Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 517.986.7:517.984.3

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОГОМЕРНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ БОХНЕРА — ФИЛЛИПСА

А. Р. Миротин

Аннотация. Развивается многомерное функциональное исчисление генераторов полугрупп, основанное на классе функций Бернштейна нескольких переменных. Устанавливаются теоремы об отображении спектров, дается условие голоморфности полугрупп, порождаемых операторами, возникающими в исчислении, а также доказывается неравенство моментов для этих операторов.

Ключевые слова: многопараметрическая полугруппа операторов, голоморфная полугруппа, генератор полугруппы, функциональное исчисление, функция Бернштейна, теорема об отображении спектра.

1. Введение и предварительные сведения

Одномерное исчисление Бохнера — Филлипса берет начало в работах [1, 2] (см. также [3–7]). Оно находит важные применения в теории вероятностей, которые связаны с тем, что функции Бернштейна возникают в теории безгранично делимых распределений [8, гл. XIII, § 7, теорема 2], а также теории случайных процессов [9, гл. XXIII, § 5, теорема 23.115.2 и формула (23.15.13); 10, с. 1339, разд. 7]). Основы многомерного исчисления Бохнера — Филлипса заложены автором в [11–13]. В данной статье определен совместный спектр набора замкнутых коммутирующих операторов в банаховом пространстве и установлены теоремы об отображении этого спектра и его частей для многомерного исчисления Бохнера — Филлипса (теоремы об отображении спектра для одномерного исчисления см. в [6]), дано условие голоморфности полугрупп, порождаемых операторами, возникающими в исчислении, а также доказано полезное неравенство моментов для этих операторов. Напомним необходимые понятия и факты из [11, 13].

Определение 1 [11]. Будем говорить, что неположительная функция $\psi \in C^\infty((-\infty;0)^n)$ есть (отрицательная) *функция Бернштейна n переменных* (или *принадлежит классу $\mathscr{T}_n$*), если все ее частные производные первого порядка абсолютно монотонны (функция из $C^\infty((-\infty;0)^n)$ называется *абсолютно монотонной,* если она неотрицательна вместе со своими частными производными всех порядков).

Ясно, что $\mathscr{T}_n$ — конус относительно поточечного сложения функций и умножения на скаляр.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь (договор № 20061473).

Известно [13], что каждая функция $\psi \in \mathscr{T}_n$ допускает интегральное представление (здесь и ниже точкой обозначается скалярное произведение в $\mathbb{R}^n_+$; запись $s \to -0$ означает, что $s_1 \to -0, \dots, s_n \to -0$)

$$\psi(s) = c_0 + c_1 \cdot s + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}} (e^{s\cdot u} - 1)\, d\mu(u) \quad (s \in (-\infty; 0)^n), \tag{1.1}$$

где $c_0 = \psi(-0) := \lim\limits_{s \to -0} \psi(s)$, а $c_1 \in \mathbb{R}^n_+$ и положительная мера μ на $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ определяются по ψ однозначно. Кроме того, ψ продолжается по формуле (1.1) до функции, голоморфной в области $\{\operatorname{Re} s < 0\} \subset \mathbb{C}^n$ и непрерывной в замыкании этой области.

Примерами функций Бернштейна одного переменного служат $-(-s)^\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$, $-\log(1-s)$, $-\operatorname{arch}(1-s)$ (см. [6]). Большое число примеров приведено в монографии [7], специально посвященной этому предмету.

Всюду далее, если не оговорено противное, $T(u) = T_1(u_1)\dots T_n(u_n)$ $(u \in \mathbb{R}^n_+)$ — ограниченная n-параметрическая C_0-полугруппа операторов в комплексном банаховом пространстве X, $T_1, \dots, T_n$ — попарно коммутирующие однопараметрические C_0-полугруппы в X, удовлетворяющие условиям $\|T_j(t)\| \le M_j$ $(t \ge 0,\ M_j = \mathrm{const} \ge 1,\ j = 1, \dots, n)$. Через A_j обозначим генератор полугруппы T_j с областью определения $D(A_j)$ (частный генератор полугруппы T) и положим $A = (A_1, \dots, A_n)$. Далее коммутирование операторов $A_1, \dots, A_n$ означает коммутирование соответствующих полугрупп. Через $\mathrm{Gen}(X)$ будем обозначать множество всех генераторов равномерно ограниченных C_0-полугрупп в X, а через I — единичный оператор в X. Отметим, что векторное подпространство $D(A) := \bigcap\limits_{j=1}^n D(A_j)$ плотно в X (см. [9, § 10.10] или [14, предложение 3.26]).

Определение 2 [13]. Определим значение функции ψ из $\mathscr{T}_n$ вида (1.1) на наборе $A = (A_1, \dots, A_n)$ при $x \in D(A)$ формулой

$$\psi(A)x = c_0 x + c_1 \cdot Ax + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}} (T(u) - I)x\, d\mu(u), \tag{1.2}$$

где $c_1 \cdot Ax := \sum\limits_{j=1}^n c_1^j A_j x$ (интеграл понимается в смысле Бохнера).

Пусть $\psi \in \mathscr{T}_n$, $t \ge 0$. Тогда функция $g_t(s) := e^{t\psi(s)}$ абсолютно монотонна на $(-\infty; 0)^n$ и $g_t(s) \le 1$. В силу многомерного варианта теоремы Бернштейна — Уиддера (см., например, [15]) существует такая единственная ограниченная положительная мера ν_t на $\mathbb{R}^n_+$, что при $s \in (-\infty; 0)^n$

$$g_t(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{s\cdot u} d\nu_t(u) = \mathscr{L}\nu_t(s) \tag{1.3}$$

(здесь и ниже $\mathscr{L}\nu$ обозначает n-мерное преобразование Лапласа меры ν).

Определение 3. Используя обозначения, введенные выше, положим $(x \in X)$

$$g_t(A)x = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} T(u)x\, d\nu_t(u) \tag{1.4}$$

(интеграл Бохнера).

Очевидно, что

$$\|g_t(A)\| \le \left(\prod_{j=1}^{n} M_j\right) e^{t\psi(-0)} \le \prod_{j=1}^{n} M_j.$$

Поскольку $g_{t+r}(s) = g_t(s)g_r(s)$, то ν_t образуют сверточную полугруппу ограниченных мер на $\mathbb{R}_+^n$. Поэтому $g(A) : t \mapsto g_t(A)$ — ограниченная полугруппа операторов на X. В частности, $g(A)$ — C_0-полугруппа. В одномерном случае она называется *полугруппой, подчиненной полугруппе* T (терминология восходит к теории вероятностей, см. [8, § X.7]).

В [16] замечено, что основная теорема из [13] может быть уточнена следующим образом.

Теорема 4. *Замыкание оператора* $\psi(A)$ *существует и является генератором полугруппы* $g(A)$ *класса* C_0*, определенной формулой* (1.4).

В самом деле, в [13] доказано, что оператор $\psi(A)$ замыкаем и его расширением является генератор G C_0-полугруппы $g(A)$. Поэтому $\overline{\psi(A)} \subseteq G$. Покажем, что здесь имеет место равенство. Поскольку операторы $g_t(A)$ коммутируют с $T_k(s)$ при всех k, как легко проверить, $g_t(A) : D(A_k) \to D(A_k)$ при всех k, а потому и $g_t(A) : D(A) \to D(A)$. Отсюда следует, что $D(A)$ — существенная область для генератора G (см. [17, следствие 3.1.7]). С другой стороны, $D(A)$ — существенная область для оператора $\overline{\psi(A)}$, причем сужения операторов $\overline{\psi(A)}$ и G на $D(A)$ совпадают. Поэтому $\overline{\psi(A)} = G$, что и завершает доказательство. $\square$

Предыдущая теорема мотивирует окончательный вариант определения операторов $\psi(A)$.

Определение 5 [13]. Под *значением функции* ψ из $\mathscr{T}_n$ на наборе $A = (A_1, \dots, A_n)$ коммутирующих операторов из $\mathrm{Gen}(X)$ будем понимать генератор полугруппы $g(A)$. Это значение далее обозначаем через $\psi(A)$. Возникающее функциональное исчисление будем называть *многомерным исчислением Бохнера — Филлипса*, или $\mathscr{T}_n$*-исчислением.*

Введенные выше обозначения и ограничения далее будут применяться без дополнительных пояснений.

2. Отображение совместных спектров

Уже для функции $\psi \in \mathscr{T}_1$ теорема об отображении спектра в смысле справедливости равенства $\psi(\sigma(A)) = \sigma(\psi(A))$, где $A \in \mathrm{Gen}(X), \sigma(A)$ — спектр оператора A, может не выполняться, в чем нас убеждает следующий

Пример 6. Пусть $\psi(s) = e^s - 1$. В этом случае представляющая мера μ равна ε_1, мере Дирака на $\mathbb{R}$, сосредоточенной в единице. Тогда в силу определения 5 и теоремы 4 $\psi(A) = T(1) - I$. Но известно, что существуют такие равномерно ограниченные полугруппы класса C_0, для которых $\sigma(T(1)) \ne e^{\sigma(A)}$ (см., например, [18, гл. 1, пример 9.6]; в этом примере $\sigma(A) = \varnothing$, а $T(t) = O$ при $t \ge 1$). Последнее означает, что $\sigma(\psi(A)) \ne \psi(\sigma(A))$. $\square$

Определение 7. *Совместный точечный спектр* $\sigma_p(A)$ набора A операторов в X есть множество тех $\lambda \in \mathbb{C}^n$, для которых найдется вектор $x \in D(A)$,

$x \neq 0$ (*совместный собственный вектор набора* A), удовлетворяющий равенствам $A_j x = \lambda_j x$ при всех $j = 1, \ldots, n$.

Определение 8. *Совместный аппроксимативный спектр* $\sigma_a(A)$ набора A операторов в X есть множество тех $\lambda \in \mathbb{C}^n$, для которых найдется такая последовательность векторов $x_m \in D(A), \|x_m\| = 1$ (*совместный аппроксимативный собственный вектор набора* A), что $\|A_j x_m - \lambda_j x_m\| \to 0$ $(m \to \infty)$ при всех $j = 1, \ldots, n$.

Определение 9. *Совместный остаточный спектр* $\sigma_R(A)$ набора A операторов в X есть множество тех $\lambda \in \mathbb{C}^n$, для которых векторное пространство $\sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname{Im}(\lambda_j - A_j)$ не плотно в X.

Определение 10. *Совместный спектр* $\sigma_J(A)$ набора A операторов в X определим равенством

$$\sigma_J(A) = \sigma_a(A) \cup \sigma_R(A).$$

Легко видеть, что в случае одного оператора эти определения совпадают с соответствующими классическими и $\sigma_p(A)$, $\sigma_a(A)$, $\sigma_R(A)$ и $\sigma_J(A)$ содержатся в $\sigma_p(A_1) \times \cdots \times \sigma_p(A_n)$, $\sigma_a(A_1) \times \cdots \times \sigma_a(A_n)$, $\sigma_R(A_1) \times \cdots \times \sigma_R(A_n)$ и $\sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_n)$ соответственно.

Далее положим $A' := (A'_1, \ldots, A'_n)$ (штрих здесь обозначает сопряженный оператор).

Лемма 11. *Для любого набора A операторов в X справедливо равенство $\sigma_R(A) = \sigma_p(A')$.*

Доказательство. Заметим, что $\lambda \in \sigma_R(A)$ тогда и только тогда, когда $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(\lambda_k - A_k)\right) = \{0\}$, т. е. (поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(\lambda_k - A_k) \supseteq \operatorname{Im}(\lambda_j - A_j)$ при всех $j = 1, \ldots, n$) тогда и только тогда, когда $f(\operatorname{Im}(\lambda_j - A_j)) = \{0\}$ при всех $j = 1, \ldots, n$ для некоторого ненулевого непрерывного линейного функционала f в X. В силу определения сопряженного оператора это равносильно тому, что $(\lambda_j - A'_j)f = 0$ при всех $j = 1, \ldots, n$. $\square$

Теорема 12. *Для набора A попарно коммутирующих генераторов ограниченных C_0-полугрупп в банаховом пространстве X справедливы включения:*

1) $\sigma_R(\psi(A)) \supseteq \psi(\sigma_R(A))$;

2) $\sigma_p(\psi(A)) \supseteq \psi(\sigma_p(A))$;

3) $\{\alpha \in \sigma_p(\psi(A)):$ *найдутся собственный вектор x оператора $\psi(A)$, отвечающий α, и совместный собственный вектор f набора A' такие, что $f(x) \neq 0\} \subseteq \psi(\sigma_R(A))$.*

Если к тому же $\sigma_a(A_j) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ при всех j или $\partial\psi(-0)/\partial s_j \neq \infty$ при всех j, то

4) $\sigma_a(\psi(A)) \supseteq \psi(\sigma_a(A))$;

5) $\sigma(\psi(A)) \supseteq \psi(\sigma_J(A))$.

Доказательство. 1. При $\lambda \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ и $x \in D(A)$ в силу (1.1) и (1.3) имеем

$$\psi(\lambda)x - \psi(A)x = c_1 \cdot (\lambda I - A)x + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (e^{\lambda \cdot u} I - T(u))x \, d\mu(u). \tag{2.1}$$

Для любых ограниченных операторов $B_j, C_j, j = 1, \dots, n$, в X справедливо тождество

$$\prod_{j=1}^{n} B_j - \prod_{j=1}^{n} C_j = (B_1 - C_1)\prod_{j=2}^{n} B_j + C_1(B_2 - C_2)\prod_{j=3}^{n} B_j + \dots + \prod_{j=1}^{n-1} C_j(B_n - C_n).$$

С учетом коммутирования полугрупп T_j отсюда получаем, что

$$e^{\lambda\cdot u}I - T(u) = \sum_{j=1}^{n}(e^{\lambda_j u_j}I - T_j(u_j))U_j(u), \tag{2.2}$$

$$U_j(u) = \prod_{1\le l<j} T_l(u_l) \prod_{j<k\le n} e^{\lambda_k u_k}$$

— ограниченные операторы в X, коммутирующие с T_i $(i = 1, \dots, n)$, $\|U_j(u)\| \le M^{n-1}$. Известно (см., например, [14, формулы (8.1a), (8.1b)]), что формулы

$$V_j^{\lambda}(u_j)x = \int_0^{u_j} e^{(u_j - s)\lambda_j} T_j(s)x\, ds$$

определяют ограниченные операторы в X, $\operatorname{Im}\bigl(V_j^{\lambda}(u_j)\bigr) \subseteq D(A_j)$, также коммутирующие со всеми T_i, причем

$$(e^{\lambda_j u_j}I - T_j(u_j))x = (\lambda_j I - A_j)V_j^{\lambda}(u_j)x \quad \text{при } x \in X.$$

Подставляя это в (2.2), а результат — в (2.1), при $x \in D(A)$ имеем

$$(\psi(\lambda)I - \psi(A))x = \sum_{j=1}^{n} c_1^j(\lambda_j I - A_j)x + \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}_+^n}(\lambda_j I - A_j)V_j^{\lambda}(u_j)U_j(u)x\, d\mu(u). \tag{2.3}$$

Если $\lambda \in \sigma_R(A)$, то здесь правая часть принадлежит замыканию в X подпространства $\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Im}(\lambda_j - A_j)$, причем это замыкание не совпадает с X. Следовательно, с учетом того, что $D(A)$ есть существенная область оператора $\psi(A)$, получаем, что образ оператора $\psi(\lambda)I - \psi(A)$ не всюду плотен, т. е. $\psi(\lambda) \in \sigma_R(\psi(A))$.

2. Пусть $A_j x = \lambda_j x$ при некотором $x \in D(A)$, $x \ne 0$, $j = 1, \dots, n$. Тогда $T(u)x = e^{\lambda\cdot u}x$, поскольку в силу [9, теорема 11.6.3] $T_j(\xi)x = e^{\lambda_j \xi}x$. Формулы (1.3) и (1.1) показывают, что

$$\psi(A)x = \left(c_0 + c_1\cdot\lambda + \int_{\mathbb{R}_+^n}(e^{\lambda\cdot u} - 1)\, d\mu(u)\right)x = \psi(\lambda)x,$$

т. е. $\psi(\lambda) \in \sigma_p(\psi(A))$, что и требовалось.

3. Пусть α принадлежит левой части доказываемого включения, вектор $x \in D(\psi(A))$, $x \ne 0$, таков, что $\psi(A)x = \alpha x$, функционал $f \in X'$ таков, что $f(x) \ne 0$, и $A'f = \lambda f$ для некоторого $\lambda \in \sigma_p(A')$. Покажем, что $\alpha = \psi(\lambda)$. С этой целью заметим, что в силу теоремы 4 и определения 5 найдется такая

последовательность $x_m \in D(A)$, что $x_m \to x$, и $\psi(A)x_m \to \psi(A)x$. Следовательно, $\lim\limits_m f(\psi(A)x_m) = \alpha f(x)$. С учетом равенств $f(A_j y) = \lambda_j f(y)$ $(j = 1, \dots, n;$ $y \in X)$ последнее соотношение принимает вид

$$\lim_{m\to\infty}\left(c_0 f(x_m) + (c_1 \cdot \lambda) f(x_m) + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} (f(T(u)x_m) - f(x_m))\, d\mu(u)\right) = \alpha f(x). \quad (2.4)$$

Для фиксированного m рассмотрим функцию $\varphi(u) = f(T(u)x_m)$ $(u \in \mathbb{R}_+^n)$. Так как $T(u)x_m \in D(A)$, при любом j имеем

$$\frac{\partial\varphi(u)}{\partial s_j} = \lim_{h\to+0}\frac{f(T_j(h)T(u)x_m) - f(T(u)x_m)}{h}$$
$$= f(A_j T(u)x_m) = \lambda_j f(T(u)x_m) = \lambda_j\varphi(u).$$

Отсюда $\varphi(u) = Ce^{\lambda\cdot u}$, где $C = \varphi(0) = f(x_m)$. Значит, (2.4) можно записать так:

$$\lim_{m\to\infty}\left(c_0 + c_1\cdot\lambda + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n}(e^{\lambda\cdot u} - 1)\, d\mu(u)\right) f(x_m) = \alpha f(x),$$

откуда $\alpha = \psi(\lambda)$. Применение леммы 11 завершает доказательство.

4. Заметим, что если $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, то оператор

$$W_j^\lambda x = c_1^j x + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} V_j^\lambda(u_j) U_j(u) x\, d\mu(u)$$

ограничен в X, так как оценка $\left\|V_j^\lambda(u_j)x\right\| \le M\|x\|(e^{u_j \mathrm{Re}\lambda_j} - 1)/\mathrm{Re}\lambda_j$ влечет

$$\left\|W_j^\lambda x\right\| \le \left(c_1^j + M^{n-1}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left\|V_j^\lambda(u_j)\right\| d\mu(u)\right)\|x\|$$
$$\le \left(c_1^j + \frac{M^n}{\mathrm{Re}\lambda_j}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}(e^{u_j\mathrm{Re}\lambda_j} - 1)\, d\mu(u)\right)\|x\|$$
$$= \left(c_1^j + \frac{M^n}{\mathrm{Re}\lambda_j}(\psi((\operatorname{Re}\lambda_j)e_j) - c_1^j \operatorname{Re}\lambda_j - \psi(-0))\right)\|x\|$$

((e_j) — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$). Кроме того, $\operatorname{Im}\left(W_j^\lambda\right) \subseteq D(A_j)$, и W_j^λ коммутируют со всеми T_i, а значит, и с A_i. Поэтому если $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ для всех j, то из формулы (2.3) следует, что

$$(\psi(\lambda)I - \psi(A))x = \sum_{j=1}^n W_j^\lambda(\lambda_j I - A_j)x, \quad x \in D(A). \quad (2.5)$$

Пусть теперь $\lambda \in \sigma_a(A)$. Тогда $\lambda_j \in \sigma(A_j)$ и, стало быть, $\operatorname{Re}\lambda_j \le 0$ при всех j (полугруппы T_j ограничены). Пусть последовательность $x_m \in D(A)$, $\|x_m\| = 1$, — совместный аппроксимативный собственный вектор набора A, отвечающий λ.

Если $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ при всех j, то, подставляя в (2.5) x_m вместо x и полагая $m \to \infty$, выводим, что $\psi(\lambda) \in \sigma_a(\psi(A))$.

Теперь предположим, что $\partial\psi(-0)/\partial s_j \neq \infty$ при всех j. Заменяя в (2.5) λ на $\lambda - \bar{\varepsilon}$, где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon, \dots, \varepsilon)$, A на $A - \bar{\varepsilon}I$, а x на x_m, получаем

$$\|(\psi(\lambda - \bar{\varepsilon})I - \psi(A - \bar{\varepsilon}I))x_m\| \leq \sum_{j=1}^{n} \left\|W_j^{\lambda - \bar{\varepsilon}}\right\| \|(\lambda_j I - A_j)x_m\|.$$

При этом

$$\left\|W_j^{\lambda - \bar{\varepsilon}}\right\| \leq c_1^j + \frac{M^n}{\mathrm{Re}\lambda_j - \varepsilon}(\psi((\mathrm{Re}\,\lambda_j - \varepsilon)e_j) - c_1^j(\mathrm{Re}\,\lambda_j - \varepsilon) - \psi(-0))$$

и предел правой части при $\varepsilon \to +0$ существует и конечен для всех j. Следовательно, существует такая константа $K > 0$, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\|(\psi(\lambda - \bar{\varepsilon})I - \psi(A - \bar{\varepsilon}I))x_m\| \leq K \sum_{j=1}^{n} \|(\lambda_j I - A_j)x_m\|. \tag{2.6}$$

Далее, $\psi(A - \bar{\varepsilon}I)x \to \psi(A)x$ $(\varepsilon \downarrow +0)$ для любого $x \in D(A)$. Действительно, при $x \in D(A)$ (оператор $A_j - \varepsilon I$ — генератор полугруппы $e^{-\varepsilon u_j}T_j(u_j)$)

$$\psi(A)x - \psi(A - \bar{\varepsilon}I)x = (\psi(-0) - \psi(-\bar{\varepsilon}))x + \int_{\mathbb{R}_+^n} (T(u) - I)x(1 - e^{-\bar{\varepsilon}\cdot u})\, d\mu(u),$$

а значит,

$$\|\psi(A)x - \psi(A - \bar{\varepsilon}I)x\| \leq \left(|\psi(-0) - \psi(-\bar{\varepsilon})| + (M^n + 1)\int_{\mathbb{R}_+^n} (1 - e^{-\bar{\varepsilon}\cdot u})\, d\mu(u)\right)\|x\|,$$

и осталось применить к правой части теорему Б. Леви. Поэтому, полагая в (2.6) $\varepsilon \downarrow +0$, получаем

$$\|\psi(\lambda)x_m - \psi(A)x_m\| \leq K \sum_{j=1}^{n} \|\lambda_j x_m - A_j x_m\|,$$

а значит, снова $\psi(\lambda) \in \sigma_a(\psi(A))$.

5. Это следует из утверждений 1, 4 и того, что $\sigma(\psi(A)) = \sigma_a(\psi(A)) \cup \sigma_R(\psi(A))$. $\square$

3. Голоморфность полугруппы $g(A)$

Известно, что условие

$$\varlimsup_{t \to +0} \|I - T(t)\| < 2 \tag{3.1}$$

достаточно для голоморфности однопараметрической C_0-полугруппы T в банаховом пространстве X. Хотя в общем случае обратное неверно, это условие необходимо для голоморфности T, если X равномерно выпукло (см., например, [19]). В связи с этим однопараметрическую C_0-полугруппу, удовлетворяющую условию (3.1), будем называть *равномерно голоморфной в* X.

Следующая теорема обобщает утверждения из [6, 16].

Теорема 13. *Предположим, что полугруппы T_j удовлетворяют условиям $\|T_j(t)\| \le M_j$ $(j = 1, \dots, n)$ и*

$$\sum_{j=1}^{n} C_j \varlimsup_{t\to+0} \|I - T_j(t)\| < 2,$$

где $C_j = \prod\limits_{k=1}^{j-1} M_k$ при $j > 1$, $C_1 = 1$. Тогда для любой функции ψ из $\mathscr{T}_n$ оператор $\psi(A)$ является генератором равномерно голоморфной полугруппы.

Доказательство. Заменяя, если это необходимо, ψ на $\psi - \psi(-0)$, можем считать, что $c_0 (= \psi(-0)) = 0$. Положим $b_j = \varlimsup\limits_{t\to+0} \|I - T_j(t)\|$ и выберем $\varepsilon > 0$ таким, что $\sum\limits_{j=1}^{n} C_j b_j + \varepsilon < 2$. Найдется такое $\delta > 0$, что $\|I - T_j(t)\| < b_j + \varepsilon/(nC_j)$ при всех $j = 1, \dots, n$, $t \in [0; \delta)$.

Далее, из тождества $(T_0(t) := I)$

$$T(u) - I = \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{k=0}^{j-1} T_k(u_k) \right) (T_j(u_j) - I)$$

следует, что

$$\|I - T(u)\| \le \sum_{j=1}^{n} C_j \|I - T_j(u_j)\|, \tag{3.2}$$

а потому при $u \in [0; \delta)^n$ справедливо неравенство

$$\|I - T(u)\| \le \sum_{j=1}^{n} C_j b_j + \varepsilon.$$

Следовательно, если $x \in X$, $\|x\| = 1$, то

$$\begin{aligned}
\|(I - g_t(A))x\| &\le \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|I - T(u)\| \, d\nu_t(u) \|x\| \\
&= \int\limits_{[0;\delta)^n} \|I - T(u)\| \, d\nu_t(u) + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \setminus [0;\delta)^n} \|I - T(u)\| \, d\nu_t(u) \\
&\le \sum_{j=1}^{n} C_j b_j + \varepsilon + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \setminus [0;\delta)^n} \|I - T(u)\| \, d\nu_t(u).
\end{aligned}$$

Тем самым

$$\|I - g_t(A)\| \le \sum_{j=1}^{n} C_j b_j + \varepsilon + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \setminus [0;\delta)^n} \|I - T(u)\| \, d\nu_t(u). \tag{3.3}$$

Заметим теперь, что направленность мер ν_t узко сходится к мере Дирака ε_0 при $t \to +0$. В самом деле, преобразование Лапласа $\mathscr{L}\nu_t(s) = e^{t\psi(s)}$ непрерывно в точке $s = 0$ и $\mathscr{L}\nu_t(s) \to 1 = \mathscr{L}\varepsilon_0(s)$ при $t \to +0$. Поэтому узкая сходимость вытекает из теоремы непрерывности для многомерного преобразования Лапласа (см., например, [20, гл. IX, § 5, теорема 3c]). Но так как полугруппы T_j

удовлетворяют условию $\overline{\lim}_{t\to+0}\|I-T_j(t)\|<2$, они голоморфны (см., например, [19, следствие 2.5.7]), а потому становятся непрерывными в топологии нормы. Значит, ограниченная функция $u\mapsto\|I-T(u)\|$ непрерывна на $\mathbb{R}_+^n\setminus[0;\delta)^n$. Следовательно, переходя в (3.3) к верхнему пределу при $t\to+0$, получим

$$\overline{\lim_{t\to+0}}\|I-g_t(A)\|\le\sum_{j=1}^n C_jb_j+\varepsilon<2.$$

В силу отмеченного выше критерия отсюда следует равномерная голоморфность полугруппы $g(A)$, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 14. *Пусть пространство X равномерно выпукло, T_1 — голоморфная полугруппа в X, а операторы $A_2,\dots,A_n$ ограничены (если $n>1$). Тогда для любой функции ψ из $\mathscr{T}_n$ оператор $\psi(A)$ является генератором голоморфной полугруппы.*

Доказательство. Условие теоремы выполнено, ибо $\overline{\lim}_{t\to+0}\|I-T_1(t)\|<2$ (см., например, [19, следствие 2.5.8]), и при $j>1$ справедливы равенства $\lim_{t\to+0}\|I-T_j(t)\|=0$. $\square$

Следствие 15. *Пусть пространство X равномерно выпукло. Если T — однопараметрическая голоморфная полугруппа сжатий в X с генератором A, то для любой функции ψ из $\mathscr{T}_1$ оператор $\psi(A)$ является генератором голоморфной полугруппы сжатий.*

Следствие 15 дает для случая равномерно выпуклых пространств положительный ответ на один вопрос из [16].

4. Неравенство моментов

Имеет место следующее неравенство, обобщающие результаты из [16, 21].

Теорема 16. *Если операторы $A_j\in\mathrm{Gen}(X)$ порождают C_0-полугруппы T_j соответственно, причем $\|T_j(t)\|\le M$ ($t\in\mathbb{R}_+$; $j=1,\dots,n$; $M\ge1$), то для любой функции $\psi\in\mathscr{T}_n$ и любого $x\in D(A)$, $\|x\|=1$, справедливо неравенство*

$$\|\psi(A)x\|\le-nK_MM^{n-1}\psi\left(-\frac{1}{n}\|A_1x\|,\dots,-\frac{1}{n}\|A_nx\|\right),$$

где $K_M=(M+1)/(1-e^{-(M+1)/M})$.

Доказательство. Легко проверить, что теорема верна для линейных функций Бернштейна $\psi(s)=c_0+c_1\cdot s$, поскольку $K_M>1$. Кроме того, в силу формулы (1.1) $\psi(s)=c_0+c_1\cdot s+\psi_0(s)$, где ψ_0 принадлежит $\mathscr{T}_n$ и не содержит линейной части. Следовательно, можно считать, что в (1.1) $c_0=c_1=0$. Формулы (1.2) и (1.1) показывают, что достаточно доказать неравенство

$$\|(T(u)-I)x\|\le nK_MM^{n-1}(1-e^{-\|Ax\|\cdot u/n}),\quad u>0,\tag{4.1}$$

где положено $\|Ax\|\cdot u=\sum\limits_{j=1}^n\|A_jx\|u_j$.

Докажем его сначала при $n=1$, полагая для краткости $A_1=A$, $T_1(u_1)=T(u)$. Обозначим через $t(r)$ функцию, обратную возрастающей функции $r(t)=t/(1-e^{-t})$, $r(0)=1$. Для фиксированного $r\ge1$ возможны два случая.

1. $\|Ax\|u \le t(r)$. Тогда $r(\|Ax\|u) \le r(t(r)) = r$, т. е. $\|Ax\|u \le r(1 - e^{-\|Ax\|u})$, а потому

$$\|(T(u) - I)x\| = \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} T(us)x\,ds \right\| = \left\| \int_0^1 T(us)Axu\,ds \right\| \le M\|Ax\|u \le Mr(1 - e^{-\|Ax\|u}).$$

2. $\|Ax\|u > t(r)$. Тогда

$$\|(T(u) - I)x\| \le M + 1 \le \frac{M+1}{1 - e^{-t(r)}}(1 - e^{-\|Ax\|u}).$$

В любом случае справедливо неравенство

$$\|(T(u) - I)x\| \le C(r)(1 - e^{-\|Ax\|u}),$$

где $C(r) = M \max\{r; (M+1)/M(1 - e^{-t(r)})\}$. Для минимизации $C(r)$ заметим, что функция $t(r)$ возрастает от 0 до $+\infty$ при $1 \le r < +\infty$. Поэтому уравнение $r = (M+1)/M(1 - e^{-t(r)})$, т. е. $t(r) = (M+1)/M$, имеет единственное решение $r_0 = r((M+1)/M)$. Если $r < r_0$, то в силу отмеченной монотонности

$$\frac{M+1}{M(1 - e^{-t(r)})} > \frac{M+1}{M(1 - e^{-t(r_0)})} = \frac{M+1}{M(1 - e^{-(M+1)/M)})} = r_0.$$

Таким образом,

$$\min\{C(r) : r \ge 1\} = Mr_0 = (M+1)/(1 - e^{-(M+1)/M}),$$

что и доказывает (4.1) при $n = 1$.

Перейдем к общему случаю. Используя неравенство (3.2), заключаем, что

$$\|I - T(u)\| \le \sum_{j=1}^{n} M^{j-1}\|I - T_j(u_j)\| \le M^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\|I - T_j(u_j)\|.$$

Применив здесь к каждому слагаемому в правой части доказанный выше частный случай неравенства (4.1) и воспользовавшись неравенством Коши, получаем

$$\|I - T(u)\| \le K_M M^{n-1}\sum_{j=1}^{n}(1 - e^{-\|A_j x\|u_j}) \le nK_M M^{n-1}(1 - e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\|A_j x\|u_j}),$$

и теорема доказана. □

Следствие 17. *Для любой функции $\psi \in \mathscr{T}_n$ и любого вектора $x \in D(A)$, $x \ne 0$, справедливо неравенство*

$$\|\psi(A)x\| \le -nK_M M^{n-1}\psi\left(-\frac{\|A_1 x\|}{n\|x\|}, \dots, -\frac{\|A_n x\|}{n\|x\|}\right)\|x\|.$$

Для формулировки другого следствия выделим некоторый класс функциональных пространств. Будем говорить, что комплексное банахово пространство X *принадлежит классу* $\mathscr{C}$, если оно обладает следующими свойствами:

(а) X есть пространство функций на $\mathbb{R}^n$, содержащее пространство основных функций $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ в качестве векторного подпространства;

(б) если последовательность функций $x_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, носители которых содержатся в общем компакте из $\mathbb{R}^n$, сходится равномерно на $\mathbb{R}^n$ к 0, то x_k сходится к 0 и в X;

(в) если последовательность функций $x_k \in X$ сходится в X к 0, то она содержит такую подпоследовательность x_{k_m}, что $x_{k_m}(0) \to 0$;

(г) для любой функции $x \in X$ и любого $u \in \mathbb{R}^n_+$ сдвиг x_u, где $x_u(s) = x(u+s)$, также принадлежит X, причем операторы сдвига $T(u)x = x_u$ ограничены в X и образуют n-параметрическую ограниченную C_0-полугруппу.

Пространства $C_0(\mathbb{R}^n)$ непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$, исчезающих на бесконечности, и $UCB(\mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}^n$, наделенные sup-нормой, принадлежат классу $\mathscr{C}$.

Следствие 18. *Если функция $\psi \in \mathscr{T}_n$ ограничена на $(-\infty; 0)^n$, то для любого банахова пространства X оператор $\psi(A)$ ограничен при всех попарно коммутирующих $A_j \in \operatorname{Gen}(X)$ (причем при фиксированной ψ его константа ограниченности зависит лишь от M). Обратно, если для некоторого банахова пространства X класса $\mathscr{C}$ оператор $\psi(A)$, где $A = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ — набор частных генераторов полугруппы сдвигов в X, ограничен, то функция ψ ограничена на $(-\infty; 0)^n$.*

Доказательство. Первое утверждение с очевидностью следует из неравенства моментов. Для доказательства обратного заметим, что частными генераторами полугруппы сдвигов $T(u)$ в пространстве X служат операторы $A_j = \partial_j$ взятия частных производных, причем их область определения содержит пространство $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ основных функций (с учетом свойств (а), (б) это доказывается так же, как и в случае $X = C_0(\mathbb{R}^n)$). Предположим, что оператор $\psi(A)$ ограничен, и докажем, что мера μ на $\mathbb{R}^n_+$ (см. (1.1)) конечна. Допустим, что это не так. Поскольку в силу [13, лемма 3.1] $\mu(\mathbb{R}^n_+ \setminus [0, \delta)^n) < \infty$ при всех $\delta > 0$, из этого допущения следует, что $\mu\bigl(V_k \cap \mathbb{R}^n_+\bigr) \to \infty$ $(k \to \infty)$, где $V_k = \{s \in \mathbb{R}^n : 1/k \le |s| \le 1\}$ — полый шар. Для каждого натурального k выберем функцию $x_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ так, что $0 \le x_k \le 1/\mu\bigl(V_k \cap \mathbb{R}^n_+\bigr)$, носители $\operatorname{supp}(x_k)$ содержатся в шаре $B[0, 3] \subset \mathbb{R}^n$, причем $x_k = 0$ в некоторой окрестности нуля, и сужение $x_k|V_k$ равно $1/\mu\bigl(V_k \cap \mathbb{R}^n_+\bigr)$. Тогда $x_k \to 0$ в X в силу (б). Далее, из (1.2) следует, что

$$\psi(A)x_k(s) = c_0 x_k(s) + c_1 \cdot A x_k(s) + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (x_k(s+u) - x_k(s))\, d\mu(u).$$

Так как $x_k(0) = \partial_j x_k(0) = 0$ $(j = 1, \dots, n)$, имеем

$$\psi(A)x_k(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x_k(u)\, d\mu(u) \ge \frac{1}{\mu\bigl(V_k \cap \mathbb{R}^n_+\bigr)} \mu\bigl(V_k \cap \mathbb{R}^n_+\bigr) = 1,$$

а это противоречит тому, что $\psi(A)x_k \to 0$ в X в силу (в). Таким образом, мера μ конечна. Но тогда оператор (см. (1.2))

$$c_1 \cdot A = \psi(A) - c_0 - \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (T(u) - I)\, d\mu(u)$$

ограничен в X вместе с $\psi(A)$. Покажем, что это возможно лишь при $c_1 = 0$. Для каждого натурального k рассмотрим функцию одного переменного $\varphi_k(t) = k^{-1}\exp\left(-\frac{k^{-2}}{k^{-2}-t^2}\right)$ при $|t| \leq k^{-1}$, $\varphi_k(t) = 0$ при $|t| > k^{-1}$. Выберем также такую функцию $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, что $0 \leq \varphi \leq 1$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B[0,2] \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi|B[0,1] = 1$, и для любого $l = 1,\dots,n$ положим $x_k^l(s) = \varphi_k(s_l - k^{-2})\varphi(s)$. Тогда $x_k^l \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}(x_k^l) \subset B[0,2]$ и x_k^l равномерно стремится к 0 при $k \to \infty$, а потому $x_k^l \to 0$ в X. Поскольку оператор $c_1 \cdot A = \sum\limits_{j=1}^n c_1^j \partial_j$ ограничен в X, то $\sum\limits_{j=1}^n c_1^j \partial_j x_k^l \to 0$ в X при $k \to \infty$. Переходя к подпоследовательности, получаем, что $\sum\limits_{j=1}^n c_1^j \partial_j x_k^l(0) \to 0$ при $k \to \infty$. С другой стороны, непосредственно проверяется, что $\partial_l x_k^l(0) \to \infty$ при $k \to \infty$ и $\partial_j x_k^l(0) = 0$ при $j \neq l$. Поэтому $c_1^l = 0$.

Следовательно, $c_1 = 0$, и функция

$$\psi(s) = c_0 + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} (e^{us} - 1)\,d\mu(u)$$

ограничена на $(-\infty;0)^n$. $\square$

Следствие 19. *Если последовательность функций $\psi_k \in \mathscr{T}_n$ сходится к нулю поточечно на $(-\infty;0]^n$, то $\psi_k(A)x \to 0$ при всех $x \in D(A)$.*

Автор благодарит рецензента за замечания, способствовавшие улучшению рукописи.

Примечание при корректуре. Недавно автору удалось установить, что утверждение 5 теоремы 12 остается верным и без дополнительных условий, сформулированных перед утверждением 4 этой теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bochner S.* Diffusion equasions and stochastic processes // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1949. V. 35. P. 368–370.
2. *Phillips R. S.* On the generation of semigroups of linear operators // Pacif. J. Math. 1952. V. 2. P. 343–369.
3. *Kishimoto A., Robinson D.* Subordinate semigroups and order properties // J. Austral. Math. Soc. (Ser. A). 1981. V. 31, N 1. P. 59–76.
4. *Berg C., Boyadzhiev K., de Laubenfels R.* Generation of generators of holomorphic semigroups // J. Austral. Math. Soc. (Ser. A). 1993. V. 55. P. 246–269.
5. *Carasso A. S., Kato T.* On subordinated holomorphic semigroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 327. P. 867–878.
6. *Миротин А. Р.* О $\mathscr{T}$-исчислении генераторов C_0-полугрупп // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 571–582. Письмо в редакцию // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 4. С. 960.
7. *Schilling R., Song R., Vondracek Z.* Bernstein functions. Theory and applications. Berlin; New York: de Greyter, 2010.
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
9. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
10. *Applebaum D.* Levy processes – from probability to finance and quantum groups // Notices Amer. Math. Soc. 2004. V. 51, N 11. P. 1336–1347.
11. *Миротин А. Р.* Действие функций класса Шенберга $\mathscr{T}$ на конусе диссипативных элементов банаховой алгебры // Мат. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 630–633.
12. *Миротин А. Р.* Функции класса Шенберга $\mathscr{T}$ действуют в конусе диссипативных элементов банаховой алгебры. II // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 3. С. 423–430.
13. *Миротин А. Р.* Многомерное $\mathscr{T}$-исчисление от генераторов C_0-полугрупп // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 2. С. 142–170.

14. *Однопараметрические полугруппы* / Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент и др. М.: Мир, 1992.
15. *Berg Ch., Christensen J. P. R., Ressel P.* Harmonic analysis on semigroups. New York; Berlin: Springer-Verl., 1984 (Grad. Texts in Math.; V. 100).
16. *Миротин А. Р.* О многомерном функциональном исчислении Бохнера — Филлипса // Проблемы физики, математики и техники. 2009. Т. 1, № 1. С. 63–66.
17. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.
18. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев: Вища школа, 1989.
19. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York: Springer-Verl., 1983.
20. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. М.: Наука, 1977.
21. *Пустыльник Е. И.* О функциях позитивного оператора // Мат. сб. 1982. Т. 119, № 1. С. 32–47.

Статья поступила 3 августа 2010 г.

Миротин Адольф Рувимович
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
amirotin@yandex.ru