Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 512.554.3

ОБ ОПРЕДЕЛИМОСТИ СЛОЖЕНИЯ В АЛГЕБРАХ ЛИ

К. Н. Пономарёв

Аннотация. Получен ответ на вопрос И. В. Аржанцева об определимости структуры полупростой алгебры Ли ее мультипликативным группоидом.

Ключевые слова: кольцо Ли, алгебра Ли, полупростая алгебра, регулярная алгебра.

Кольцо Ли L называется UA-*кольцом* (*кольцом с однозначным сложением* — unique addition ring), если любой автоморфизм его мультипликативного группоида является автоморфизмом L как кольца. Иными словами, любая биекция $\varphi : L \to L$, для которой при любых $u, v \in L$ выполнено тождество $\varphi([u, v]) = [\varphi(u), \varphi(v)]$, является автоморфизмом кольца, т. е. оказывается выполненным тождество $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$.

Определение различных классов алгебр Ли, состоящих из UA-колец, имеет давнюю историю (см. работы И. В. Аржанцева [1, 2]). В этих статьях доказано, что полупростые алгебры Ли и, более обще, параболические подалгебры полупростых алгебр Ли над алгебраически замкнутыми полями нулевой характеристики являются UA-кольцами (будем далее ссылаться на этот результат как на теорему Аржанцева). Там же поставлена следующая проблема о возможности уточнения этого результата.

Алгебру Ли L над полем K назовем UA-*алгеброй,* если любая биекция $\varphi : L \to L$, для которой при любых $u, v \in L$ выполнено тождество $\varphi([u, v]) = [\varphi(u), \varphi(v)]$, является полулинейным автоморфизмом этой K-алгебры. Иными словами, как кольцо L является UA-кольцом, и, кроме того, биекция φ из определения является *полулинейным отображением* алгебры как векторного пространства: найдется автоморфизм поля $\alpha : K \to K$, для которого при любых $k \in K$, $v \in L$ выполняется $\varphi(kv) = k^{\alpha}\varphi(v)$.

Проблема 1. *Верно ли, что любая полупростая алгебра Ли является* UA-*алгеброй?*

Мы используем результаты И. В. Аржанцева и решаем эту проблему для алгебр Ли над алгебраически замкнутыми полями нулевой характеристики. Доказано такое общее утверждение.

Теорема 1. *Пусть R является параболической подалгеброй полупростой алгебры Ли L над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики K. Алгебра R является* UA-*алгеброй тогда и только тогда, когда алгебра Ли L простая.*

Из этого результата в силу структурной теории полупростых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики (см. [3]) вытекает

Следствие 1. *Полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики является* UA*-алгеброй тогда и только тогда, когда она является простой алгеброй Ли.*

Доказательство теоремы 1 вытекает из результата автора об автоморфизмах регулярных подалгебр редуктивных алгебр Ли как колец. Приведем этот результат и необходимые для его формулировки определения.

Рассмотрим редуктивную алгебру Ли L и ее подалгебру R. Подалгебра R называется *регулярной* (в статьях автора такие подалгебры назывались инвариантными), если в алгебре L найдется такая подалгебра Картана C, относительно присоединенного действия которой подалгебра R инвариантна, $[C, R] \subseteq R$. Заметим, что параболические подалгебры редуктивной алгебры R являются очевидными примерами регулярных подалгебр: они инвариантны относительно присоединенного действия содержащихся в них подалгебр Картана.

Автоморфизм φ алгебры R как кольца называется *специальным автоморфизмом*, если он тождествен по модулю центра алгебры, т. е. при любом $r \in R$ имеем $[(\varphi(r)-r), R] = 0$. Композиция полулинейного автоморфизма ψ алгебры R с некоторым специальным автоморфизмом $\theta : \varphi = \theta \circ \psi$ называется *стандартным автоморфизмом*. Отметим, что если алгебра Ли R имеет тривиальный центр, $\mathfrak{Z}(R) = 0$, то ее специальные автоморфизмы тождественные, а стандартные автоморфизмы — в точности полулинейные автоморфизмы.

Будет использовано следующее утверждение автора о регулярных подалгебрах алгебр Ли (см. первую часть следствия 2 в [4], оно же следствие 4.8.5 из монографии [5]).

Утверждение 1. *Пусть U — регулярная неразложимая подалгебра расщепимой редуктивной алгебры Ли над полем нулевой характеристики. Тогда любой автоморфизм этой алгебры как кольца стандартен.*

В доказательстве теоремы 1 устанавливаются два предложения, имеющие и самостоятельный интерес.

Предложение 1. *Рассмотрим* (*неассоциативную*) *алгебру R над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики. Тогда если она как кольцо имеет только полуалгебраические автоморфизмы, то она прямо неразложима как алгебра.*

Докажем это утверждение от противного. Предположим, что алгебра R разлагается в прямую сумму идеалов: $R = R_1 \oplus R_2$. Приведем это предположение к противоречию: укажем автоморфизм кольца R, который не является полулинейным. В построении искомого автоморфизма потребуется следующий результат.

Лемма 1. *Рассмотрим алгебраически замкнутое поле K нулевой характеристики и его конечно порожденное подполе S. Утверждается, что можно найти нетождественный автоморфизм $\delta \neq \mathrm{Id}$ поля K, инвариантный на подполе S.*

Доказательство леммы. Рассмотрим базис трансцендентности T расширения K/S. Тогда расширение $K/S(T)$ является алгебраическим. Покажем, что это расширение собственное, $S(T) \neq K$.

Рассмотрим два возможных случая: либо $T = \varnothing$, расширение алгебраическое, либо $T \neq \varnothing$.

Рассмотрим первый случай алгебраического расширения K/S. Подполе S представляется башней $\mathbb{Q} \subseteq S_1 \subseteq S$ чисто трансцендентного расширения $S_1/\mathbb{Q}$ и алгебраического расширения S/S_1, эти расширения являются конечно порожденными. Поле S_1 изоморфно полю дробно-рациональных выражений от конечного числа переменных, скажем $S_1 = \mathbb{Q}(X_1, \dots, X_n)$. Конечно порожденное алгебраическое расширение S/S_1 по теореме о примитивном элементе порождается каким-то одним алгебраическим элементом $S = S_1[\theta]$ степени m. Очевидно, такое расширение не может быть алгебраически замкнутым. В нем нет корней от переменных $X_1, \dots, X_n$ степени выше чем m. Заключаем в этом случае, что $S = S(T) \neq K$.

Если $T \neq \varnothing$, то очевидно, что поле $S(T)$ не является алгебраически замкнутым, таким образом, и в этом случае $K \neq S(T)$.

В силу алгебраической замкнутости поля K расширение полей $K/S(T)$ является нетривиальным расширением Галуа. Поэтому найдется нетривиальный автоморфизм δ поля K, тождественный на подполе $S(T)$, который будет тождественным на поле S. Лемма доказана.

Рассмотрим поле определения S алгебры Ли R_2. Оно порождается структурными константами какого-нибудь базиса этой алгебры, это конечно порожденное поле. Таким образом, алгебра R_2 является тензорным пополнением некоторой алгебры Ли R_2' над полем S, $R_2 = R_2' \otimes_S K$. Используем лемму 1 и подберем нетождественный автоморфизм δ поля K, неподвижный на подполе S. Этот автоморфизм по действию на втором сомножителе тензорного произведения $R_2 = R_2' \otimes_S K$ определяет нетождественный автоморфизм алгебры R_2, будем обозначать его через $\bar{\delta}$.

Легко видеть, что произведение автоморфизмов $\mathrm{Id}_{R_1} \times \bar{\delta}$ определяет автоморфизм кольца R, не являющийся полулинейным. Предложение 1 доказано.

Из предложения 1, примененного в условиях теоремы 1 к алгебре R, следует необходимость условия прямой неразложимости параболической подалгебры R полупростой алгебры L для того, чтобы она была UA-алгеброй. Это условие равносильно простоте содержащей ее алгебры Ли L в силу такого утверждения, на которое автору указал рецензент. Используем разнообразные факты о строении алгебр Ли и их регулярных подалгебр из монографии [6].

Предложение 2. *Рассмотрим полупростую расщепимую алгебру Ли L над полем K нулевой характеристики и ее параболическую подалгебру R. Тогда центр алгебры R тривиален, $\mathfrak{Z}(R) = 0$. Кроме того, алгебра L простая тогда и только тогда, когда параболическая подалгебра R — прямо неразложимая алгебра.*

В самом деле, обозначим через C подалгебру Картана алгебры L, которая содержится в параболической подалгебре R. Обозначим через $\Delta = \Delta(C, L) \subseteq C^*$ систему корней подалгебры Картана в алгебре Ли, а через $\Sigma = \Delta(C, R) \subseteq \Delta$ — подсистему корней параболической подалгебры R. В силу определения параболических подалгебр обе эти системы включают базу системы корней Π. Имеем

$$\mathfrak{Z}(R) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \ker \sigma \subseteq \bigcap_{\pi \in \Pi} \ker \pi = \mathfrak{Z}(L) = 0,$$

что доказывает первое утверждение.

Докажем, что параболическая подалгебра R неразложима тогда и только тогда, когда алгебра Ли L проста. Полупростая алгебра L есть прямая сумма n простых алгебр — ее компонент. Обозначим через $C_i \neq 0$ такие алгебры Картана компонент, которые в сумме образуют алгебру Картана C, $C = \sum C_i$. В силу структурной теории имеем разложение параболической подалгебры R в прямую сумму ненулевых параболических подалгебр R_i — компонент алгебры R. Отсюда следует достаточность утверждения предложения. Если параболическая подалгебра R прямо неразложимая, то $n = 1$ и алгебра L простая.

Приступим к доказательству необходимости условия предложения. Докажем, что у простой алгебры Ли L параболическая подалгебра R прямо неразложима. Заметим вначале, что это утверждение не зависит от основного поля K. В самом деле, если параболическая подалгебра R разложима, то имеется разложение в прямую сумму идеалов $R = R_1 \oplus R_2$, $R_1 \neq 0 \neq R_2$. Поскольку параболическая подалгебра R содержит подалгебру Картана $C \subseteq R$ алгебры Ли, в этом разложении подалгебры R_i регулярны и инвариантны относительно присоединенного действия алгебры Картана C. У регулярных подалгебр простой алгебры Ли L имеются рациональные структурные константы, определяемые частью базиса Шевалле этой алгебры. Поэтому наличие такого разложения не зависит от поля определения K. Используем это замечание и далее предполагаем основное поле полем вещественных чисел, $K = \mathbb{R}$.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что параболическая подалгебра R разложима и имеется разложение в прямую сумму идеалов $R = R_1 \oplus R_2$, $R_1 \neq 0 \neq R_2$. Приведем это в противоречие с простотой алгебры L. Вначале докажем приводимость системы корней параболической алгебры Σ.

Произвольный корень $\sigma \in \Sigma$ представлен некоторым одномерным корневым подпространством V_σ в алгебре Ли L и ее параболической подалгебре R. В силу этого либо $V_\sigma \subseteq R_1$, либо $V_\sigma \subseteq R_2$. Это определяет дизъюнктное объединение системы корней $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ с условием

$$\sigma \in \Sigma_i \Leftrightarrow V_\sigma \subseteq R_i, \quad i = 1, 2.$$

Определим разложение алгебры Картана $C = C_1 \oplus C_2$, $C_i = C \cap R_i$, $i = 1, 2$. В силу условия выполняется тождество $\Sigma_i(C_j) = 0$, $i \neq j$.

Форма Киллинга определяет скалярное произведение на алгебре Картана C, которая превращается в евклидово пространство. Двойственное пространство весов C^* наделяется подобной структурой, определяется каноническая биекция $^- : C^* \to C$, удовлетворяющая основному соотношению:

$$\text{при любых } \alpha \in C^*,\ x \in C \text{ выполнено } (\bar{\alpha}, x) = \alpha(x).$$

В частности, при любых $\alpha, \beta \in C^*$ выполняется равенство $(\alpha, \beta) = \alpha(\bar{\beta})$. Отсюда при $\alpha \in \Sigma_1$, $\beta \in \Sigma_2$ очевидно, что $(\alpha, \beta) = 0$. Это доказывает приводимость системы корней параболической подалгебры Σ.

Следующее простое утверждение выводится из свойств определителя Грама.

Лемма 2. *Рассмотрим евклидово пространство V и некоторый набор его векторов $W \subseteq V$. Пусть вектор w является линейной комбинацией векторов этого набора. Тогда если $w \perp W$, то $w = 0$.*

В силу этой леммы приводимость системы корней Σ влечет приводимость ее базы Π. Но это означает приводимость системы корней Δ простой алгебры Ли L, что невозможно. Полученное противоречие доказывает утверждение предложения 2 о неразложимости параболической подалгебры простой алгебры Ли.

Доказательство теоремы 1. Из утверждений предложений 1 и 2 следует необходимость условия теоремы о простоте алгебры Ли. Докажем достаточность свойства быть параболической подалгеброй R простой алгебры Ли L для того, чтобы она являлась UA-алгеброй.

По теореме Аржанцева алгебра R является UA-кольцом. Остается доказать, что все автоморфизмы этого кольца полулинейные. Простая алгебра Ли L редуктивна. Поскольку поле определения K алгебраически замкнуто, простая алгебра Ли L расщепима. В силу предложения 2 параболическая подалгебра R простой алгебры Ли L неразложимая, она регулярна. Выполняются все условия утверждения 1, согласно которому все автоморфизмы этого кольца полулинейны по модулю группы специальных автоморфизмов.

Однако в силу первого утверждения предложения 2 центр параболической подалгебры R тривиален, $\mathfrak{Z}(R) = 0$, поэтому специальные автоморфизмы прямо неразложимой параболической подалгебры простой алгебры Ли являются тождественными. Таким образом, все автоморфизмы кольца R полулинейные, стало быть, это — UA-алгебра. Доказательство теоремы закончено.

Замечание 1. Утверждение следствия 1 можно доказать и непосредственно. Для этого достаточно в его условиях дословно повторить доказательство теоремы 1, а вместо результата автора использовать теорему об изоморфизмах простых алгебр Ли из [3, гл. 10].

В заключение автор выражает искреннюю признательность Ан. А. Клячко за указанные мне работы И. В. Аржанцева. Автор благодарен И. В. Аржанцеву за многочисленные советы при работе над статьей. Также автор благодарен неизвестному рецензенту, замечания которого позволили придать статье законченный вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аржанцев И. В.* Однозначность сложения в полупростых алгебрах Ли // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 3. С. 155–156.
2. *Arzhantsev I. V.* Some results on uniqueness of addition in Lie algebras // Proc. I Colloquium on Lie theory and appl. (Vigo, 2000). Vigo: Univ. Vigo, 2002. P. 19–24 (Colecc. Congr.; V. 35).
3. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
4. *Ponomarev K. N.* Automorphisms group of an invariant subalgebra of a reductive Lie algebra // Acta Appl. Math. 2005. V. 85. P. 251–255.
5. *Пономарев К. Н.* Жесткие алгебры и неассоциативные кольца. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.
6. *Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Строение групп и алгебр Ли // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., ВИНИТИ, 1990. Т. 41. (Итоги науки и техники).

Статья поступила 13 сентября 2010 г.

Пономарёв Константин Николаевич
Новосибирский гос. технический университет,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru