Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 514.765

ИНВАРИАНТНЫЕ АФФИНОРНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ГРУППАХ ЛИ

Е. С. Корнев

Аннотация. На группах Ли вводится класс особых метрических структур, связанных с радикалом фиксированной 1-формы на группе Ли. Такие структуры называются аффинорными метрическими структурами. Вводятся и изучаются некоторые специальные классы инвариантных аффинорных метрических структур. Получены обобщения многих результатов из теории контактных метрических структур на группах Ли.

Ключевые слова: левоинвариантная метрика, аффинор, радикал 1-формы, группа Ли.

Введение

В работе вводятся и изучаются особые типы метрик на группах Ли, связанные с заданной 1-формой и ее радикалом. Такие метрические структуры называются аффинорными метрическими структурами. Простейшим частным случаем аффинорных метрических структур являются контактные метрические структуры [1]. Многие приводимые в работе понятия и результаты имеют аналоги в теории контактных структур. Однако большинство результатов, полученных в § 5, не могут быть применены к контактным метрическим структурам.

В § 1 исследуются свойства радикала 1-форм на группах Ли. В § 2–4 вводятся и изучаются различные метрические структуры, связанные с радикалом заданной 1-формы. В § 5 рассматривается связь аффинорных метрических структур и комплексных структур на группах Ли.

В данной работе многие результаты, ранее известные только для 1-форм с одномерным радикалом (контактных форм), доказаны для 1-форм с радикалом произвольной размерности. Также получены некоторые топологические и геометрические факты, описывающие структуру алгебр Ли и групп Ли, на которых задана аффинорная метрическая структура.

Под аффинорной метрической структурой понимается тройка (α, Φ, β), где α — 1-форма с нетривиальным радикалом, β — симметричная 2-форма, сужение которой на радикал формы α является римановой метрикой и Φ — поле линейных операторов на группе Ли, превращающее форму $d\alpha$ в риманову метрику на подпространстве, дополнительном к радикалу формы α. Форма β называется *метрикой радикала* и отдельно изучается в § 2. Поле Φ называется *аффинором* и является ключевым понятием теории аффинорных метрических структур.

§ 1. Радикал линейных форм

Пусть G — связная группа Ли размерности n, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, α — левоинвариантная 1-форма на G, а β — левоинвариантная 2-форма на G. Далее везде, если это не будет оговорено специально, будем считать все формы на группах Ли левоинвариантными.

Определение 1.1. *Радикалом 2-формы* β будем называть максимальное подмножество $\operatorname{rad}\beta \subset \mathfrak{g}$ такое, что $\beta(X,Y) = 0$ для всех $X \in \operatorname{rad}\beta$ и $Y \in \mathfrak{g}$. *Радикалом* 1-формы α будем называть радикал ее внешнего дифференциала $d\alpha$.

Из определения непосредственно следует, что радикал 1-формы на группе Ли G является векторным пространством и всегда содержит центр алгебры Ли группы G. 2-Формы с нулевым радикалом называются *симплектическими* и изучены в [2].

Пример 1. Пусть G — группа Ли размерности $2n+1$ и α — левоинвариантная 1-форма на G, обладающая свойством $(d\alpha)^n \wedge \alpha \neq 0$. Такие формы называются *контактными* и изучены в [3]. В [4] показано, что левоинвариантные контактные структуры имеют одномерный радикал.

Пример 2. Пусть H — нечетномерная группа Ли с левоинвариантной контактной формой $\hat{\alpha}$, а A — коммутативная группа Ли нечетной размерности. Рассмотрим группу $G = H \times A$. Продолжим форму $\hat{\alpha}$ до левоинвариантной формы α на G, считая, что $\alpha \equiv 0$ на A. Группа G имеет четную размерность, и радикал формы α также имеет четную размерность, поскольку образован прямой суммой алгебры Ли группы A и одномерного радикала формы $\hat{\alpha}$.

Предложение 1.2. *Пусть α — левоинвариантная 1-форма на группе Ли G. Тогда $\operatorname{rad}\alpha$ является подалгеброй алгебры Ли группы G.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Для любых X и Y из $\operatorname{rad}\alpha$ и для любого Z из $\mathfrak{g}$ имеем

$$d\alpha([X,Y],Z) = -(1/2)\alpha([[X,Y],Z]).$$

Пользуясь тождеством Якоби, получаем

$$\alpha([[X,Y],Z]) = -\alpha([[Y,Z],X]) - \alpha([[Z,X],Y]) = 2d\alpha([Y,Z],X) + 2d\alpha([Z,X],Y).$$

Согласно определению радикала 1-формы правая часть последнего равенства равна нулю. Отсюда $d\alpha([X,Y],Z) = 0$, следовательно, $[X,Y] \in \operatorname{rad}\alpha$.

Обозначим через $\mathfrak{r}$ радикал формы α, а через R — связную подгруппу, порожденную подалгеброй $\mathfrak{r}$. Будем называть подгруппу R *подгруппой радикала* и считать, что подгруппа R действует на 1-форму α по правилу $\operatorname{Ad}^*_R\alpha$, т. е. $\operatorname{Ad}^*_r \alpha(X) = \alpha(\operatorname{Ad}_r X)$ для любых $r \in R$ и $X \in \mathfrak{g}$.

Предложение 1.3. *Подгруппа радикала левоинвариантной 1-формы α на группе Ли G замкнута и совпадает со связной компонентой единицы подгруппы изотропии формы α относительно присоединенного действия группы G.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа изотропии формы α, а $\mathfrak{h}$ — ее алгебра Ли. Если вектор X принадлежит $\mathfrak{h}$, то интегральная кривая $h(t)$, выходящая из единицы группы G в направлении X, лежит в подгруппе H. Отсюда

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \operatorname{Ad}^*_{h(t)} \alpha(Y) = \alpha([X,Y]) = 0 \quad \text{для всех } Y \in \mathfrak{g},$$

т. е. $X \in \mathfrak{r}$.

Обратно, если X принадлежит $\mathfrak{r}$ и $r(t)$ — интегральная кривая, выходящая из единицы группы G в направлении X, то

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Ad}^*_{r(t)}\alpha(Y) = \alpha(\operatorname{Ad}_{r(t)}[X,Y]) = \alpha([\operatorname{Ad}_{r(t)}X, \operatorname{Ad}_{r(t)}Y]) = \alpha([X, \operatorname{Ad}_{r(t)}Y]) = 0$$

для всех $Y \in \mathfrak{g}$, т. е. кривая $r(t)$ лежит в подгруппе H, а следовательно, $X \in \mathfrak{h}$. Таким образом, $\mathfrak{h} = \mathfrak{r}$.

Поскольку $\mathfrak{h} = \mathfrak{r}$, связная компонента единицы подгруппы H порождается подалгеброй $\mathfrak{r}$, а значит, совпадает с R и подгруппа R замкнута, так как связная компонента единицы любой группы Ли всегда замкнута.

Лемма 1.4. *Размерность радикала любой левоинвариантной* 1*-формы на группе Ли нечетной размерности больше или равна* 1.

Доказательство. Пусть G — группа Ли размерности $2n+1$, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли и α — левоинвариантная 1-форма на группе G. Известно, что в фиксированном базисе алгебры Ли внешняя 2-форма $d\alpha$ представляется кососимметричной матрицей порядка $2n+1$. Поскольку характеристический многочлен этой матрицы имеет нечетную степень, он имеет хотя бы один вещественный корень. Следовательно, матрица формы $d\alpha$ имеет хотя бы один собственный вектор, соответствующий вещественному собственному значению λ. Введем новый базис алгебры Ли $\mathfrak{g}, e_1, \ldots, e_{2n+1}$ так, что вектор e_{2n+1} является собственным вектором, соответствующим собственному значению λ. В этом базисе матрица формы $d\alpha$ принимает вид

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,2n} & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & 0 \\ a_{2n+1,1} & \ldots & a_{2n+1,2n} & \lambda \end{bmatrix}.$$

Из кососимметричности этой матрицы следует, что $\lambda = 0$ и $a_{2n+1,k} = 0$ для всех $k = 1, \ldots, 2n$. Следовательно, вектор e_{2n+1} порождает одномерное подпространство, лежащее в радикале формы α.

Теорема 1.5. *Пусть α — левоинвариантная незамкнутая* 1*-форма на группе Ли G размерности n. Тогда если n четно, то размерность $\operatorname{rad}\alpha$ также четна и $0 \le \dim(\operatorname{rad}\alpha) \le n-2$, а если n нечетно, то размерность $\operatorname{rad}\alpha$ также нечетна и $1 \le \dim(\operatorname{rad}\alpha) \le n-2$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Предположим, что n четно. Если форма α имеет нетривиальный радикал на $\mathfrak{g}$, то выберем в радикале одномерное подпространство V_1 и обозначим через W_1 подпространство, дополнительное к V_1 в $\mathfrak{g}$, такое, что сужение формы α на W_1 не является тождественным нулем. Такое подпространство всегда можно выбрать, поскольку линейная форма не может быть тождественным нулем на $\mathfrak{g} \setminus V_1$. Далее, $d\alpha \not\equiv 0$ на W_1, поскольку в противном случае $d\alpha \equiv 0$ на $\mathfrak{g}$, что противоречит незамкнутости формы α.

Поскольку W_1 имеет нечетную размерность, по лемме 1.4 оно содержит одномерное подпространство V_2, которое лежит в радикале формы α. Очевидно, что двумерное подпространство $\{V_1, V_2\}$ лежит в радикале формы α. Обозначим через W_2 подпространство, дополнительное к V_2 в W_1, такое, что сужение формы α на W_2 не является тождественным нулем. Если на подпространстве W_2 форма α невырожденна, то утверждение доказано. Если же W_2 содержит одномерное подпространство из $\operatorname{rad}\alpha$, то повторяем предыдущий шаг. Продолжая по индукции, получаем, что размерность $\operatorname{rad}\alpha$ четна. Аналогичные рассуждения в случае, когда n нечетно, показывают, что размерность $\operatorname{rad}\alpha$ в этом случае нечетна.

Если $\dim(\operatorname{rad}\alpha) = n-1$, то из определения 1.1 следует, что $d\alpha \equiv 0$ на G. Это противоречит незамкнутости формы α. Таким образом, теорема полностью доказана.

Замечание 1.6. В [1] доказано, что на неразрешимых унимодулярных группах Ли не существует невырожденных замкнутых внешних 2-форм. Поэтому для неразрешимых унимодулярных групп Ли четной размерности для любой 1-формы α имеет место неравенство

$$1 \leq \dim(\operatorname{rad}\alpha) \leq n-1.$$

Также из теоремы 1.5 следует, что на двумерной группе Ли радикал любой 1-формы тривиален, т. е. либо нулевой, либо совпадает с алгеброй Ли.

Определить размерность радикала 1-формы на полупростых группах Ли позволяет следующий результат.

Теорема 1.7. *Пусть G — полупростая группа Ли и α — левоинвариантная 1-форма на группе G. Тогда радикал формы α совпадает с наибольшим подпространством V таким, что для любого X из V оператор ad_X кососимметричен относительно 2-формы $d\alpha$.*

Доказательство. Если $X \in \operatorname{rad}\alpha$, то для любых Y и Z из $\mathfrak{g}$ имеем

$$\begin{aligned} 6\,d^2\alpha(X,Y,Z) &= -d\alpha([X,Y],Z) + d\alpha([X,Z],Y) - d\alpha([Y,Z],X) \\ &= d\alpha(\operatorname{ad}_X Z, Y) + d\alpha(Z, \operatorname{ad}_X Y) = 0, \end{aligned}$$

т. е. $X \in V$.

Обратно, если $X \in V$, то $d\alpha(\operatorname{ad}_X Y, Z) = -d\alpha(Y, \operatorname{ad}_X Z)$ для любых Y и Z из $\mathfrak{g}$, откуда

$$6\,d^2\alpha(X,Y,Z) = d\alpha(X,[Y,Z]) = 0.$$

Поскольку для полупростых групп Ли первый производный идеал совпадает со всей алгеброй Ли, любое векторное поле из $\mathfrak{g}$ может быть представлено в виде скобки Ли двух других векторных полей. Таким образом, $d\alpha(X,Y) = 0$ для всех Y из $\mathfrak{g}$, и $X \in \operatorname{rad}\alpha$.

Теорема 1.7 дает простой алгоритм для вычисления размерности радикала 1-формы α на полупростой группе Ли G. Если зафиксировать базис $E_1, \dots, E_n$, $n = \dim G$, алгебры Ли группы G, то размерность радикала формы α равна числу базисных векторов, для которых операторы ad_{E_i} кососимметричны относительно формы $d\alpha$.

Если считать, что подгруппа радикала R действует на группу G умножением справа и является нормальной подгруппой группы G, то можно рассматривать расслоение $G \xrightarrow{\pi} G/R$ со слоем R и естественной проекцией π.

Теорема 1.8. *Пусть G — связная односвязная группа Ли и R — нормальная подгруппа радикала левоинвариантной 1-формы α на группе G. Тогда расслоение $G \xrightarrow{\pi} G/R$ тривиально, если и только если группа G изоморфна полупрямому произведению $G/R \rtimes R$.*

Доказательство. Обозначим расслоение $G \xrightarrow{\pi} G/R$ через P. Если расслоение P тривиально, то существует гомеоморфизм топологических пространств G и $G/R \times R$, а следовательно, группа $G/R \rtimes R$ односвязна. Из тривиальности расслоения P вытекает, что оно допускает глобальное сечение Σ (см. [5, т. 1, гл. 2).

Пусть Φ — гомоморфизм группы G/R в группу автоморфизмов подгруппы R вида

$$\Phi_a(h) = \Sigma(a)h\Sigma(a)^{-1}, \quad a \in G/R,\ h \in R.$$

Поскольку подгруппа R нормальна, для любого $a \in G/R$ отображение Φ_a действует на R инвариантно. Отсюда следует, что радикал $\mathfrak{r}$ является идеалом в $\mathfrak{g}$ и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна полупрямому произведению подалгебр $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}$. Изоморфизм алгебр Ли индуцирует изоморфизм групп G и $G/R \rtimes R$.

Обратно, если группы G и $G/R \rtimes R$ изоморфны, то изоморфизм этих групп, в частности, является гомеоморфизмом топологических пространств G и $G/R \times R$, а следовательно, расслоение P тривиально.

§ 2. Метрика радикала

Пусть G — связная группа Ли, α — левоинвариантная 1-форма на G, $\mathfrak{r}$ — ее радикал и R — подгруппа радикала.

Определение 2.1. *Метрикой радикала* $\mathfrak{r}$ называется левоинвариантная симметричная неотрицательная 2-форма β, обладающая свойствами:

(1) форма β невырожденна на $\mathfrak{r}$;

(2) форма β имеет радикал максимальной размерности, т. е. алгебру Ли группы G можно представить в виде прямой суммы векторных пространств $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \operatorname{rad}\beta$.

Из определения видно, что сужение формы β на $\mathfrak{r}$ задает на $\mathfrak{r}$ риманову метрику.

Пример 1. Пусть группа G имеет вид $H \times R$, где H — симплектическая группа Ли с левоинвариантной симплектической структурой Ω, а R — коммутативная группа Ли. Пусть g_0 — стандартная левоинвариантная евклидова метрика на G в некотором фиксированном базисе алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а α — левоинвариантная 1-форма на G такая, что сужение $d\alpha$ на H совпадает с Ω. Поскольку $d\alpha$ не вырождается на H, а группа R коммутативна, для любых $X \in \mathfrak{r}$ и $Y \in \mathfrak{g}$ получаем $d\alpha(X,Y) = -(1/2)\alpha([X,Y]) = 0$, т. е. $\operatorname{rad}\alpha = \mathfrak{r}$, а в качестве метрики радикала можно взять форму $g_0 \circ d\pi$, где π — проекция G на R вдоль H.

Пример 2. Пусть G — неразрешимая группа Ли, R — максимальная разрешимая подгруппа в G, допускающая левоинвариантную точную симплектическую структуру Ω, и α — левоинвариантная 1-форма на G такая, что сужение $d\alpha$ на R совпадает с Ω. По теореме Леви (см., например, [6]) группу G можно представить в виде $G = S \rtimes R$, где S — некоторая полупростая группа Ли. Если для любого $X \in S$ образ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно действия оператора ad_X лежит в ядре формы α, то $\operatorname{rad}\alpha = \mathfrak{s}$ и $\beta = -B$, где B — форма Киллинга — Картана, задает левоинвариантную метрику радикала на G.

Обозначим радикал метрики радикала β через D. Его можно рассматривать как левоинвариантное распределение на группе G. Из определения 2.1 следует, что $\mathfrak{g} = D \oplus \mathfrak{r}$. Поскольку $\mathfrak{r}$ является подалгеброй, Ad_R действует на $\mathfrak{r}$ инвариантно. Если Ad_R действует инвариантно на D, то алгебра Ли G редуцируема в смысле Номидзу.

Предложение 2.2. *Если метрика радикала Ad_R-инвариантна, то распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы радикала.*

Доказательство. Пусть $X \in D$ и $Y \in \mathfrak{g}$. Если метрика радикала β Ad_R-инвариантна, то для любого $h \in R$ имеем

$$\beta(\mathrm{Ad}_h X, Y) = \beta(X, \mathrm{Ad}_{h^{-1}} Y) = 0.$$

т. е. $\mathrm{Ad}_h X \in D$.

Предложение 2.3. *Пусть β — левоинвариантная метрика радикала $\mathfrak{r}$ на группе Ли G и $D = \mathrm{rad}\,\beta$. Тогда если подгруппа радикала R является компактной подгруппой в G и проекция π алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на подалгебру $\mathfrak{r}$ вдоль D коммутирует с присоединенным действием подгруппы радикала, то распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы R.*

Доказательство. Применяя операцию усреднения формы β по подгруппе R, получаем Ad_R-инвариантную форму β_1. Поскольку $\mathrm{Ad}_h \circ d\pi = d\pi \circ \mathrm{Ad}_h$ для любого $h \in R$ и $\pi X = 0$ для любого X из D, форма $\beta_2 = \beta_1 \circ d\pi$ является Ad_R-инвариантной метрикой радикала $\mathfrak{r}$ с радикалом D. По предложению 2.2 получаем, что распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы R.

Замечание 2.4. Если подгруппа радикала R является максимальным тором в G и проекция $\pi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{r}$ вдоль радикала D некоторой левоинвариантной метрики радикала $\mathfrak{r}$ коммутирует с присоединенным действием максимального тора, то, поскольку любой тор является коммутативной компактной группой, распределение D инвариантно относительно присоединенного действия максимального тора R.

Обозначим через P расслоение $G \xrightarrow{\pi} G/R$ из § 1.

Теорема 2.5. *Пусть G — связная группа Ли, α — левоинвариантная 1-форма на G с радикалом $\mathfrak{r}$, β — левоинвариантная метрика радикала, D — радикал формы β, подгруппа радикала R является максимальным тором в G и проекция $\pi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{r}$ вдоль D коммутирует с присоединенным действием подгруппы радикала. Тогда*

(1) *распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы радикала и является связностью расслоения P;*

(2) *форма связности D имеет вид*

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^{m} \beta(X, E_i) E_i,$$

где $E_1, \ldots, E_m$ — фиксированный ортонормированный относительно метрики β базис радикала $\mathfrak{r}$, m — размерность радикала $\mathfrak{r}$, $X \in \mathfrak{g}$;

(3) *связность D является плоской* (т. е. *имеет нулевую форму кривизны связности*) *тогда и только тогда, когда распределение D инволютивно.*

Доказательство. (1) В силу замечания 2.4 Ad_R действует на D инвариантно. Отсюда следует, что распределение D биинвариантно относительно присоединенного действия подгруппы R и в, частности, инвариантно относительно правых сдвигов на элементы подгруппы радикала. Поскольку оно дифференцируемо и является дополнением радикала $\mathfrak{r}$, то D есть связность расслоения P.

(2) Пусть $X = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i E_i \in \mathfrak{r}$. Имеем

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \omega(E_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i E_i = X.$$

Поскольку максимальный тор — это коммутативная подгруппа, для любых h из R и Y из $\mathfrak{r}$ будет $\mathrm{Ad}_h Y(e) = Y(e)$ или $dL_h Y(e) = dR_h Y(e)$, где e — единица группы G. Для любого h из R имеем

$$\begin{aligned} R_h^* \omega(X(e)) &= \sum_{i=1}^{m} \beta(dR_h X(e), E_i(h)) E_i(h) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \beta(\mathrm{Ad}_h X(h), E_i(h)) \,\mathrm{Ad}_{h^{-1}} E_i(h) = \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \omega(X(h)), \end{aligned}$$

т. е. форма ω удовлетворяет всем аксиомам формы связности.

Покажем, что форма ω не зависит от выбора базиса. Пусть $E'_1, \dots, E'_m$ — другой ортонормированный базис радикала и A — ортогональное преобразование этого базиса к базису $E_1, \dots, E_m$. Имеем

$$\begin{aligned} \omega(X) = \sum_{i=1}^{m} \beta(X, E_i) E_i &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l} \beta\big(X, a_i^k E'_k\big) a_i^l E'_l \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l} a_i^k a_i^l \beta(X, E'_k) E'_l = \sum_{k=1}^{m} \beta(X, E'_k) E'_l = \omega'(X). \end{aligned}$$

(3) Пусть Ω — форма кривизны связности D. Пользуясь структурным уравнением из [5, гл. 2] и коммутативностью радикала $\mathfrak{r}$, получаем

$$\Omega(X,Y) = (1/2)[\omega(X), \omega(Y)] + d\omega(X,Y) = d\omega(X,Y) = -\omega([X,Y])$$

для всех X и Y из $\mathfrak{g}$.

Поскольку радикал $\mathfrak{r}$ коммутативен, $\omega([X,Y]) = 0$ для любых X и Y из $\mathfrak{r}$. Распределение D является ядром формы связности ω и инвариантно относительно Ad_R, поэтому $[X,Y] = \mathrm{ad}_X Y \in D$ для любых $X \in D$ и $Y \in \mathfrak{r}$, а значит, $\omega([X,Y]) = 0$. Если распределение D инволютивно, то $\omega([X,Y]) = 0$ для любых X и Y из D. Таким образом, $\Omega(X,Y) = 0$ для любых X и Y из $\mathfrak{g}$.

Обратно, если $\Omega \equiv 0$ и $X, Y \in D$, то $\omega([X,Y]) = -\Omega(X,Y) = 0$, т. е. $[X,Y] \in D$.

Замечание 2.6. Утверждения теоремы 2.5 также справедливы в следующих двух случаях:

(1) подгруппа радикала R коммутативна (необязательно компактная), а метрика радикала Ad_R-инвариантна;

(2) подгруппа радикала — произвольная подгруппа в G, а любое векторное поле из $\mathfrak{g}$ Ad_R-инвариантно.

Предложение 2.7. *Пусть α — левоинвариантная незамкнутая 1-форма на группе Ли G и D — радикал левоинвариантной метрики радикала формы α. Тогда если D является подалгеброй алгебры Ли группы G, то D не может лежать в ядре формы α.*

Доказательство. Если распределение D является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, то оно инволютивно и $\mathfrak{g} = D \oplus \operatorname{rad}\alpha$. Если $D \subset \ker\alpha$, то для любых X и Y из

D получаем $d\alpha(X,Y) = -(1/2)\alpha([X,Y]) = 0$. Таким образом, $d\alpha \equiv 0$ на D, а следовательно, $d\alpha \equiv 0$ на $\mathfrak{g}$, что противоречит незамкнутости формы α.

Замечание 2.8. Если α — левоинвариантная контактная структура на группе Ли G, то любая левоинвариантная метрика радикала формы α пропорциональна 2-форме $\alpha \otimes \alpha$, а ее радикал совпадает с ядром формы α. Следовательно, в контактном случае распределение D не может быть подалгеброй.

Пусть распределение D инволютивно и инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы радикала. В этом случае D является подалгеброй в $\mathfrak{g}$ и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна полупрямому произведению подалгебры D и радикала $\mathfrak{r}$. Обозначим через H связную подгруппу, порожденную подалгеброй D. В [7] доказано, что изоморфизм алгебр Ли влечет локальный изоморфизм групп Ли. Следовательно, существует локальный изоморфизм группы G на полупрямое произведение подгрупп H и R. Этот изоморфизм задает локальный гомеоморфизм топологических пространств G и $H \times R$.

Если считать, что подгруппа радикала действует на группе G умножением справа, то можно ввести расслоение $G \xrightarrow{\pi} H$ со слоем R и проекцией π. Будем обозначать это расслоение через L. Если подгруппа радикала R коммутативна, то подалгебра D является плоской связностью расслоения L с формой связности ω из п. (2) теоремы 2.5. Заметим, что в расслоении L уже не требуется, чтобы подгруппа радикала была коммутативной и компактной. Более того, если метрика радикала Ad_R-инвариантна, то можно снять требование Ad_R-инвариантности подалгебры D, поскольку оно следует из предложения 2.2. Из предложения 2.7 и замечания 2.8 вытекает, что расслоение L нельзя построить для левоинвариантных контактных структур.

§ 3. Аффинорные метрические структуры

Пусть G — связная группа Ли, α — левоинвариантная 1-форма, β — левоинвариантная метрика радикала $\mathfrak{r}$ и D — радикал формы β.

Определение 3.1. *Аффинором 1-формы* α называется поле эндоморфизмов Φ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, обладающее следующими свойствами:

(1) $\Phi X \in D$ для всех X из $\mathfrak{g}$ и $\Phi Y = 0$ для всех Y из $\mathfrak{r}$;

(2) $d\alpha(\Phi X, \Phi Y) = d\alpha(X,Y)$ для любых X и Y из $\mathfrak{g}$;

(3) $\Phi^2 X = -X + \omega(X)$ для всех X из $\mathfrak{g}$, где ω — форма связности из п. (2) теоремы 2.5;

(4) 2-форма $d\alpha(X, \Phi Y)$ является положительно определенной для всех X и Y из D.

Аффинор Φ называется *левоинвариантным*, если он коммутирует с левыми сдвигами на группе G, и *биинвариантным*, если он коммутирует и с левыми, и с правыми сдвигами на группе G.

Из свойства (3) следует, что если $X \in D$, то $\Phi^2 X = -X$, свойства (2) и (3) влекут, что $d\alpha(\Phi X, Y) = -d\alpha(X, \Phi Y)$ для любых X и Y из $\mathfrak{g}$, а свойства (1) и (4) — что радикал 2-формы $D\alpha(X, \Phi Y)$ совпадает с $\mathrm{rad}\,\alpha$ и ее сужение на D является римановой метрикой.

Определение 3.2. *Аффинорной метрической структурой g на группе Ли G* называется тройка (α, Φ, β) такая, что

$$g(X,Y) = d\alpha(X, \Phi Y) + \beta(X,Y) \quad \text{для всех } X \text{ и } Y \text{ из } \mathfrak{g},$$

где α — 1-форма с радикалом $\mathfrak{r}$, Φ — аффинор формы α и β — метрика радикала $\mathfrak{r}$.

Аффинорная метрическая структура называется *левоинвариантной*, если тензорные поля α, ϕ, β являются левоинвариантными, и *биинвариантной*, если эти тензорные поля являются биинвариантными.

Непосредственно из определения 3.2 следует, что распределение D и радикал $\mathfrak{r}$ ортогональны относительно аффинорной метрики. Таким образом, если на группе Ли задана аффинорная метрическая структура, то распределение D можно однозначно определить как ортогональное дополнение радикала формы α.

Пусть $d\alpha_\Phi$ — сужение формы $d\alpha(X, \Phi Y)$ на D, распределение D инволютивно, H — подгруппа, порожденная подалгеброй D, и L — расслоение $G \xrightarrow{\pi} H$ из § 2. Тогда метрика $d\alpha_\Phi$ является метрикой на базе расслоения L, а метрика радикала β_h, $h \in H$, задает метрику в каждом слое над точкой $h \in H$. Таким образом, к аффинорным метрическим структурам применимы все понятия и результаты из [8], относящиеся к таким конструкциям.

Пример 1. Пусть G — связная группа Ли размерности $2n+1$ и α — левоинвариантная контактная форма на G. Радикал формы α имеет размерность 1 и порождается векторным полем X_0. Введем метрику радикала β, полагая $\beta(X, Y) = \alpha(X)\alpha(Y)$ для всех X и Y из $\mathfrak{g}$. В этом случае распределение D совпадает с ядром формы α и левоинвариантная аффинорная метрическая структура принимает вид

$$g(X, Y) = d\alpha(X, \Phi Y) + \alpha(X)\alpha(Y),$$

где Φ — аффинор формы α такой, что $\Phi X_0 = 0$. Такие аффинорные метрические структуры называются *контактными метрическими структурами* и подробно изучены в [1].

Пример 2. Пусть G — группа Ли вида $G = H \times R$, где H — нильпотентная симплектическая группа Ли с левоинвариантной симплектической структурой ω такая, что для любых $X \in \mathfrak{h}$ и $Y \in \mathfrak{g}$ оператор $\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y$ является нильпотентным, а R — полупростая группа Ли с нетривиальным центром. Пусть α — левоинвариантная 1-форма на G такая, что сужение $d\alpha$ на H совпадает с Ω и $\mathrm{rad}\,\alpha = \mathfrak{r}$. Форма Киллинга — Картана B вырождается на H, а на R невырожденна и отрицательно определена. Из того, что след любого нильпотентного оператора равен нулю, следует, что $\mathrm{rad}\, B = \mathfrak{h}$. Возьмем в качестве метрики радикала форму $\beta = -B$. В этом случае распределение D совпадает с $\mathfrak{h}$. Пусть J — левоинвариантная почти комплексная структура на H, сохраняющая симплектическую структуру Ω, а X_0 — фиксированное векторное поле, лежащее в центре алгебры Ли $\mathfrak{r}$. Введем поле линейных операторов Φ на G следующим образом:

$$\Phi X = \begin{cases} JX & \text{при } X \in \mathfrak{h}, \\ \mathrm{ad}_{X_0} X & \text{при } X \in \mathfrak{r}. \end{cases}$$

Легко проверить, что Φ является аффинором формы α.

Таким образом, соответствующая левоинвариантная аффинорная метрическая структура принимает вид

$$g(X, Y) = d\alpha(X, \Phi Y) - B(X, Y).$$

Предложение 3.3. *Левоинвариантная аффинорная метрическая структура $g = (\alpha, \Phi, \beta)$ является Ad_R-инвариантной тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ad}_h \circ \Phi = \Phi \circ \mathrm{Ad}_h$ и $\mathrm{Ad}_h^* \beta = \beta$ для любого h из подгруппы радикала R.*

Доказательство. Пользуясь тем, что подгруппа радикала является связной компонентой подгруппы изотропии формы α, получаем

$$\begin{aligned} g(\mathrm{Ad}_h X, \mathrm{Ad}_h Y) &= d\alpha(\mathrm{Ad}_h X, \Phi \circ \mathrm{Ad}_h Y) + \beta(\mathrm{Ad}_h X, \mathrm{Ad}_h Y) \\ &= d\alpha(\mathrm{Ad}_h X, \mathrm{Ad}_h \circ \Phi Y) + \beta(X, Y) = -(1/2)\alpha(\mathrm{Ad}_h[X, \Phi Y]) + \beta(X, Y) \\ &= -(1/2)\alpha([X, \Phi Y]) + \beta(X, Y) = g(X, Y) \end{aligned}$$

для любых h из R и X, Y из $\mathfrak{g}$.

Обратно, если аффинорная метрическая структура G Ad_R-инвариантна, то метрики $d\alpha_\Phi$ и β также Ad_R-инвариантны, поскольку являются сужениями метрики g. Для любых h из R и X, Y из D имеем

$$d\alpha(X, \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ \Phi \circ \mathrm{Ad}_h Y) = d\alpha(\mathrm{Ad}_h X, \Phi \circ \mathrm{Ad}_h Y) = d\alpha(X, \Phi Y),$$

т. е. $\mathrm{Ad}_h \circ \Phi = \Phi \circ \mathrm{Ad}_h$.

Предложение 3.4. *Пусть R — подгруппа радикала левоинвариантной 1-формы α и $g = (\alpha, \Phi, \beta)$ — Ad_R-инвариантная аффинорная метрическая структура. Тогда распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы R.*

Доказательство. Для любых h из R и X, Y из $\mathfrak{g}$ имеем

$$\begin{aligned} \beta(\mathrm{Ad}_h X, \mathrm{Ad}_h Y) &= g(\mathrm{Ad}_h X, \mathrm{Ad}_h Y) - d\alpha(\mathrm{Ad}_h X, \Phi \circ \mathrm{Ad}_h Y) \\ &= g(X, Y) - d\alpha(\mathrm{Ad}_h X, \mathrm{Ad}_h \circ \Phi Y) = g(X, Y) - d\alpha(X, \Phi Y) = \beta(X, Y). \end{aligned}$$

Теперь утверждение непосредственно следует из предложения 2.2.

Предложение 3.4 позволяет описать структуру алгебр Ли групп Ли, допускающих Ad_R-инвариантные аффинорные метрические структуры. Если распределение D на такой группе Ли неинволютивно, то ее алгебра Ли есть редуцируемая в смысле Номидзу ортогональная сумма распределения D и радикала $\mathfrak{r}$. Если распределение D инволютивно, то ее алгебра Ли есть полупрямое произведение подалгебры D и радикала $\mathfrak{r}$.

В § 2 показано, что если распределение D является подалгеброй, то форма α не может быть контактной структурой. Поэтому следующая теорема справедлива только для неконтактных левоинвариантных 1-форм.

Теорема 3.5. *Пусть R — подгруппа радикала левоинвариантной неконтактной 1-формы α, $g = (\alpha, \Phi, \beta)$ — Ad_R-инвариантная аффинорная метрическая структура на расслоении L и ∇ — связность Леви-Чивита метрики g. Тогда*

(1) *подалгебра $D = \mathrm{rad}\,\beta$ является связностью расслоения L; в случае, когда подгруппа радикала коммутативна, связность D является плоской и форма связности имеет вид*

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^{m} g(X, E_i) E_i,$$

где $E_1, \dots, E_m$ — фиксированный базис радикала формы α;

(2) *подгруппа радикала является вполне геодезическим подмногообразием группы G, т. е. образовано всевозможными геодезическими, выходящими из единицы группы G, и касательными к $\mathrm{rad}\,\alpha$;*

(3) *сужение* ∇ *на* D *есть связность Леви-Чивита метрики* $d\alpha_\Phi$ *на подгруппе* H, *порожденной подалгеброй* D.

Доказательство. (1) Используя предложение 3.4 и рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 2.5, получаем утверждение (1).

(2) Применяя инвариантное определение связности Леви-Чивита, выводим, что для любого X из $\operatorname{rad}\alpha = \mathfrak{r}$ и для любого Y из $\mathfrak{g}$

$$g(\nabla_X X, Y) = (1/2)(g(X, [X, Y]) - g(X, [Y, X]) + g(Y, [X, X])) = g(X, [X, Y]).$$

Поскольку метрика g Ad_R-инвариантна, оператор ad_X является кососимметричным (подробнее см. в [9]). Имеем

$$g(X, [X, Y]) = -g([X, X], Y) = 0,$$

т. е. $\nabla_X X = 0$. Следовательно, любая кривая вида $\exp(X(t))$, где $X \in \mathfrak{r}$, является геодезической с началом в единице группы G.

(3) Пользуясь ортогональностью подалгебр D и $\mathfrak{r}$ и кососимметричностью оператора ad_Z, получаем, что для любых X, Y из D и Z из $\mathfrak{r}$

$$g(\nabla_X Y, Z) = (1/2)(g(X, [Y, Z]) + g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y])) = (1/2)g(Z, [X, Y]) = 0,$$

т. е. $\nabla_X Y \in D$ для любых X и Y из D.

Замечание 3.6. Если аффинорная метрическая структура $g = (\alpha, \Phi, \beta)$ является Ad_H-инвариантной, где H — связная подгруппа, порожденная подалгеброй D, то сужение связности ∇ на радикал $\mathfrak{r}$ есть связность Леви-Чивита метрики β.

§ 4. K-аффинорные метрические структуры

Пусть $G = (\alpha, \Phi, \beta)$ — аффинорная метрическая структура на группе Ли G. По теореме Рисса о линейном функционале (см., например, [10]) существует единственное векторное поле ξ такое, что $\alpha(X) = g(\xi, X)$ для всех X из TG. Такое векторное поле называется *характеристическим векторным полем* аффинорной метрической структуры. Если аффинорная метрическая структура g левоинвариантна, то ее характеристическое векторное поле ξ также левоинвариантно, т. е. лежит в $\mathfrak{g}$.

Определение 4.1. Аффинорная метрическая структура g называется K-*аффинорной*, если ее характеристическое векторное поле ξ порождает однопараметрическую группу изометрий метрики g.

Для левоинвариантной аффинорной метрической структуры это определение эквивалентно тому, что метрика g является Ad_H-инвариантной, где H — одномерная подгруппа, порожденная характеристическим векторным полем.

Простейшим примером K-аффинорной метрической структуры является аффинорная метрическая структура $g = (\alpha, \Phi, \alpha\otimes\alpha)$, где α — контактная структура на группе G с характеристическим векторным полем ξ, которое порождает одномерный радикал формы α и является киллинговым векторным полем единичной длины. Такие метрические структуры называются K-*контактными* и изучены в [1].

Предложение 4.2. *Левоинвариантная аффинорная метрическая структура g с характеристическим векторным полем ξ является* K-*аффинорной тогда и только тогда, когда оператор* ad_ξ *кососимметричен относительно метрики g.*

Доказательство. Пусть $h(t)$ — однопараметрическая подгруппа, порожденная характеристическим векторным полем ξ. Тогда для любых X и Y из $\mathfrak{g}$ имеем

$$\frac{d}{dt}g(\mathrm{Ad}_{h(t)}X, \mathrm{Ad}_{h(t)}Y) = g([\xi, \mathrm{Ad}_{h(t)}X], \mathrm{Ad}_{h(t)}Y) + g(\mathrm{Ad}_{h(t)}X, [\xi, \mathrm{Ad}_{h(t)}Y]).$$

Если метрика g $\mathrm{Ad}_{h(t)}$-инвариантна, то при $t = 0$ получаем

$$g(\mathrm{ad}_\xi X, Y) + g(X, \mathrm{ad}_\xi Y) = 0,$$

и, обратно, если оператор ad_ξ кососимметричен, то

$$\frac{d}{dt}g(\mathrm{Ad}_{h(t)}X, \mathrm{Ad}_{h(t)}Y) = g([\xi, \mathrm{Ad}_{h(t)}X], \mathrm{Ad}_{h(t)}Y) + g(\mathrm{Ad}_{h(t)}X, [\xi, \mathrm{Ad}_{h(t)}Y]) = 0,$$

откуда $g(\mathrm{Ad}_{h(t)}X, \mathrm{Ad}_{h(t)}Y) = g(X, Y)$ при любых t.

Так же, как в доказательстве предложения 4.2, можно показать, что аффинорная метрическая структура g будет биинвариантной тогда и только тогда, когда для любого X из $\mathfrak{g}$ оператор ad_X кососимметричен относительно метрики g. Подробное доказательство можно найти в [9].

Теорема 4.3. *На любой связной группе Ли размерности ≥ 3 не существует биинвариантных аффинорных метрических структур с нетривиальным радикалом.*

Доказательство. Предположим, что на группе G существует биинвариантная аффинорная метрическая структура $g = (\alpha, \Phi, \beta)$ с нетривиальным радикалом. Пусть R — подгруппа радикала формы α и ξ — характеристическое векторное поле метрической структуры g. Подгруппа R является собственной подгруппой группы G и совпадает со связной компонентой единицы подгруппы изотропии присоединенного действия группы G на форму α. Для любых h из G и X из $\mathfrak{g}$ имеем

$$\mathrm{Ad}_h^* \alpha(X) = \alpha(\mathrm{Ad}_h X) = g(\mathrm{Ad}_h \xi, \mathrm{Ad}_h X) = g(\xi, X) = \alpha(X).$$

Таким образом, подгруппа изотропии совпадает со всей группой G и является связной. Отсюда следует, что $R = G$, но это противоречит тому, что подгруппа радикала является собственной подгруппой.

Предложение 4.4. *Пусть $g = (\alpha, \Phi, \beta)$ — левоинвариантная* K-*аффинорная метрическая структура на группе Ли G, ξ — ее характеристическое векторное поле и ∇ — ее связность Леви-Чивита. Тогда*

(1) $\xi \in \mathrm{rad}\,\alpha$*;*
(2) $\nabla_\xi X = -\Phi X$ *и* $\nabla_X \xi = -\Phi X - \mathrm{ad}_\xi X$ *для любого X из $\mathfrak{g}$;*
(3) $g(\nabla_X Y, \xi) = g(X, \Phi Y)$ *для любых X и Y из $\mathfrak{g}$;*
(4) $\mathrm{ad}_\xi = -2\Phi$.

Доказательство. (1) Используя предложение 4.2, получаем, что для любого X из $\mathfrak{g}$,

$$d\alpha(\xi, X) = -(1/2)\alpha([\xi, X]) = -(1/2)g(\xi, [\xi, x]) = (1/2)g([\xi, \xi], X) = 0,$$

т. е. $\xi \in \operatorname{rad}\alpha$.

(2) Применяя инвариантное определение связности Леви-Чивита и предложение 4.2, получаем, что для любых X и Y из $\mathfrak{g}$

$$g(\nabla_\xi X, Y) = (1/2)(\xi, [X, Y]) + g(X, [\xi, Y]) + g([\xi, X], Y) = (1/2)g(\xi, [X, Y]) \\ = (1/2)\alpha([X, Y]) = -d\alpha(X, Y) = -g(\Phi X, Y),$$

т. е. $\nabla_\xi X = -\Phi X$, равенство $\nabla_X \xi = -\Phi X - \operatorname{ad}_\xi X$ следует из условия, что кручение связности ∇ равно 0.

(3) Для любых X и Y из $\mathfrak{g}$ имеем

$$g(\nabla_X Y, \xi) = (1/2)(-g(X, [\xi, Y]) - g([\xi, X], Y) + g(\xi, [X, Y])) = (1/2)g(\xi, [X, Y]) \\ = (1/2)\alpha([X, Y]) = -d\alpha(X, Y) = g(X, \Phi Y).$$

(4) Используя (2) и (3) для любых X и Y из $\mathfrak{g}$, получаем

$$g(\operatorname{ad}_\xi X, Y) = -g(\Phi X, Y) - g(\nabla_X \xi, Y) = -g(\Phi X, Y) + g(\xi, \nabla_X Y) \\ = -g(\Phi X, Y) + g(X, \Phi Y) = -2g(\Phi X, Y),$$

т. е. $\operatorname{ad}_\xi X = -2\Phi X$.

Предложение 4.5. *Если левоинвариантное векторное поле ξ лежит в центре алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, то на группе G не существует* K-*аффинорных метрических структур с характеристическим векторным полем ξ.*

Доказательство. Предположим, что на группе G существует K-аффинорная метрическая структура g, для которой ξ является характеристическим векторным полем. По предложению 4.4 имеем $\Phi = -(1/2)\operatorname{ad}_\xi = 0$, что противоречит определению 3.1.

Обозначим через E ядро формы α. Коразмерность распределения E равна 1, и алгебра Ли группы G раскладывается в ортогональную сумму распределения E и прямой, порожденной характеристическим векторным полем ξ.

Теорема 4.6. *Секционная кривизна k* K-*аффинорной метрической структуры $g = (\alpha, \Phi, \beta)$ на группе Ли G с характеристическим векторным полем ξ равна* 1 *в любом двумерном направлении, содержащем ξ.*

Доказательство. Без потери общности можно доказать равенство $k(\xi, X) = 1$, считая, что векторные поля ξ и X имеют единичную длину и X лежит в E. Поскольку ξ лежит в $\operatorname{rad}\alpha$, по теореме 3.5 $\nabla_\xi \xi = 0$. Используя предложение 4.4, получаем

$$k(\xi, X) = g(\nabla_{[\xi, X]}\xi, X) + g(\nabla_\xi \nabla_X \xi, X) - g(\nabla_X \nabla_\xi \xi, X) = -g(\Phi \circ \operatorname{ad}_\xi X, X) \\ - g(\operatorname{ad}_\xi^2 X, X) - g(\Phi \nabla_X X, X) = 2g(X, X) + g(\Phi^2 X, X) = g(X, X) = 1.$$

Следствие 4.7. *Кривизна Риччи* K-*аффинорной метрической структуры g на группе Ли G размерности n в направлении ее характеристического векторного поля ξ равна $n - 1$.*

Доказательство. Зафиксируем ортонормированный базис $E_1, \ldots, E_{n-1}$ распределения E. По теореме 4.6 $k(E_i, \xi) = 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Тогда

$$\operatorname{Ric}(\xi) = \sum_{i=1}^{n-1} k(E_i, \xi) = n - 1.$$

Следствие 4.8. *На группе Ли размерности $n \geq 3$ не существует* К-*аффинорных левоинвариантных метрических структур с отрицательной секционной кривизной. Любая левоинвариантная* К-*аффинорная метрическая структура с положительно определенной секционной кривизной имеет скалярную кривизну не меньше $n-1$.*

Это сразу следует из того, что К-аффинорная метрическая структура всегда имеет секционные кривизны, равные 1, в некоторых направлениях, а скалярная кривизна римановой метрики равна сумме кривизн Риччи по всем базисным направлениям.

§ 5. Нормальные аффинорные метрические структуры

Пусть $g = (\alpha, \Phi, \beta)$ — левоинвариантная аффинорная метрическая структура на группе Ли G, ξ — характеристическое векторное поле метрической структуры g, $\mathfrak{r} = \operatorname{rad}\alpha, D = \operatorname{rad}\beta$.

Определение 5.1. Левоинвариантная аффинорная метрическая структура g на группе Ли G называется *нормальной*, если $\operatorname{ad}_{\Phi X} = \Phi \circ \operatorname{ad}_X$ для всех X из алгебры Ли группы G.

По теореме 1.5 размерность распределения D всегда четна. Если распределение D является подалгеброй алгебры Ли группы G и H — связная подгруппа, порожденная подалгеброй D, то аффинор Φ задает левоинвариантную почти комплексную структуру на H. В [5, гл. 9] доказано, что любая почти комплексная структура J, удовлетворяющая условию $J \circ \operatorname{ad}_X = \operatorname{ad}_{JX}$, является интегрируемой. Таким образом, аффинор Φ нормальной аффинорной метрической структуры g задает комплексную структуру на подгруппе H, а сужение метрики g на H является кэлеровой метрикой на H.

Покажем теперь, что нормальная аффинорная метрическая структура не может быть К-аффинорной.

Предложение 5.2. *Множества левоинвариантных нормальных и* К-*аффинорных метрических структур на группе Ли G не пересекаются.*

Доказательство. Пусть g — нормальная аффинорная метрическая структура с аффинором Φ и характеристическим векторным полем ξ. Если метрическая структура g является К-аффинорной, то в силу п. (4) предложения 4.4 $\Phi = -(1/2)\operatorname{ad}_\xi$. Для любого X из $\mathfrak{g}$ получаем

$$\operatorname{ad}_{\Phi X} = -(1/2)\operatorname{ad}_{[\xi,X]} = (1/2)(\operatorname{ad}_X \circ \operatorname{ad}_\xi - \operatorname{ad}_\xi \circ \operatorname{ad}_X).$$

С другой стороны,

$$\operatorname{ad}_{\Phi X} = \Phi \circ \operatorname{ad}_X = -(1/2)\operatorname{ad}_\xi \circ \operatorname{ad}_X .$$

Сравнивая правые части двух последних равенств, имеем

$$\operatorname{ad}_X \circ \operatorname{ad}_\xi = 0,$$

и, в частности, $\operatorname{ad}_\xi^2 = 0$. Таким образом, $\Phi^2 = 0$, что противоречит определению 3.1.

Пусть теперь G — группа Ли размерности $2n$ и J — левоинвариантная комплексная структура на G, сохраняющая нормальную аффинорную метрическую структуру $g = (\alpha, \Phi, \beta)$. Фундаментальная 2-форма эрмитовой метрики g имеет вид

$$\Omega(X,Y) = d\alpha(X, \Phi \circ JY) + \beta(X, JY).$$

Поскольку комплексная структура J также сохраняет форму β и $d\Omega(X,Y) = d\beta(X,JY)$, нормальная аффинорная метрическая структура является кэлеровой тогда и только тогда, когда фундаментальная 2-форма метрики радикала замкнута.

Так как сужение фундаментальной 2-формы кэлеровой нормальной метрической структуры g на подгруппу радикала R является левоинвариантной симплектической структурой на R, получаем следующий результат.

Предложение 5.3. *Пусть α — левоинвариантная незамкнутая 1-форма на группе Ли G, R — подгруппа радикала формы α, а J — левоинвариантная комплексная структура на группе G. Тогда если группа G допускает левоинвариантную кэлерову нормальную аффинорную метрическую структуру, ассоциированную с 1-формой α и комплексной структурой J, то подгруппа радикала R допускает левоинвариантную симплектическую структуру, инвариантную относительно комплексной структуры J.*

Обратно, если подгруппа радикала не допускает левоинвариантных симплектических структур, инвариантных относительно комплексной структуры J, то группа G не допускает левоинвариантных кэлеровых нормальных аффинорных метрических структур, ассоциированных с комплексной структурой J.

Если почти комплексная структура J отображает подпространства $\mathfrak{r}$ и D в себя, то ее можно отождествить с парой почти комплексных структур J_R и J_D, где J_R — сужение J на $\mathfrak{r}$, а J_D — сужение J на D. Такая почти комплексная структура называется *приводимой.*

Пусть P — левоинвариантный эндоморфизм алгебры Ли группы G. Обозначим через A_P левоинвариантное тензорное поле типа $(2,1)$ следующего вида:

$$A_P(X,Y) = P[X,Y] - [PX,PY] - [PX,Y] - [X,PY] \quad \text{для всех } X \text{ и } Y \text{ из } \mathfrak{g},$$

а через $\mathbf{C}(\Phi)$ — множество всех левоинвариантных эндоморфизмов алгебры Ли группы G, антикоммутирующих с аффинором Φ.

Теорема 5.4 (теорема о редукции). *Пусть $g = (\alpha, \Phi, \beta)$ — левоинвариантная нормальная аффинорная метрическая структура на группе Ли G, распределение $D = \operatorname{rad}\beta$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, $J = (J_R, J_D)$ — левоинвариантная приводимая почти комплексная структура на G, сохраняющая $d\alpha$, и $A_P \equiv 0$ на D для любого P из $\mathbf{C}(\Phi)$. Тогда структура J интегрируема на G тогда и только тогда, когда структура J_R интегрируема на подгруппе радикала R.*

Доказательство. В [11] доказано, что если J_0 — фиксированная почти комплексная структура, сохраняющая метрику g, то любая почти комплексная структура J, сохраняющая фундаментальную 2-форму метрики g, ассоциированную с почти комплексной структурой J_0, имеет вид

$$J = J_0 \circ (I+P) \circ (I-P)^{-1},$$

где I — поле тождественных операторов, P — поле симметричных относительно метрики g линейных операторов таких, что $J_0 \circ P = -P \circ J_0$ и $\det(I - P^2) \neq 0$. Поскольку метрическая структура g является нормальной, ее аффинор Φ является комплексной структурой на D. Выбирая в качестве J_0 аффинор Φ, получаем, что любая почти комплексная структура J_D, сохраняющая $d\alpha$, имеет вид

$$J_D = \Phi \circ (I+P) \circ (I-P)^{-1} = (I-P) \circ \Phi \circ (I-P)^{-1},$$

где P — симметричный относительно метрики g эндоморфизм подалгебры D, антикоммутирующий с аффинором Φ.

Положим $Q = I - P$. Поскольку $A_P \equiv 0$ на D, для любых X, Y из D имеем

$$[QX, QY] = [X, Y] - [PX, Y] - [X, PY] + [PX, PY] = [X, Y] - P[X, Y] = Q[X, Y],$$

т. е. линейный оператор Q является автоморфизмом подалгебры D и $J_D = Q \circ \Phi \circ Q^{-1}$. Так как почти комплексная структура J_D изоморфна комплексной структуре Φ, она интегрируема на D.

Таким образом, интегрируемость почти комплексной структуры J сводится только к интегрируемости структуры J_R на радикале $\mathfrak{r}$.

Следствие 5.5. *Пусть $g = (\alpha, \Phi, \beta)$ — левоинвариантная нормальная аффинорная метрическая структура на группе Ли G, распределение $D = \operatorname{rad}\beta$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, J — левоинвариантная приводимая почти комплексная структура на G, сохраняющая $d\alpha$, и $A_P \equiv 0$ на D для любого P из $\mathbf{C}(\Phi)$. Тогда если подгруппа радикала R формы α коммутативна, структура J интегрируема на G.*

Доказательство. В [5, гл. 9] доказано, что почти комплексная структура J интегрируема тогда и только тогда, когда для любых векторных полей X и Y

$$[JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y] = 0.$$

В силу коммутативности подгруппы R данное равенство выполняется для любых X и Y из $\mathfrak{r}$, и структура J интегрируема по предложению 5.3.

Пусть $g = (\alpha, \Phi, \beta)$ — эрмитова нормальная аффинорная метрическая структура на группе Ли G. Метрическая структура g называется *локально конформно кэлеровой*, если для любого элемента $x \in G$ существуют односвязная окрестность U и определенные в этой окрестности функция f и кэлерова метрика h такие, что сужение метрики g на окрестность U равно $\exp(-f)h$. В [12] доказано, что эрмитова метрическая структура g с фундаментальной 2-формой Ω является локально конформно кэлеровой тогда и только тогда, когда на группе G существует замкнутая 1-форма η такая, что $d\Omega = \eta \wedge \Omega$. Если J — приводимая комплексная структура, сохраняющая метрическую структуру g, то в силу равенства $d\Omega(X, Y) = d\beta(X, JY)$ получаем, что нормальная аффинорная метрическая структура является локально конформно кэлеровой тогда и только тогда, когда на группе G существует замкнутая 1-форма η такая, что $d\beta_J = \eta \wedge \Omega$, где $d\beta_J(X, Y) = \beta(X, JY)$ для всех X и Y из $\mathfrak{g}$. Очевидно, что форма η не может совпадать с формой α.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blair D. E.* Contact manifolds in Riemannian geometry. Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1976. (Lect. Notes Math.).
2. *Chu B.-Y.* Symplectic homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 197. P. 145–159.
3. *Diatta A.* Left invariant contact structures on Lie groups // arXiv.org/math.DG/0403555. 2004. V. 2.
4. *Khakimdjanov Yu., Goze M., Medina A.* Symplectic or contact structures on Lie groups // arXiv.org/math.DG/0205290. 2002. 18 P.
5. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.
6. *Серр Ж.-П.* Группы Ли и алгебры Ли. М.: Мир, 1969.
7. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
8. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Т. II.

9. *Milnor J.* Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. V. 21. P. 293–329.

10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

11. *Смоленцев Н. К.* Пространства римановых метрик // Современная математика и ее приложения. М.: ВИНИТИ, 2003. Т. 31. С. 69–146.

12. *Dragomir S., Ornea L.* Locally conformal Kahler geometry. Basel: Birkhauser, 1998. (Progr. Math.; V. 155).

Статья поступила 11 ноября 2009 г.

Корнев Евгений Сергеевич
Кемеровский гос. университет, кафедра математического анализа,
ул. им. В. Терешковой, 40, Кемерово 650043
`q148@mail.ru`