является чистой и для всех $i \in [1, n-1]$ алгебра $\mathfrak{A}/\mathrm{Finat}_i$ является чистой.

Лемма 4. *Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — чистые алгебры с бесконечным числом атомов, то $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}/\mathrm{Finat} \cong \mathfrak{B}/\mathrm{Finat}$.*

Доказательство. Лемма является следствием предложения 1 из [7] для случая $\mathrm{Atm}(\mathfrak{A}) = \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ и $\mathrm{Atm}(\mathfrak{B}) = \mathrm{F}(\mathfrak{B})$. В этом случае имеем $\mathrm{Atm}/\mathrm{Finat} \cong \mathfrak{B}(0)$.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — n-чистые алгебры для некоторого $n > 0$, $\mathfrak{A}/\mathrm{Finat}_n$ и $\mathfrak{B}/\mathrm{Finat}_n$ — ненулевые алгебры и σ_1 — некоторый конечный набор предикатных символов, соответствующих либо некоторому идеальному оператору, либо множеству атомов At_0, либо множеству вида At_R для некоторого ненулевого идеального оператора R, при этом предикат R тоже есть в σ_1. Пусть $\sigma = \Sigma_n \cup \sigma_1'$, где σ_1' получен из σ_1 следующим образом: для каждого идеального оператора T из σ_1 добавляем в σ_1' идеальный оператор $\mathrm{E}_n \circ \mathrm{T}$, для каждого предиката вида $\mathrm{At}_\mathrm{R} \in \sigma_1$ добавляем в σ_1' предикат $\mathrm{At}_{\mathrm{E}_n \circ \mathrm{R}}$ и, наконец, если $\mathrm{At}_0 \in \sigma_1$, то добавляем в σ_1' предикат At_n.*

Тогда σ_1 и σ — локальные наборы и для всех $k \in \omega$ выполняется $\mathfrak{A} \leq_k^\sigma \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A}/\mathrm{E}_n \leq_k^{\sigma_1} \mathfrak{B}/\mathrm{E}_n$.

Доказательство. Наборы σ и σ_1 локальны, что показано в ходе доказательства леммы 2.

Докажем вторую часть утверждения леммы индукцией по k. Пусть $k = 0$. Для произвольных алгебр $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ и набора предикатов δ отношение $\mathfrak{C}_1 \leq_0^\delta \mathfrak{C}_2$ равносильно тому, что $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ неразличимы атомарными предложениями языка $L_{BA} \cup \delta$. Заметим, что для n-чистых алгебр $\mathrm{E}_i = \mathrm{Finat}_i$ для всех $i \in [1, n]$. Поэтому единица алгебры $\mathfrak{A}$ принадлежит множеству $\mathrm{At}_{\mathrm{E}_n \circ \mathrm{R}}$ тогда и только тогда, когда единица алгебры $\mathfrak{A}/\mathrm{Finat}_n$ принадлежит множеству At_R. Аналогичные утверждения справедливы и для идеалов T и $\mathrm{E}_n \circ \mathrm{T}$, At_0 и At_n. По условию $\mathfrak{A}/\mathrm{Finat}_n$ и $\mathfrak{B}/\mathrm{Finat}_n$ — ненулевые алгебры, следовательно, их единицы не принадлежат ни одному предикату из Σ_n. Тем самым $\mathfrak{A} \leq_0^\sigma \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A}/\mathrm{Finat}_n \leq_0^{\sigma_1} \mathfrak{B}/\mathrm{Finat}_n$.

Пусть лемма доказана для $k-1$. Докажем, что $\mathfrak{A} \leq_k^\sigma \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}/\mathrm{E}_n \leq_k^{\sigma_1} \mathfrak{B}/\mathrm{E}_n$. Пусть ненулевые элементы $d_1, \ldots, d_m$ делят единицу алгебры $\mathfrak{B}/\mathrm{E}_n$. Тогда существуют элементы $b_1, \ldots, b_m$, делящие единицу алгебры $\mathfrak{B}$, со свойством $b_i/\mathrm{E}_n = d_i$ для $i \in [1, m]$. По лемме 3 существует набор $a_1, \ldots, a_m$, делящий единицу в алгебре $\mathfrak{A}$, такой, что для всех $i \in [1, m]$ выполняется $\hat{b}_i \leq_{k-1}^\sigma \hat{a}_i$. Заметим, что если h лежит в n-чистой алгебре, то алгебра $\hat{h}$ также является n-чистой. Отсюда по предположению индукции получаем, что для всех $i \in [1, m]$ выполняется $\hat{d}_i \leq_{k-1}^{\sigma_1} \widehat{a_i/\mathrm{E}_n}$. По лемме 3 получаем, что $\mathfrak{A}/\mathrm{E}_n \leq_k^{\sigma_1} \mathfrak{B}/\mathrm{E}_n$.

Теперь докажем, что $\mathfrak{A} \leq_k^\sigma \mathfrak{B} \Leftarrow \mathfrak{A}/\mathrm{E}_n \leq_k^{\sigma_1} \mathfrak{B}/\mathrm{E}_n$. Рассмотрим ненулевые элементы $b_1, \ldots, b_m | 1$ в $\mathfrak{B}$. Допустим, что $b_1 \in \mathrm{E}_n(\mathfrak{B})$. Тогда есть некоторое

$p \in [1, n]$ такое, что $b_1 \in \mathrm{E}_p \backslash \mathrm{E}_{p-1}$. Это означает, что b_1 является суммой конечного числа элементов из At_{p-1} и элемента из Als_{p-1}. Напомним, что $\mathrm{E}_0 = \{0\}$. Отделим от единицы алгебры $\mathfrak{A}$ такое количество элементов из $\mathrm{At}_{p-1}(\mathfrak{A})$, которое находится под b_1, и элемент из $\mathrm{Als}_{p-1} \backslash \mathrm{E}_{p-1}$, если такой элемент есть в $\hat{b}_1$. Полученный элемент обозначим через a_1. Необходимые элементы можно отделить от единицы алгебры $\mathfrak{A}$ в силу того, что $\mathfrak{A}/\mathrm{E}_{p-1}$ неразложима (т. е. не совпадает со своим идеалом E), а значит, в ней есть бесконечное количество атомов и ненулевой безатомный элемент. Заметим, что элементы a_1 и b_1 являются $(p-1)$-чистыми, а $\widehat{a_1/\mathrm{E}_{p-1}} \cong \widehat{b_1/\mathrm{E}_{p-1}}$, так как изоморфны их конечные атомные части и безатомные части соответственно. Применяя $p-1$ раз лемму 4, получаем $\hat{a}_1 \cong \hat{b}_1$, а значит, $\hat{b}_1 \leq^{\sigma}_{k-1} \hat{a}_1$. Кроме того, применяя n раз лемму 4, получим, что $\widehat{1_{\mathfrak{A}} - a_1} \cong \mathfrak{A}$ и $\widehat{1_{\mathfrak{B}} - b_1} \cong \mathfrak{B}$. Это означает, что для всех $b_i \in \mathrm{E}_n(\mathfrak{B})$ мы можем найти пару в $\mathfrak{A}$ с такими же свойствами, как a_1 для b_1. Удалив все эти элементы из $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, получим алгебры, изоморфные $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно. Поэтому осталось рассмотреть случай, когда среди $b_1, \ldots, b_m$ нет элементов из $\mathrm{E}_n(\mathfrak{B})$.

Элементы $b_1/\mathrm{E}_n, \ldots, b_m/\mathrm{E}_n$ делят единицу в $\mathfrak{B}/\mathrm{E}_n$. По лемме 3 существуют элементы $c_1, \ldots, c_m|1$ в $\mathfrak{A}/\mathrm{E}_n$ со свойством $\hat{c}_i \leq^{\sigma_1}_{k-1} \widehat{b_i/\mathrm{E}_n}$. Можно найти элементы $a_1, \ldots, a_m$, разбивающие единицу алгебры $\mathfrak{A}$, такие, что $a_i/\mathrm{E}_n = c_i$ для всех $i \in [1, m]$. Поскольку элементы a_i и b_i являются n-чистыми, по предположению индукции имеем $\hat{b}_i \leq^{\sigma}_{k-1} \hat{a}_i$, откуда по лемме 3 получаем $\mathfrak{A} \leq^{\sigma}_{k} \mathfrak{B}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathrm{T}_1 = (\mathrm{Atm} \to \mathrm{F}) + \mathrm{Atm}$, где $\mathrm{Atm} \to \mathrm{F} = \{x \mid \forall z \leq x (z \in \mathrm{Atm} \Rightarrow z \in \mathrm{F})\}$.

Докажем еще одну теорему, которая обобщает теорему 3 из [12] на случай характеристик $(n, 0, 1)$, где $n \geq 1$. По сути, она является ее следствием: мы лишь немного усложним конструкцию за счет одного дополнительного приема.

Теорема 4. *Для любого $n > 0$ существует вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n, 0, 1)$ с вычислимыми предикатами из множества $\sigma = \Sigma_n \backslash \{\mathrm{Als}_{n-1}, \mathrm{Atm}_{n-1}\}$, не имеющая сильно вычислимого представления.*

Доказательство. Для $n = 1$ существование алгебры с требуемыми свойствами доказано в теореме 3 из [12]. Поэтому далее предполагаем, что $n > 1$.

Воспользуемся теоремой 2. Для этого возьмем $\mathrm{T} = \mathrm{E}_{n-1} \circ \mathrm{T}_1$, где $\mathrm{T}_1 = (\mathrm{Atm} \to \mathrm{F}) + \mathrm{Atm}$, $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}((\omega+\eta)^{n-1} \times (1 + \omega \times \eta + (2+\eta) \times \eta))$, обозначим эту алгебру через $\mathfrak{B}$, $\sigma = \Sigma_n \backslash \{\mathrm{Als}_{n-1}, \mathrm{Atm}_{n-1}\}$, $\alpha = 5$, $G = \{0\}$. В качестве алгебры $\mathfrak{A}$ возьмем Δ^0_5-вычислимую алгебру, у которой нет Δ^0_4-вычислимого представления.

E и T_1 — стабильные идеальные операторы, что доказано в лемме 4 из [11] и в лемме 1 из [12] соответственно. Композиция стабильных операторов является стабильным оператором по лемме 1, поэтому T тоже стабильный идеальный оператор. В силу выбранной нумерации для алгебры $\mathrm{T}(\mathfrak{B})$ — вычислимое подмножество в $\mathfrak{B}$. Заметим также, что $\mathfrak{B}/\mathrm{T} \cong (\mathfrak{B}/\mathrm{E}_{n-1})/\mathrm{T}_1 \cong \mathfrak{B}(1)$, так как $\mathfrak{B}/\mathrm{E}_{n-1}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{B}^{\star} = \mathfrak{B}(1 + \omega \times \eta + (2 + \eta) \times \eta)$, рассмотренной в теореме 3 из [12], где было показано, что $\mathfrak{B}^{\star}/\mathrm{T}_1 \cong \mathfrak{B}(1)$. По лемме 2 σ — локальный набор, согласованный с T.

Проверим выполнение условий (a) и (b) теоремы 2. Воспользуемся леммой 5. Алгебра $\mathfrak{B}$ является чистой, кроме того, для всех $i \in [0, n-1]$ выполняется $\mathfrak{B}/\mathrm{Finat}_i \cong \mathfrak{B}((\omega+\eta)^{n-i-1} \times (1+\omega\times\eta+(2+\eta)\times\eta)$. Следовательно, $\mathfrak{B}$ является

$(n-1)$-чистой, что справедливо и для алгебр вида $\hat{a}$, где $a \in \mathfrak{B}$ или $a \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$. В ходе доказательства теоремы 3 из [12] было показано, что $\hat{a}' \leq_4^{\sigma_1} \hat{a}' \times \mathfrak{B}'$ для любого $a' \notin \mathrm{T}_1(\mathfrak{B}')$, где $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}(1 + \omega \times \eta + (2 + \eta) \times \eta)$ — алгебра, построенная в теореме 3 из [12], а $\sigma_1 = \{\mathrm{At}_0, \mathrm{E}_1\}$. Если $a \notin \mathrm{T}(\mathfrak{B})$, то $a/\mathrm{E}_{n-1}(\mathfrak{B}) \notin \mathrm{T}_1(\mathfrak{B}/\mathrm{E}_{n-1}(\mathfrak{B}))$, следовательно, $\widehat{a/\mathrm{E}_{n-1}}(\mathfrak{B}) \leq_4^{\sigma_1} \widehat{a/\mathrm{E}_{n-1}}(\mathfrak{B}) \times \mathfrak{B}/\mathrm{E}_{n-1}(\mathfrak{B})$ и по лемме 5 $\hat{a} \leq_4^{\sigma} \hat{a} \times \mathfrak{B}$.

Осталось проверить условие (c), т. е. что $\{(\mathfrak{B}^n)^\sigma\}_{n\in\omega}$ — 5-дружественное семейство. В лемме 8 из [12] показано, что достаточно описать отношение $\hat{x} \leq_\alpha^\sigma \hat{y}$ для $x \in \mathfrak{B}^n, y \in \mathfrak{B}^m$ и $\alpha < 5$. Отношение $\hat{x} \leq_0^\sigma \hat{y}$ равносильно тому, что для любого предиката $I \in \sigma$ выполняется эквивалентность $I(x) \Leftrightarrow I(y)$. Получаем, что отношение $\leq_0^\sigma$ вычислимо, так как принадлежность элемента предикатам из σ можно алгоритмично определить по концам полуинтервалов, образующих этот элемент.

Отношение $\hat{x} \leq_\alpha^\sigma \hat{y}$ для $\alpha \in [1, 4]$ равносильно выполнению одного из двух условий:

(1) $ch_1(x) = ch_1(y) \geq n-1$ и $\widehat{x/\mathrm{E}_{n-1}} \leq_\alpha^{\sigma_1} \widehat{y/\mathrm{E}_{n-1}}$;

(2) $ch_1(x) < n-1$ и $ch(x) = ch(y)$.

Условие (1) получается из леммы 5. Необходимость условия (2) можно получить для $\alpha = 1$ из леммы 3 и замечаний, которые мы сделали по поводу отношения $\leq_0^\sigma$. Для $\alpha > 1$ отношение $\leq_\alpha^\sigma$ влечет отношение $\leq_1^\sigma$, поэтому условие (2) также необходимо для выполнения $\hat{x} \leq_\alpha^\sigma \hat{y}$. Достаточность следует из того, что для $x \in \mathfrak{B}^n, y \in \mathfrak{B}^m$ это условие эквивалентно изоморфизму алгебр $\hat{x}$ и $\hat{y}$. Условие (2) можно алгоритмично проверить по концам полуинтервалов, образующих этот элемент. Вычислимость условия (1) следует из леммы 8 в [12].

Все условия теоремы 2 выполнены, поэтому получаем σ-вычислимую алгебру $\mathfrak{C}$ такую, что $\mathfrak{C}/\mathrm{T} \cong \mathfrak{A}$. Из пп. (1)–(3) теоремы 2 так же, как при доказательстве теоремы 3 из [12], получаем, что алгебра $\mathfrak{C}$ имеет элементарную характеристику $(n, 0, 1)$.

Предположим, что алгебра $\mathfrak{C}$, полученная в результате применения теоремы 2, разрешима. Тогда в некотором вычислимом представлении $\mathfrak{C}' \cong \mathfrak{C}$ предикаты $\mathrm{E}_{n-1}(\mathfrak{C}')$, $\mathrm{At}_{n-1}(\mathfrak{C}')$ и $\mathrm{Atm}_{n-1}(\mathfrak{C}')$ вычислимы. Легко показать, что идеал T в этом представлении является Δ_4^0-вычислимым, а $\mathfrak{C}'/\mathrm{T} \cong \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ не принадлежит классу Δ_4^0; противоречие. Теорема доказана.

Следствие 2. (1) *Для любого $n \geq 1$ и для любого $k < n$ существует вычислимая алгебра $\mathfrak{A}$ элементарной характеристики $(n, 0, 1)$ с вычислимыми предикатами из множества $\Sigma_n \backslash \{\mathrm{Als}_k, \mathrm{Atm}_k\}$, не имеющая сильно вычислимого представления.*

(2) *Для любого $n \geq 2$ и для любого $k < n-1$ существует вычислимая алгебра $\mathfrak{A}$ элементарной характеристики $(n, 1, 0)$ с вычислимыми предикатами из множества $\Sigma_n \backslash \{\mathrm{Als}_k, \mathrm{Atm}_k\}$, не имеющая сильно вычислимого представления.*

(3) *Для любого $n \geq 2$ и для любого $k < n-1$ существует вычислимая алгебра $\mathfrak{A}$ элементарной характеристики $(n, \infty, 0)$ с вычислимыми предикатами из множества $(\Sigma_n \cup \{\mathrm{At}_n\}) \backslash \{\mathrm{Als}_k, \mathrm{Atm}_k\}$, не имеющая сильно вычислимого представления.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторая сильно вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n, 0, 1)$. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}$, определенную следующим образом: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — алгебра из теоремы 4 характеристики $(k+1, 0, 1)$. Алгебра $\mathfrak{A}$ имеет элементарную характеристику $(n, 0, 1)$ и неразрешима. Тем самым доказан п. 1 следствия. Для доказательства пп. 2 и 3 в качестве $\mathfrak{B}$ надо взять сильно вычислимые алгебры элементарных характеристик $(n, 1, 0)$ и $(n, \infty, 0)$ соответственно. Следствие доказано.

4. Неразрешимая булева алгебра характеристики $(n, \infty, 0)$ с вычислимыми предикатами из $\Sigma_{n+1} \backslash \{\mathrm{Als}_{n-1}, \mathrm{Atm}_{n-1}\}$

Для доказательства следующего результата нам понадобится описание отношений $\leq_\alpha^\sigma$ для $\sigma = \{\mathrm{At}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{At}_1\}$ и $\alpha < 5$. При $\alpha < 3$ опишем указанное отношение в лемме 8 на произвольных алгебрах, фактор которых по идеалу Ершова — Тарского является атомной алгеброй. При $\alpha = 3$ и $\alpha = 4$ в лемме 9 получим описание только для алгебр нужного нам вида.

Лемма 6 [14]. *Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — алгебры. Тогда*

(1) $\mathfrak{A} \leq_0^{\{\mathrm{At}_0\}} \mathfrak{B}$ *равносильно выполнению эквивалентностей* $(\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}(0) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(0)), (\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}(1) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(1))$;

(2) *если* $\alpha \geq 1$, *то* $\mathfrak{A} \leq_\alpha^{\{\mathrm{At}_0\}} \mathfrak{B}$ *равносильно* $\mathfrak{A} \leq_{\alpha+1} \mathfrak{B}$.

Лемма 7 [11]. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебры. Отношения $\leq_0, \ldots, \leq_4$ на алгебрах могут быть описаны следующим образом:*

(0) $\mathfrak{A} \leq_0 \mathfrak{B}$ *равносильно эквивалентности* $(\mathfrak{A} = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{B} = 0)$;

(1) $\mathfrak{A} \leq_1 \mathfrak{B}$ *равносильно* $|\mathfrak{A}| \geq |\mathfrak{B}|$ *и* $(\mathfrak{A} = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{B} = 0)$;

(2) $\mathfrak{A} \leq_2 \mathfrak{B}$ *равносильно* $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$ *и* $|\mathrm{At}(\mathfrak{A})| \geq |\mathrm{At}(\mathfrak{B})|$;

(3) $\mathfrak{A} \leq_3 \mathfrak{B}$ *равносильно* $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$, $|\mathrm{At}(\mathfrak{A})| = |\mathrm{At}(\mathfrak{B})|$, $|\mathfrak{A}/F| \geq |\mathfrak{B}/F|$ *и* ($\mathfrak{A}$ *атомная* $\Rightarrow \mathfrak{B}$ *атомная*);

(4) $\mathfrak{A} \leq_4 \mathfrak{B}$ *равносильно выполнению следующего списка условий:*

(a) $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$,

(b) $|\mathrm{At}(\mathfrak{A})| = |\mathrm{At}(\mathfrak{B})|$,

(c) $|\mathfrak{A}/F| = |\mathfrak{B}/F|$,

(d) $\mathfrak{A}$ *атомная* $\Leftrightarrow \mathfrak{B}$ *атомная,*

(e) $|\mathrm{At}(\mathfrak{A}/F)| \geq |\mathrm{At}(\mathfrak{B}/F)|$,

(f) $|\mathfrak{A}/\mathrm{Finat}| \geq |\mathfrak{B}/\mathrm{Finat}|$,

(g) $\theta(\mathfrak{A}) \geq \theta(\mathfrak{B})$, *где* $\theta(\mathfrak{A}) = \sup\{n \in \omega \mid$ *существуют атомные элементы* $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A} \backslash F(\mathfrak{A})$ *такие, что* $a_i \cdot a_j = 0$ *при* $i \neq j\}$,

(h) $\mathfrak{B}/\mathrm{E} = 0 \Rightarrow \mathfrak{A}/\mathrm{E} = 0$,

(i) $(\mathfrak{B}/\mathrm{E} = 0$ *и* $|\mathfrak{B}/\mathrm{Finat}| < \infty) \Rightarrow |\mathfrak{A}/\mathrm{Finat}| = |\mathfrak{B}/\mathrm{Finat}|$.

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — алгебры такие, что $\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1$ и $\mathfrak{B}/\mathrm{E}_1$ — атомные алгебры, и $\sigma = \{\mathrm{At}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{At}_1\}$. Тогда*

(0) $\mathfrak{A} \leq_0^\sigma \mathfrak{B}$ *равносильно выполнению эквивалентностей:*

(0.1) $(\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}(0) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(0))$,

(0.2) $(\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}(1) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(1))$,

(0.3) $(1_\mathfrak{A} \in \mathrm{E}_1 \Leftrightarrow 1_\mathfrak{B} \in \mathrm{E}_1)$,

(0.4) $(1_\mathfrak{A} \in \mathrm{At}_1 \Leftrightarrow 1_\mathfrak{B} \in \mathrm{At}_1)$;

(1) $\mathfrak{A} \leq_1^\sigma \mathfrak{B}$ *равносильно выполнению следующего списка условий:*

(1.1) $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$,

(1.2) $|\mathrm{At}_0(\mathfrak{A})| \geq |\mathrm{At}_0(\mathfrak{B})|$,

(1.3) $|\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1| = |\mathfrak{B}/\mathrm{E}_1|$;

(2) $\mathfrak{A} \leq_2^\sigma \mathfrak{B}$ *равносильно выполнению следующего списка условий:*

(2.1) $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$,

(2.2) $|\mathrm{At}_0(\mathfrak{A})| = |\mathrm{At}_0(\mathfrak{B})|$,

(2.3) $|\mathfrak{A}/F| \geq |\mathfrak{B}/F|$,

(2.4) $\mathfrak{A}$ — *атомная* $\Rightarrow \mathfrak{B}$ *атомная,*
(2.5) $|\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1| = |\mathfrak{B}/\mathrm{E}_1|$,
(2.6) $|\mathfrak{A}/(\mathrm{E}_1 \circ F)| \geq |\mathfrak{B}/(\mathrm{E}_1 \circ F)|$.

Доказательство. Основным инструментом доказательства будет служить лемма 3.

Заметим, что для любого m выполнение $\mathfrak{A} \leq_m^\sigma \mathfrak{B}$ влечет $\mathfrak{A} \leq_m^{\{\mathrm{At}_0\}} \mathfrak{B}$. Поэтому по леммам 6 и 7 получаем необходимость условий (1.1), (1.2) и (2.1)–(2.4).

(0) Достаточно отметить, что отношение $\mathfrak{A} \leq_0^\sigma \mathfrak{B}$ равносильно тому, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ неразличимы бескванторными предложениями $L_{BA} \cup \sigma$.

(1) Необходимость условия (1.3). Если $|\mathfrak{B}/\mathrm{E}_1| = 2^k < \omega$, то единицу алгебры $\mathfrak{B}/\mathrm{E}_1$ можно разделить на k атомов, а значит, для выполнения условия (0.4) на этом разбиении необходимо, чтобы единица алгебры $\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1$ тоже разбивалась на k атомов.

Если же $|\mathfrak{B}/\mathrm{E}_1| = \omega$, то для любого k от единицы в $\mathfrak{B}$ можно отделить k ненулевых элементов, а значит, для удовлетворения условия (0.3) для соответствующих пар это должно быть возможно и для $\mathfrak{A}$, поэтому необходимо, чтобы $|\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1| = \omega$.

Достаточность списка условий (1.1)–(1.3). Пусть $b_1, \dots, b_n$ — разбиение единицы в алгебре $\mathfrak{B}$. Покажем, что можно найти $a_1, \dots, a_n$ — разбиение единицы в алгебре $\mathfrak{A}$ такое, что для всех $i \in [1, n]$ выполняется $\hat{b}_i \leq_0^\sigma \hat{a}_i$. Все элементы набора $b_1, \dots, b_n$ делятся на атомы $b_1^{\mathrm{At}_0}, \dots, b_k^{\mathrm{At}_0}$, элементы $b_1^{\mathrm{At}_1}, \dots, b_m^{\mathrm{At}_1} \in \mathrm{At}_1(\mathfrak{B})$, элементы $b_1^*, \dots, b_l^*$ такие, что $|\hat{b}_i^*/\mathrm{E}_1| \geq 2$, и все остальные элементы $b_1', \dots, b_p'$. В последней категории лежат разложимые элементы, которые не являются атомами.

Допустим, что $m + l \neq 0$. Благодаря условию (1.3) единицу алгебры $\mathfrak{A}$ можно разделить на элементы $a_1^{\mathrm{At}_1}, \dots, a_m^{\mathrm{At}_1}$, $a_1^*, \dots, a_l^*$ таким образом, что для всех $i \in [1, m]$ выполняется $\left|\hat{a}_i^{\mathrm{At}_1}/\mathrm{E}_1\right| = \left|\hat{b}_i^{\mathrm{At}_1}/\mathrm{E}_1\right|$ и для всех $i \in [1, l]$ выполняется $|\hat{a}_i^*/\mathrm{E}_1| \geq 2$. Элемент $a_1^{\mathrm{At}_1}$ неразложим, поэтому содержит бесконечно много атомов. Отделим от $a_1^{\mathrm{At}_1}$ для каждого из элементов $a_1^{\mathrm{At}_0}, \dots, a_k^{\mathrm{At}_0}$ по одному атому и для каждого из элементов $a_1', \dots, a_p'$ по два атома. Несложно видеть, что полученное разбиение единицы алгебры $\mathfrak{A}$ удовлетворяет требованиям (0.1)–(0.3).

Если же $m + l = 0$, то в силу (1.2) в $\mathfrak{A}$ найдутся k атомов $a_1^{\mathrm{At}_0}, \dots, a_k^{\mathrm{At}_0}$, а оставшуюся часть можно будет поделить на p частей, не являющихся атомами, в силу (1.1).

(2) Необходимость условия (2.5) следует из (1.3). Условие (2.6) необходимо для того, чтобы для всех элементов алгебры $\mathfrak{B}$ со свойством $|\hat{b}/\mathrm{E}_1| = \omega$ нашелся элемент из $\mathfrak{A}$ с аналогичным свойством (для удовлетворения условия (1.3)).

Покажем достаточность требований (2.1)–(2.6). Пусть $b_1, \dots, b_n$ — разбиение единицы в алгебре $\mathfrak{B}$. Построим $a_1, \dots, a_n$ — разбиение единицы в алгебре $\mathfrak{A}$ такое, что для всех $i \in [1, n]$ выполняется $\hat{b}_i \leq_1^\sigma \hat{a}_i$. Без ограничения общности можно считать, что для некоторого $k \in [0, n]$ элементы $b_1, \dots, b_k$ неразложимые, а элементы $b_{k+1}, \dots, b_n$ разложимые.

Условия (2.1)–(2.4) означают, что $\mathfrak{A} \leq_2^{\{\mathrm{At}_0\}} \mathfrak{B}$, а значит, существуют элементы $a_1', \dots, a_n' | 1$ в $\mathfrak{A}$ со свойством $\hat{b}_i \leq_1^{\{\mathrm{At}_0\}} \hat{a}_i'$, что равносильно удовлетворению условий (1.1) и (1.2) для алгебр $\hat{b}_i$ и $\hat{a}_i'$. Заметим, что если $k = 0$, то разбиение $a_1', \dots, a_n'$ искомое. Пусть далее $k \neq 0$. Тогда на основании условий (2.5) и (2.6) существует разбиение единицы $a_1'', \dots, a_k''$ алгебры $\mathfrak{A}$ со свойством $|\hat{a}_i''/\mathrm{E}_1| = |\hat{b}_i/\mathrm{E}_1|$.

Для всех $i \in [k+1, n]$ положим $a_i = a'_i$, если a'_i разложимый, в противном случае положим a_i равным ненулевому безатомному элементу, лежащему под a'_i. Для всех $i \in [1, k]$ положим $a_i = a''_i - (a_{k+1} + \dots + a_n)$. Нетрудно видеть, что полученный набор $a_1, \dots, a_n$ искомый. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть* $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(1 + (\omega + \eta) \times \omega \times \eta + \omega \times \eta)$, $\sigma = \{\mathrm{At}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{At}_1\}$, $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{C}$ *— алгебры, имеющие вид* $\hat{a}$ *и* $\hat{c}$ *соответственно для некоторых элементов* $a \in \mathfrak{B}^k$ *и* $c \in \mathfrak{B}^m$. *Тогда отношения* $\leq_3^\sigma$ *и* $\leq_4^\sigma$ *на* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{C}$ *могут быть описаны следующим образом.*

(3) $\mathfrak{A} \leq_3^\sigma \mathfrak{C}$ *равносильно выполнению следующего списка условий:*

(3.1) $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{C}|$,

(3.2) $|\operatorname{At}(\mathfrak{A})| = |\operatorname{At}(\mathfrak{C})|$,

(3.3) $\mathfrak{A}$ *атомная* $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{C}$ *атомная,*

(3.4) *если в* $\mathfrak{C}$ *есть бесконечный атомный элемент, то и в* $\mathfrak{A}$ *есть бесконечный атомный элемент,*

(3.5) $|\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1| = |\mathfrak{C}/\mathrm{E}_1|$.

(4) $\mathfrak{A} \leq_4^\sigma \mathfrak{C}$ *равносильно выполнению условий* (3.1)–(3.3), (3.5), *а также следующих двух условий:*

(4.4) *в* $\mathfrak{C}$ *есть бесконечный атомный элемент равносильно тому, что в* $\mathfrak{A}$ *есть бесконечный атомный элемент,*

(4.5) $1_\mathfrak{C} \in \mathrm{T}_1 \Rightarrow 1_\mathfrak{A} \in \mathrm{T}_1$.

Доказательство. (3) Отношение $\leq_3^\sigma$ влечет отношение $\leq_2^\sigma$, поэтому по лемме 8 условие (3.5) является необходимым. Условия (3.1)–(3.4) для алгебр, рассматриваемых в данной лемме, при $|\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1| = |\mathfrak{C}/\mathrm{E}_1|$ соответствуют списку условий для отношения $\leq_4$ из леммы 7, проверка этого факта является несложным упражнением. Значит, по лемме 6 условия (3.1)–(3.4) являются необходимыми для отношения $\leq_3^\sigma$.

Достаточность доказываем традиционно по лемме 3. Пусть $c_1, \dots, c_n$ — разбиение единицы в алгебре $\mathfrak{C}$. Построим $a_1, \dots, a_n$ — разбиение единицы в алгебре $\mathfrak{A}$ такое, что для всех $i \in [1, n]$ выполняется $\hat{c}_i \leq_2^\sigma \hat{a}_i$. Можно считать, что c_i при $i \leq k$ — атомный или безатомный элемент, а c_i при $i \in [k+1, n]$ неразложимы. Используя условие $\mathfrak{A} \leq_4 \mathfrak{C}$, находим набор $a_1, \dots, a_k, a'_{k+1}, \dots, a'_n|1$ в $\mathfrak{A}$ такой, что $\hat{c}_i \leq_3 \hat{a}_i$ для $i \leq k$ и $\hat{c}_i \leq_3 \hat{a}'_i$ для $i \in [k+1, n]$. В силу того, что c_i при $i \leq k$ — атомный или безатомный элемент, а также по леммам 7 и 8 получаем, что для всех $i \leq k$ выполняется $\hat{c}_i \leq_2^\sigma \hat{a}_i$. Если $|\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1| = |\mathfrak{C}/\mathrm{E}_1| = 1$, то $k = n$ и разбиение с требуемыми свойствами найдено. Теперь рассмотрим случай, когда $|\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1| = |\mathfrak{C}/\mathrm{E}_1| > 1$. Заметим, что элементы $a_1, \dots, a_k$ разложимые, поэтому $|(\widehat{a'_{k+1} + \dots + a'_n})/\mathrm{E}_1| = |\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1| = |\mathfrak{C}/\mathrm{E}_1|$. Тем самым элемент $a'_{k+1} + \dots + a'_n$ можно разделить на $a_{k+1}, \dots, a_n$ таким образом, что $|\hat{a}_i/\mathrm{E}_1| = |\hat{c}_i/\mathrm{E}_1|$ для всех $i \in [k+1, n]$. В случае $|\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1| = \omega$ это осуществимо в силу того, что $\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1 \cong \mathfrak{B}(\omega \times \eta)$. Условие (2.6) для пар (a_i, c_i) будет выполняться благодаря тому, что алгебры $\mathfrak{A}/(\mathrm{E}_1 \circ \mathrm{F})$ и $\mathfrak{C}/(\mathrm{E}_1 \circ \mathrm{F})$ безатомные.

(4) Отношение $\mathfrak{A} \leq_4^\sigma \mathfrak{C}$ влечет $\mathfrak{A} \leq_3^\sigma \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C} \leq_4^\sigma \mathfrak{A}$, поэтому условия (3.1)–(3.3), (4.4) и (3.5) являются необходимыми. Пусть теперь $\mathfrak{A} \leq_4^\sigma \mathfrak{C}$ и $1_\mathfrak{C} \in \mathrm{T}_1$. В этом случае существуют $c_1, c_2|1$ в $\mathfrak{C}$ такие, что $c_1 \in \mathrm{Atm} \to \mathrm{F}$ и $c_2 \in \mathrm{Atm}$, и существуют $a_1, a_2|1$ в $\mathfrak{A}$ со свойством $\hat{c}_i \leq_3^\sigma \hat{a}_i$. Из условия (3.3) получаем, что a_2 — атомный элемент, а из условия (3.4) — что $a_1 \in \mathrm{Atm} \to \mathrm{F}$, значит, $1_\mathfrak{A} \in \mathrm{T}_1$. Следовательно, условие (4.5) необходимо.

Покажем достаточность списка условий. Если $|\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1| = |\mathfrak{C}/\mathrm{E}_1| = 1$, то условия (3.1)–(3.3) и (4.4) обеспечивают $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$, а значит, $\mathfrak{A} \leq_4^\sigma \mathfrak{C}$. Пусть теперь

$|\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1| = |\mathfrak{C}/\mathrm{E}_1| > 1$. Пусть $c_1, \ldots, c_n|1$ в $\mathfrak{C}$. Без ограничения общности можно считать, что весь набор $c_1, \ldots, c_n$ разбивается на пять частей:

$c_1^{\mathrm{At}}, \ldots, c_{n_{\mathrm{At}}}^{\mathrm{At}}$ — атомы;

$c_1^{\mathrm{Als}}, \ldots, c_{n_{\mathrm{Als}}}^{\mathrm{Als}}$ — ненулевые безатомные элементы;

$c_1^{\mathrm{Atm}}, \ldots, c_{n_{\mathrm{Atm}}}^{\mathrm{Atm}}$ — бесконечные атомные элементы;

$c'_1, \ldots, c'_{n'}$ — неразложимые элементы идеала $\mathrm{Atm} \to \mathrm{F}$;

$c''_1, \ldots, c''_{n''}$ — элементы, не лежащие в идеале T_1.

Рассмотрим два случая.

(1) $1_{\mathfrak{C}} \in \mathrm{T}_1$ (а значит, $n'' = 0$). По (4.5) $1_{\mathfrak{A}} \in \mathrm{T}_1$, т. е. существуют $a_1^\star, a_2^\star|1$ в $\mathfrak{A}$ такие, что $a_1^\star \in \mathrm{Atm} \to \mathrm{F}$, $a_2^\star \in \mathrm{Atm} \setminus \mathrm{F} \cup \{0\}$. По (4.4) $n_{\mathrm{Atm}} \geq 1 \Leftrightarrow a_2^\star \neq 0$; если $a_2^\star \neq 0$, то разделим этот элемент на бесконечные атомные элементы $a_1^{\mathrm{Atm}}, \ldots, a_{n_{\mathrm{Atm}}}^{\mathrm{Atm}}$. От $a_1^\star$ отделим ненулевые безатомные элементы $a_1^{\mathrm{Als}}, \ldots, a_{n_{\mathrm{Als}}}^{\mathrm{Als}}$ и атомы $a_1^{\mathrm{At}}, \ldots, a_{n_{\mathrm{At}}}^{\mathrm{At}}$. Это можно сделать, так как по (3.5) $a_1^\star$ неразложим, причем

$$\bigl|\bigl(1 - \bigl(a_1^{\mathrm{At}} + \cdots + \widehat{a_{n_{\mathrm{At}}}^{\mathrm{At}} + a_1^{\mathrm{Als}}} + \cdots + a_{n_{\mathrm{Als}}}^{\mathrm{Als}}\bigr)\bigr)/\mathrm{E}_1\bigr| = |\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1| = |(c'_1 \widehat{+ \cdots +} c'_{n'})/\mathrm{E}_1\bigr|.$$

Поэтому $\bigl(a_1^\star - \bigl(a_1^{\mathrm{At}} + \cdots + a_{n_{\mathrm{At}}}^{\mathrm{At}} + a_1^{\mathrm{Als}} + \cdots + a_{n_{\mathrm{Als}}}^{\mathrm{Als}}\bigr)\bigr)$ можно разделить на элементы $a'_1, \ldots, a'_{n'}$ со свойством $|\hat{c}'_i/\mathrm{E}_1| = |\hat{a}'_i/\mathrm{E}_1|$. Заметим, что под элементами $a'_1, \ldots, a'_{n'}$ не может быть бесконечных атомных элементов, так как под $a_1^\star$ таковых не было.

(2) $1_{\mathfrak{C}} \notin \mathrm{T}_1$ (а значит, $n'' \geq 1$). В этом случае в $\mathfrak{A}$ есть бесконечный атомный элемент и $|\mathfrak{A}/\mathrm{E}_1| = \omega$. Отделим от 1 в $\mathfrak{A}$ атомы $a_1^{\mathrm{At}}, \ldots, a_{n_{\mathrm{At}}}^{\mathrm{At}}$ и ненулевые безатомные элементы $a_1^{\mathrm{Als}}, \ldots, a_{n_{\mathrm{Als}}}^{\mathrm{Als}}$, затем отделим бесконечные атомные элементы $a_1^{\mathrm{Atm}}, \ldots, a_{n_{\mathrm{Atm}}}^{\mathrm{Atm}}$. От оставшейся части отделим элементы $a'_1, \ldots, a'_{n'} \in \mathrm{Atm} \to \mathrm{F}$ со свойством $|\hat{c}'_i/\mathrm{E}_1| = |\hat{a}'_i/\mathrm{E}_1|$. Остаток разделим между $a''_1, \ldots, a''_{n''}$ таким образом, чтобы $|\hat{a}''_i/\mathrm{E}| = \omega$.

Как в первом, так и во втором случае, последовательно проверяя выполнение условий (3.1)–(3.5), несложно убедиться, что полученное разбиение искомое. Лемма доказана.

Теорема 5. *Существует вычислимая, но не разрешимая алгебра характеристики* $(1, \infty, 0)$ *с вычислимыми предикатами* At_0, E_1 *и* At_1.

Доказательство. Построим пример такой алгебры по теореме 2. Для этого возьмем $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 = (\mathrm{Atm} \to \mathrm{F}) + \mathrm{Atm}$, $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}(1 + (\omega + \eta) \times \omega \times \eta + \omega \times \eta)$, обозначим эту алгебру через $\mathfrak{B}$, $\sigma = \{\mathrm{At}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{At}_1\}$, $\alpha = 5$, $G = \{0\}$. В качестве алгебры $\mathfrak{A}$ вновь возьмем произвольную алгебру, принадлежащую классу Δ_5^0, но не имеющую Δ_4^0-вычислимого представления.

Как показано ранее, T_1 — стабильный идеальный оператор, а $\mathrm{T}_1(\mathfrak{B})$ — вычислимое подмножество в $\mathfrak{B}$, так как принадлежность элемента этому идеалу проверяется определением положения концов интервалов, составляющих этот элемент. Условие $\mathfrak{B}/\mathrm{T}_1 \cong \mathfrak{B}(1)$ выполняется в силу того, что элемент алгебры $\mathfrak{B}$ не принадлежит идеалу $\mathrm{T}_1(\mathfrak{B})$ в том и только в том случае, когда в его составе имеется полуинтервал, один конец которого лежит в порядке $1 + [(2 + \eta) \times \omega] \times (\omega \times \eta)$, а другой — в порядке $\omega \times \eta$.

По лемме 2 набор σ является локальным и согласованным с T_1. Условия (a) и (b) выполняются по лемме 9. Проверка условия (c) осуществляется точно так же, как в лемме 8 из [12]. Необходимые для этого списки условий приведены в леммах 8 и 9.

Все условия теоремы 2 выполнены, поэтому получаем σ-вычислимую алгебру $\mathfrak{C}$ такую, что $\mathfrak{C}/\mathrm{T}_1 \cong \mathfrak{A}$, и изоморфизм f со свойствами (1)–(3), указанными в этой теореме. При $G = \{0\}$ свойство (2) вырождается, а из (1) и (3) получаем, что $ch(\mathfrak{C})=(1,\infty,0)$. Докажем это. Пусть x — неразложимый элемент алгебры $\mathfrak{C}$. Покажем, что под ним есть элемент из $\mathrm{At}_1(\mathfrak{C})$. Возможны два случая.

1. $x \in \mathrm{T}_1(\mathfrak{C})$. В этом случае из (3) имеем, что $\hat{x} \cong \hat{a}_1 \times \cdots \times \hat{a}_k$, где $a_i \in \mathrm{T}_1(\mathfrak{B})$. Среди a_i есть неразложимый элемент, и под ним есть элемент из $\mathrm{At}_1(\mathfrak{B})$, так как $\mathfrak{B}$ имеет элементарную характеристику $(1,\infty,0)$. Благодаря изоморфизму искомый элемент есть и под x.

2. $x \notin \mathrm{T}_1(\mathfrak{C})$. Тогда согласно (1) найдутся $z \leq x$, $e \in \mathfrak{B}\backslash\mathrm{T}_1(\mathfrak{B})$ и T_1-стабильное вложение $g : \hat{e} \to \hat{z}$. Элемент e неразложим, поэтому есть элемент $e_1 \leq e$, $e_1 \in \mathrm{At}_1(\mathfrak{B})$. В силу того, что $e_1 \in \mathrm{T}_1(\mathfrak{B})$, и определения T_1-стабильного вложения имеем $\hat{e}_1 \cong \widehat{g(e_1)}$. Значит, $g(e_1) \in \mathrm{At}_1(\mathfrak{C})$. Осталось заметить, что $g(e_1) \leq x$.

Как и в теореме 3 из [12], нетрудно показать, что алгебра $\mathfrak{C}$ не может иметь сильно вычислимого представления. Теорема доказана.

Теорема 6. *Для любого $n > 1$ существует вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n,\infty,0)$ с вычислимыми предикатами из множества $\Sigma_{n+1}\backslash \{\mathrm{Als}_{n-1}, \mathrm{Atm}_{n-1}\}$, не имеющая сильно вычислимого представления.*

Доказательство. Воспользуемся снова теоремой 2. Для этого возьмем $\mathrm{T} = \mathrm{E}_{n-1} \circ \mathrm{T}_1$, где $\mathrm{T}_1 = (\mathrm{Atm} \to \mathrm{F}) + \mathrm{Atm}$, $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}((\omega+\eta)^{n-1} \times L^*)$ (обозначим эту алгебру через $\mathfrak{B}$), где $L^* = 1 + (\omega+\eta) \times \omega \times \eta + \omega \times \eta$ — порядок, по которому строили алгебру в теореме 6. Положим $\sigma = \Sigma_{n-1} \cup \{\mathrm{At}_{n-1}, \mathrm{E}_n, \mathrm{At}_n\}$. Пусть α, G и $\mathfrak{A}$ будут такие же, как в теореме 6.

Стабильность оператора T была показана в теореме 4. Несложно видеть, что $\mathfrak{B}/\mathrm{T} \cong \mathfrak{B}(1)$. По лемме 2 имеем, что σ — локальный набор, согласованный с T. Условия (a)–(c) теоремы 2 проверяются так же, как в теореме 4, с использованием леммы 5 и фактов из доказательства теоремы 6. В результате получаем неразрешимую σ-вычислимую алгебру $\mathfrak{C}$ с элементарной характеристикой $(n,\infty,0)$. Теорема доказана.

5. Случаи $(n, k+1, 0)$, $(n, k, 1)$ и $(n, \infty, 1)$ для $k > 0$

В предыдущих разделах мы рассматривали только алгебры элементарных характеристик $(n,0,1)$, $(n,1,0)$ и $(n,\infty,0)$ и для них показали существенность условий, сформулированных в теореме 1. Покажем, как из этих результатов можно получить соответствующие условия для алгебр характеристик $(n,k+1,0)$, $(n,k,1)$, $(n,\infty,1)$, где $k > 0$.

Известно, что алгебра характеристики $(n,\alpha,1)$, $\alpha \in \omega \cup \{\infty\}$, $\alpha \neq 0$, изоморфна прямому произведению алгебр характеристик $(n,\alpha,0)$ и $(n,0,1)$, а алгебра характеристики $(n,k,0)$ для $k > 1$, $k \in \omega$, представляется с помощью произведения k экземпляров алгебр характеристики $(n,1,0)$.

Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ представляется в виде произведения алгебр $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ и для $\mathfrak{A}$ не выполняется какое-либо из условий разрешимости алгебр $\mathfrak{B}$ или $\mathfrak{C}$ из теоремы 1, для определенности $\mathfrak{B}$. Тогда мы можем построить пример неразрешимой вычислимой алгебры $\mathfrak{A}'$ той же характеристики, что и $\mathfrak{A}$, у которой вычислимы все предикаты из Σ_{n+1}, которые вычислимы в $\mathfrak{A}$. Для этого положим $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}' \times \mathfrak{C}'$, где $\mathfrak{C}'$ — сильно вычислимая алгебра той же характеристики, что и $\mathfrak{C}$, а $\mathfrak{B}'$ — неразрешимая вычислимая алгебра той же характеристики, что и $\mathfrak{B}$, со всеми вычислимыми предикатами из Σ_{n+1}, кроме того условия, которое нарушается для $\mathfrak{A}$. В качестве $\mathfrak{B}'$ может выступать одна из алгебр в теоремах 3–6, теореме 3 из [12] и следствиях 1 и 2.

В силу приведенных рассуждений получаем, что для алгебр характеристики $(n, \infty, 1)$ минимальные условия разрешимости совпадают с $(n, \infty, 0)$, для характеристики $(n, k, 0)$ для $k > 1$ совпадают с $(n, 1, 0)$ и, наконец, для $(n, k, 1)$ для $k > 0$ совпадают с $(n, 0, 1)$.

Благодарность. Автор благодарен научному руководителю д. ф.-м. н. П. Е. Алаеву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Науч. кн., 1996.
2. *Ершов Ю. Л.* Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, № 3. С. 17–38.
3. *Гончаров С. С.* Ограниченные теории конструктивных булевых алгебр // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 797–812.
4. *Гончаров С. С.* Некоторые свойства конструктивизации булевых алгебр // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 264–278.
5. *Одинцов С. П.* Ограниченные теории конструктивных булевых алгебр нижнего слоя. Новосибирск, 1986. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 21).
6. *Власов В. Н.* Конструктивизируемость булевых алгебр элементарной характеристики $(1, 0, 1)$ // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 5. С. 499–521.
7. *Алаев П. Е.* Разрешимые булевы алгебры характеристики (1,0,1) // Мат. тр. 2004. Т. 7, № 1. С. 3–12.
8. *Алаев П. Е.* Сильно конструктивные булевы алгебры // Алгебра и логика. 2005. Т. 7, № 1. С. 3–23.
9. *Леонтьева М. Н.* Булевы алгебры элементарной характеристики (1,0,1) с вычислимыми множеством атомов и идеалом атомных элементов // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 1. С. 64–68.
10. *Леонтьева М. Н.* Достаточные условия разрешимости для булевых алгебр // Вестн. НГУ. (В печати).
11. *Алаев П. Е.* Вычислимые однородные булевы алгебры и одна метатеорема // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 2. С. 133–158.
12. *Леонтьева М. Н.* Булевы алгебры элементарной характеристики (1,0,1) с вычислимыми множеством атомов и идеалом Ершова — Тарского // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 2. С. 133–151.
13. *Ash C. J., Knight J.* Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy. Amsterdam: Elsevier, 2000.
14. *Алаев П. Е.* Гиперарифметические булевы алгебры с выделенным идеалом // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 963–976.

Статья поступила 31 мая 2011 г.

Леонтьева Маргарита Николаевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`margarita.leontyeva@gmail.com`