*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6*

*УДК 517.983.23*

# УСЛОВИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КОНЕЧНОМЕРНОСТИ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

**К. В. Сторожук**

**Аннотация.** Пусть $X$ — банахово пространство, $T: X \to X$ — линейный оператор, ограниченный со степенями. Положим $X_0 = \{x \in X \mid T^n x \to 0\}$. Пусть существует компакт $K \subset X$ такой, что $\liminf\limits_{n\to\infty} \rho\{T^n x, K\} \leq \eta < 1$ для любого $x \in X$, $\|x\| \leq 1$. Доказано, что если $\eta < \frac{1}{2}$, то $\operatorname{codim} X_0 < \infty$. (При $\eta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ это верно для рефлексивных $X$, но неверно в общем случае.)

**Ключевые слова:** асимптотически конечномерная полугруппа операторов.

## 1. Определения, формулировки и известные результаты

В статье $X$ — банахово пространство (вещественное или комплексное), $T : X \to X$ — линейный оператор, ограниченный со степенями, т. е. $\|T^n\| \leq C < \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Положим $X_0 = \{x \in X \mid T^n x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$. Это пространство замкнуто. Оператор $T$ называется *асимптотически конечномерным*, если $\operatorname{codim} X_0 < \infty$.

Цель статьи — доказать асимптотическую конечномерность при $\eta < \frac{1}{2}$ в следующем условии ($B_X$ — единичный шар $X$):

$$\text{существует компакт } K \subset X : \forall x \in B_X \quad \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) \leq \eta < 1. \tag{1}$$

В ряде работ вопросы асимптотической конечномерности исследовались при более жестких, чем (1), условиях. Они заключаются в замене в (1) фразы «$\liminf \dots \leq \eta$» следующими фразами: (a) «$\lim \dots = 0$»; (b) «$\limsup \dots \leq \eta$»; (c) «$\liminf \dots = 0$».

Вопросы достаточности этих условий для асимптотической конечномерности аналогичны и для однопараметрических полугрупп операторов.

В случае (a) $T$ асимптотически конечномерен и даже расщепляем, т. е. $X = X_0 \oplus L$, где $L$ — конечномерное $T$-инвариантное подпространство. Для марковских полугрупп в $L_1$ это доказано в [1], для положительных операторов в банаховых решетках — в [2], для произвольного $X$ — в [3, 4]. Для операторов Фробениуса — Перрона условие, аналогичное условию (a), изучалось еще в работе [5]. В случае (b) асимптотическая конечномерность установлена в [6], см. также работу [7], где среди прочего условие (b) исследовано для произвольных

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ 6613.2010.1) и интеграционного проекта СО РАН № 30.

абелевых полугрупп операторов. В более ранних работах вариант условия (b) для марковских операторов в $L_1$ изучался в [8], затем для банаховых решеток — в [9–11]. В контексте марковских операторов, по-видимому, в самом общем на настоящий момент виде условие (b) исследовано в работе [12] для так называемых сетей Лотца — Ребигера. Достаточность условия (c) для асимптотической конечномерности доказана в [13].

В [14] появилось условие (1) и был задан вопрос 1.3.33: *будет ли $T$ в этом случае асимптотически конечномерным*? В [15] дан положительный ответ в случае рефлексивного $X$ (заметим, что в этом случае $T$ расщепляем). В [16] мы ответили отрицательно на вопрос [14], предъявив изометрии пространства $C(M)$, удовлетворяющие условию (1) с точкой $K$ для $\eta = \frac{1}{2}$. В частности, если $c$ — банахово пространство сходящихся последовательностей, $\lambda_n \in \mathbb{C}, |\lambda_n| \equiv 1$, $\lambda_n \to \lambda$ и $\{\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ — множество Кронекера, то оператор умножения $T : c \to c$, $(Tx)_n = \lambda_n x_n$, — изометрия, удовлетворяющая условию (1) при $\eta = \frac{1}{2}$ для одноточечного $K$.

В этой работе мы показываем, что при $\eta < \frac{1}{2}$ оператор $T$ является асимптотически конечномерным. Таким образом, зазора между положительным и отрицательным ответами на вопрос 1.3.33 в [14] в том виде, как он поставлен, нет.

## 2. Основная теорема

**Теорема.** *Пусть $T$ удовлетворяет* (1). *Если $\eta < \frac{1}{2}$, то $T$ асимптотически конечномерен, т. е.* $\operatorname{codim} X_0 < \infty$.

Доказательство. Профакторизуем по $X_0$, получим оператор на фактор-пространстве $X/X_0$ с фактор-нормой, снова удовлетворяющий условию (1) с тем же $\eta$ относительно компакта $\overline{K} = K + X_0 \subset X/X_0$; проверяется, что $(X/X_0)_0 = \{0\}$. Итак, достаточно доказать, что если $\eta < \frac{1}{2}$ и $X_0 = 0$, то $\dim X < \infty$.

Сначала докажем, что условие $\eta < \frac{1}{2}$ гарантирует равномерную отделенность от нуля итераций $\|T^n x\|$ (лемма 1): $\frac{1-2\eta}{C}\|x\| \le \|T^n x\| \le C\|x\|$ для любого $n$. Из этой оценки ясно, что на пространстве $X$ норма $\|x\|_1 = \limsup\limits_{n\to\infty} \|T^n x\|$ эквивалентна исходной. В новой норме оператор $T$ — изометрия. Однако в новой норме условие (1) может перестать выполняться.

Лемма 2 выводит из условия (1) условие (2), достаточно громоздкое, зато, очевидно, сохраняющееся при перенормировке:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : \forall F = \{x_1, \dots, x_m\} \subset B_X$$
$$\exists x_{i_1}, \dots, x_{i_p} \in F,\ i_1 < \dots < i_p,\ n_1 \le \dots \le n_p \in \mathbb{N},\ \left\| \sum_{j=1}^{p} \pm T^{n_j} x_{i_j} \right\| \le \varepsilon. \quad (2)$$

(Полные формулировки и доказательства лемм — в разд. 3 статьи.)

Предположим, что изометрия $T$ бесконечномерного пространства $X$ удовлетворяет условию (2), и придем к противоречию. Зафиксируем $\varepsilon < \frac{1}{2}$, возьмем $m = m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, как в условии (2). Всякая изометрия допускает собственные $T$-инвариантные подпространства (для комплексного $X$ этот результат восходит к [17], для вещественного $X$ это показано в [18]), и цепочки таких подпространств произвольной длины, в частности, длины, большей $m$; этот факт приведет к противоречию. Рассмотрим такую цепочку $X = L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_m \supset L_{m+1}$. Выберем для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ в пространстве $L_i$ $\varepsilon$-перпендикуляр к

$L_{i+1}$, т. е. такой вектор $x_i \in L_i$, что $\|x_i\| = 1$ и $\rho(x_i, L_{i+1}) > 1 - \varepsilon$. Пусть $F = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Согласно условию (2) найдутся номера $i_1 < i_2 < \dots < i_p \in \{1, \dots, m\}$ и степени $n_1 < n_2 < \dots < n_p \in \mathbb{N}$ такие, что для некоторого выбора знаков $\pm$

$$\|T^{n_1} x_{i_1} \pm T^{n_2} x_{i_2} + \dots \pm T^{n_p} x_{i_p}\|_1 \le \varepsilon. \tag{3}$$

Поскольку $T$ — изометрия, а $n_1$ — самая маленькая степень, из (3) следует, что

$$\|x_{i_1} \pm T^{n_2 - n_1} x_{i_2} \pm \dots \pm T^{n_p - n_1} x_{i_p}\|_1 \le \varepsilon. \tag{4}$$

Все слагаемые в (4), кроме первого, лежат в пространстве $L_{i_2}$, а первое слагаемое $(1-\varepsilon)$-удалено от $L_{i_2}$. Поэтому норма в (4) не может быть меньше $1 - \varepsilon$; противоречие. Итак, $\dim X < \infty$ (даже $< m$). Теорема доказана.

### 3. Формулировки и доказательства лемм 1 и 2

**Лемма 1.** *Если $\eta < \frac{1}{2}$, то $\forall x \in X$ $\forall n$ $\|T^n x\| \ge \frac{1-2\eta}{C} \rho(x, X_0)$. В частности, если $\eta < \frac{1}{2}$ и $X_0 = 0$, то*

$$\forall x \in X \ \forall n \quad \|T^n x\| \ge \frac{1-2\eta}{C} \|x\|.$$

Доказательство проведем в три этапа. Фиксируем $\alpha$, $2\eta < \alpha < 1$.

1. Для каждого $x \in B_X$ существуют сколь угодно большие пары $n_1 < n_2$, $n_2$ сколь угодно больше $n_1$, такие, что $\|T^{n_1} x - T^{n_2} x\| \le \alpha \|x\|$.

В самом деле, в силу компактности $K$ некоторые итерации $T^{n_i}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ вектора $\frac{x}{\|x\|} \in B_X$ подходят $\frac{\alpha}{2}$-близко к одному и тому же элементу $K$, а значит, $\alpha$-близки между собой. Остальное следует из однородности нормы и оператора.

2. Пусть $\varepsilon > 0$ и $x \in X$. Если $\|T^n x\| \le \varepsilon$ для некоторого $n$, то найдется вектор $x_1$ такой, что $\|x - x_1\| \le C\varepsilon$ и $\|T^m x_1\| \le \alpha\varepsilon$ для некоторого $m$.

В самом деле, шаг 1, примененный к вектору $T^n x$, позволяет заметить, что существуют $m_1 > n$, $m_2 > m_1 + n$ такие, что $\|T^{m_1} x - T^{m_2} x\| \le \alpha\varepsilon$. Положим $x_1 = x - T^{m_2 - m_1} x$. Тогда

$$\|x - x_1\| = \|T^{m_2 - m_1} x\| \le C\|T^n x\| \le C\varepsilon, \quad \|T^{m_1} x_1\| = \|T^{m_1} x - T^{m_2} x\| \le \alpha\varepsilon.$$

3. Если $\|T^n x\| \le \varepsilon$ для некоторого $n$, то $\rho(x, X_0) \le \frac{1}{1-\alpha} C\varepsilon$.

В самом деле, строим $x_1$, как в п. 2: $\|x - x_1\| \le C\varepsilon$ и $\|T^{m_1} x_1\| \le \alpha\varepsilon$ для некоторого $m_1$. Применяя п. 2 уже к вектору $x_1$, строим $x_2$: $\|x_1 - x_2\| \le C\alpha\varepsilon$ и $\|T^{m_2} x_2\| \le \alpha^2 \varepsilon$ для некоторого $m_2$. Продолжая применять рассуждение п. 2 к вновь построенным векторам, получаем последовательность векторов $x_k$ такую, что

$$\|x_k - x_{k-1}\| \le C\alpha^{k-1}\varepsilon, \quad \|T^{m_k} x_k\| \le \alpha^k \varepsilon.$$

Последовательность $x_k$ сходится к вектору $x_\infty$, лежащему в $X_0$. Но тогда

$$\rho(x, X_0) \le \|x - x_\infty\| \le (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots) C\varepsilon = \frac{1}{1-\alpha} C\varepsilon.$$

Устраняя $\varepsilon$ и обращая неравенства, перепишем утверждение 3 в эквивалентном виде: $\|T^n x\| \ge \frac{1-\alpha}{C} \rho(x, X_0)$ для всех $n$. Остальная часть леммы очевидна.

Замечание. Может возникнуть впечатление, что условие $X_0 = 0$ уже гарантирует равномерную отделенность от нуля орбит $T^n x$, даже если не требовать выполнения (1). Однако это не так. Рассмотрим пространство $l_2(\mathbb{Z})$

двусторонних последовательностей. Оператор $T : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ взвешенного правого сдвига определим формулой $(Tx)_n = \begin{cases} \frac{x_{n-1}}{2}, & n \le 0 \\ x_{n-1}, & n > 0 \end{cases}$. Ясно, что $\|T\| = 1$, $X_0 = 0$, но $\forall \varepsilon > 0\ \exists x\ \|T^n x\| \le_{n\to\infty} \varepsilon \|x\|$.

Не исключено, что равномерная отделенность снизу от $X_0$ имеет место и при $\frac{1}{2} \le \eta < 1$. Однако следующая лемма при $\eta \ge \frac{1}{2}$ уже неверна.

**Лемма 2.** *Пусть оператор $T : X \to X$ удовлетворяет условию (1) и $\eta < \frac{1}{2}$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $m = m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для всякого множества $F = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset B_X$ из $m$ элементов*

$$\exists x_{i_1}, \dots, x_{i_p} \in F\ (i_1 < \dots < i_p), \quad n_1 \le \dots \le n_p \in \mathbb{N}, \quad \left\| \sum_{j=1}^{p} \pm T^{n_j} x_{i_j} \right\| \le \varepsilon$$

*при подходящей расстановке знаков $\pm$.*

Доказательство. Возьмем такое же $\alpha$, как в лемме 1: $2\eta < \alpha < 1$, и найдем конечное $m_\alpha$. Оказывается, можно взять $m_{(\alpha^n)} = m_\alpha^n$. Это закончит доказательство, поскольку $\alpha^n$ может быть сделано сколь угодно малым.

Пусть $\delta = \frac{\alpha}{2} - \eta > 0$. В компакте $K$ существует конечная $\delta$-сеть $\{y_1, y_2, \dots, y_s\}$, положим $m = m_\alpha = s + 1$.

Пусть $F = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset B_X$. Для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ в орбите $\{T^n x_i,\ n \in \mathbb{N}\}$ есть сколь угодно большие степени $n$, для которых $T^n x_i$ $\eta$-близки к компакту $K$. Среди этих степеней, в свою очередь, найдется бесконечное множество $N(i)$ такое, что для каждого $n \in N(i)$ вектор $T^n x_i$ $(\eta + \delta)$-близок к какому-то фиксированному элементу $y_{j(i)}$ сети, $j(i) \in \{1, \dots, s\}$ (ср. с первым шагом доказательства леммы 1). Поскольку $m > s$, $j(i_1) = j(i_2) = j$ для некоторых $i_1 < i_2$ и для любых $n_1 \in N(i_1)$, $n_2 \in N(i_2)$ выполнено

$$\|T^{n_1} x_{i_1} - T^{n_2} x_{i_2}\| \le \|T^{n_1} x_{i_1} - y_j\| + \|y_j - T^{n_2} x_{i_2}\| \le 2(\eta + \delta) = \alpha.$$

В силу однородности нормы и линейного оператора получаем

$$\|x_1\|, \dots, \|x_m\| \le r \Rightarrow\ \exists i_1 < i_2,\ n_1 < n_2 : \|T^{n_1} x_{i_1} - T^{n_2} x_{i_2}\| \le \alpha r. \qquad (5)$$

Итак, лемма доказана для $\varepsilon = \alpha$. Перейдем от $\alpha$ к $\alpha^2$. В качестве $m_{\alpha^2}$ возьмем число $m^2 = m_\alpha^2$. Рассмотрим произвольный набор $F$ из $m^2$ векторов 1-шара. Разобьем его на $m$ последовательных упорядоченных наборов $F_1, \dots, F_m$ по $m$ векторов. В каждом $F_j$ можно согласно уже доказанному выбрать пару векторов $x_{i_{(j,1)}}$ и $x_{i_{(j,2)}}$, $i_{(j,1)} < i_{(j,2)}$, и подобрать степени $n_{(j,1)} \le n_{(j,2)}$ так, что

$$y_j = T^{n_{(j,1)}} x_{i_{(j,1)}} - T^{n_{(j,2)}} x_{i_{(j,2)}}, \quad \|y_1\|, \dots, \|y_m\| \le \alpha. \qquad (6)$$

Из этих $y_1, \dots, y_m$ согласно (5) выберем $y_{j_1}$, $y_{j_2}$, $j_1 < j_2$, такие, что

$$\exists k_1 < k_2\ \|T^{k_1} y_{j_1} - T^{k_2} y_{j_2}\| \le \alpha^2. \qquad (7)$$

После подстановки в (7) выражений $y_j$ из (6) получаем

$$\|T^{k_1}(T^{n_{(j_1,1)}} x_{i_{(j_1,1)}} - T^{n_{(j_1,2)}} x_{i_{(j_1,2)}}) - T^{k_2}(T^{n_{(j_2,1)}} x_{i_{(j_2,1)}} - T^{n_{(j_2,2)}} x_{i_{(j_2,2)}})\| \le \alpha^2.$$

Число $k_2$ следует выбрать настолько больше $k_1$, что $k_1 + n_{(j_1,2)} \le k_2 + n_{(j_2,1)}$. После раскрытия скобок получится сумма четырех векторов, степени и номера которых не убывают, как этого требует заключение доказываемой леммы.

Повторяя рассуждение, начатое после формулы (5), получаем: заключение леммы справедливо для $\alpha^3$, $\alpha^4$, .... В качестве $m_{\alpha^n}$ берем $m_\alpha^n$ (при этом в соответствующем выражении «$\sum \pm \dots$» будет $2^n$ слагаемых). Лемма 2 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Lasota A., Li T.-Y., Yorke J. A.* Asymptotic periodicity of the iterates of Markov operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 286. P. 751–764.
2. *Bartoszek W.* Asymptotic periodicity of the iterates of positive contractions on Banach lattices // Studia Math. 1988. V. 91, N 3. P. 179–188.
3. *Vu Quoc Ph'ong.* Asymptotic almost periodicity and compactifying representations of semigroups // Ukrain. Mat. Zh. 1986. V. 38. P. 688–692.
4. *Sine R.* Constricted systems // Rocky Mountain J. Math. 1991. V. 21. P. 1373–1383.
5. *Lasota A., Yorke J. A.* Exact dynamical systems and the Frobenius–Perron operator // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 273, N 1. P. 375–384.
6. *Emel'yanov E. Yu., Wolff M.* Quasi-constricted linear operators on Banach spaces // Studia Math. 2001. V. 144, N 2. P. 169–179.
7. *Emel'yanov E. Yu., Wolff M.* Quasi constricted linear representations of abelian semigroups on Banach spaces // Math. Nachr. 2002. V. 233/234. P. 103–110.
8. *Komornik J., Lasota A.* Asymptotic decomposition of Markov operators // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1987. V. 35, N 5–6. P. 321–327.
9. *Räbiger F.* Attractors and asymptotic periodicity of positive operators on Banach lattices // Forum Math. 1995. V. 7, N 6. P. 665–683.
10. *Emel'yanov E. Yu., Wolff M.* Mean ergodicity on Banach lattices and Banach spaces // Arch. Math. (Basel). 1999. V. 72, N 3. P. 214–218.
11. *Горохова С. Г., Емельянов Э. Ю.* Достаточное условие порядковой ограниченности аттрактора положительного эргодичного оператора, действующего в банаховой решетке // Мат. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 3–11.
12. *Emel'yanov E. Yu., Erkursun N.* Lotz–Räbiger's nets of Markov operators in $L_1$-spaces // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 371. P. 777–783.
13. *Storozhuk K. V.* An extension of the Vu–Sine theorem and compact-supercyclicity // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 332, N 2. P. 1365–1370.
14. *Emel'yanov E. Yu.* Non-spectral asymptotic analysis of one-parameter operator semigroups. Basel: Birkhauser, 2007. (Oper. Theory Adv. Appl.; V. 173).
15. *Сторожук К. В.* Медленно меняющиеся векторы и асимптотическая конечномерность полугруппы операторов // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 928–932.
16. *Сторожук К. В.* Изометрии с плотными обмотками тора в $C(M)$ // Функцион. анализ и его приложения. (Принята к печати.)
17. *Godement R.* Théorèmes taubériens et théorie spectrale // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., III Sér. 1947. V. 64. P. 119–138.
18. *Сторожук К. В.* Симметричные инвариантные подпространства у комплексификаций линейных операторов // Мат. заметки. (Принята к печати.)


*Статья поступила 15 ноября 2010 г.*

Сторожук Константин Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
stork@math.nsc.ru