Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 512.542

ФИТТИНГОВЫ ФУНКТОРЫ И РАДИКАЛЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Е. А. Витько, Н. Т. Воробьев

Аннотация. Развиваются методы распознавания классов Фиттинга и радикалов конечных групп посредством фиттинговых функторов и заданных свойств холловых π-подгрупп.

Ключевые слова: класс Фиттинга, радикал, фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, π-нормально вложенный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор.

Введение

Множество групп $\mathfrak{X}$ называется *классом групп*, если вместе с каждой группой $G \in \mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$ входят все группы, изоморфные G. Отображение f, сопоставляющее каждой группе G из класса $\mathfrak{X}$ некоторую непустую систему ее подгрупп $f(G)$, называют *подгрупповым $\mathfrak{X}$-функтором* [1], если

$$\alpha(f(G)) = f(\alpha(G))$$

для любого изоморфизма α группы G. Изучение подгрупповых функторов специального вида восходит к 60-м годам прошлого столетия в связи с исследованием подгрупповой структуры конечных групп. Первые результаты в этом направлении получены Зудброком [2], Барнесом и Кегелем [3], которые в терминах силовского функтора и функтора Гашюца вывели обобщения фундаментальных теорем Силова и Холла. В последующем стала формироваться алгебра подгрупповых функторов, а сами функторы стали рассматриваться как самостоятельные объекты, которые нашли эффективное применение в теории классов для описания их структуры и свойств канонических подгрупп. В частности, А. Н. Скибой [4] развиты функторный метод и его приложения для описания насыщенных формаций, замкнутых относительно систем подгрупп, а применение функторного метода в теории классов Шунка [1] позволило выявить ряд новых свойств максимальных подгрупп и их пересечений.

Вместе с тем в теории классов Фиттинга подгрупповые функторы и их роль для построения классов и описания радикалов групп долгое время оставались малоисследованными. Впервые ряд новых инъективных свойств групп посредством фиттинговых функторов специального вида найден в работах Андерсона [5] и Шнакенберга [6]. Напомним, что если $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор f называется *фиттинговым* или *радикальным* [1], если

$$f(X) = \{X \cap H : H \in f(G)\}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке совместного проекта БРФФИ — РФФИ (код проекта Ф10Р–231).

для любой $\mathfrak{X}$-группы G и любой ее нормальной $\mathfrak{X}$-подгруппы X. Систематическое изучение алгебры фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов в теории разрешимых классов Фиттинга начато в ряде крупных работ Бейдельмана, Брюстера и Хаука [7, 8] и Бейдельмана, Хаука [9].

Однако область применения функторного метода в указанных работах ограничивалась только случаем, когда $\mathfrak{X}$ равен классу $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп.

В данной работе мы расширяем понятие фиттингова $\mathfrak{S}$-функтора, определяя фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор в общем случае, когда $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс Фиттинга. В частности, изучаем фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы для $\mathfrak{X} \in \{\mathfrak{E}, \mathfrak{S}^\pi\}$, где $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{S}^\pi$ — классы всех конечных групп и всех конечных π-разрешимых групп соответственно. Первая решаемая нами задача — нахождение общих закономерностей построения классов Фиттинга посредством фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов. Доказано (теорема 3.2), что если $\mathfrak{X}$ — непустой класс Фиттинга конечных групп и f — фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, то для любого множества простых чисел π класс $L_\pi(f)$ всех групп $G \in \mathfrak{X}$, в которых все подгруппы из $f(G)$ имеют π'-индекс, является классом Фиттинга. Заметим, что для случая $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ при специальных заданиях $\mathfrak{S}$-функтора класс $L_\pi(f)$ совпадает со многими известными классами Фиттинга, которые определялись заданными свойствами холловых подгрупп (см., например, [10, гл. IX, X]). Исследованию структуры таких классов и их применению к описанию инъекторов и радикалов групп посвящен ряд работ Локетта [11], Бризона [12], Кусака [13], Н. Т. Воробьева и В. В. Шпакова [14] и др.

Если f и g — наследственные фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы, то их *произведением* называют [1] отображение $f \circ g$, сопоставляющее каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ непустое множество подгрупп $\{X : X \in f(Y)$ для некоторой подгруппы $Y \in g(G)\}$. Через Hall_π будем обозначать фиттингов $\mathfrak{S}^\pi$-функтор такой, что $\mathrm{Hall}_\pi(G) = \{G_\pi : G_\pi$ — холлова π-подгруппа группы $G\}$.

Основной результат настоящей работы — описание в терминах фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов радикалов π-разрешимых групп (в частности, радикалов холловых π-подгрупп). Доказано (теорема 4.2), что если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}^\pi$, f — фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, G — некоторая группа, $X \in f(G)$, X_π, G_π — холловы π-подгруппы групп X и G такие, что $X_\pi \leq G_\pi$, и $|A_\pi| = |B_\pi|$ для $A_\pi, B_\pi \in (\mathrm{Hall}_\pi \circ f)(G)$, то пересечение холловой π-подгруппы G_π группы G и радикала $G_{L_\pi(f)}$ совпадает с ядром холловой π-подгруппы X_π в группе G_π. Из теоремы 4.2 вытекает описание радикалов групп в терминах ряда известных классов Фиттинга. В частности, установлено, что если $\mathfrak{K} = K_\pi(\mathfrak{F})$ [15] — класс всех π-разрешимых групп, в которых холлова π-подгруппа является $\mathfrak{F}$-группой, то $\mathfrak{F}$-радикал холловой π-подгруппы H группы G определяется равенством $H_\mathfrak{F} = H \cap G_\mathfrak{K}$.

Заключительный разд. 5 посвящен применению полученного описания радикалов групп для исследования свойств произведений π-нормально вложенных сопряженных фиттинговых $\mathfrak{S}^\pi$-функторов. Доказано (теорема 5.4), что если f и g — π-нормально вложенные сопряженные фиттинговы $\mathfrak{S}^\pi$-функторы, то их произведение $f \circ g$ — π-нормально вложенный сопряженный фиттингов $\mathfrak{S}^\pi$-функтор.

В определениях и обозначениях мы следуем [10, 16]. В работе рассматриваются только конечные группы.

1. Предварительные сведения

Напомним, что *классом Фиттинга* называется класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называется ее *$\mathfrak{F}$-радикалом*, если она является наибольшей из нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G. Подгруппу H группы G называют *$\mathfrak{F}$-инъектором* G, если пересечение $H \cap K$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в K для каждой субнормальной подгруппы K группы G.

Произведением классов Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называется класс групп $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G : G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y})$. Известно [10, теорема IX.1.12], что если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы Фиттинга, то их произведение $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ — класс Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна. Кроме того, очевидно, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{Y}$.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Тогда *холловой π-подгруппой* группы G называют такую подгруппу H из G, что $|H|$ является π-числом, а ее индекс $|G : H|$ — π'-числом.

Напомним, что группа G называется *p-нильпотентной*, если она имеет нормальную холлову p'-подгруппу. Группа G называется *π-нильпотентной*, если она p-нильпотентна для всех p из π. Класс всех π-нильпотентных групп обозначим через $\mathfrak{N}^{\pi}$. Заметим, что $\mathfrak{N}^{\pi} = \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_{\pi}$.

Через $F_{\pi}(G)$ обозначают π-нильпотентный радикал группы G. Известно [16, следствие 4.1.2], что если G — π-разрешимая группа, то $C_G(F_{\pi}(G)) \leq F_{\pi}(G)$.

Пусть f — отображение группы G в некоторую непустую систему ее подгрупп $f(G)$. Если $\alpha : G \to \alpha(G)$ — изоморфизм, то через $\alpha(f(G))$ обозначим множество всех образов в $\alpha(G)$ подгрупп из $f(G)$:

$$\alpha(f(G)) = \{\alpha(X) : X \in f(G)\}.$$

Если N — подгруппа группы G, то коротко через $f(G) \cap N$ будем обозначать множество $\{X \cap N : X \in f(G)\}$.

2. $\mathfrak{X}$-функторы и их классификация

Следуя [1, 7], введем

Определение 2.1. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс Фиттинга. Отображение f, которое каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ ставит в соответствие некоторое непустое множество ее подгрупп $f(G)$, назовем *фиттинговым $\mathfrak{X}$-функтором*, если выполняются следующие условия:

(i) если $\alpha : G \to \alpha(G)$ — изоморфизм, то $\alpha(f(G)) = f(\alpha(G))$;

(ii) если $N \trianglelefteq G$, то $f(G) \cap N = f(N)$.

Классифицируем некоторые фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы в зависимости от различных значений класса $\mathfrak{X}$.

Определение 2.2. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс Фиттинга. Тогда фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор назовем:

1) *π-функтором*, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_{\pi}$, в частности, *$p$-функтором*, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_p$;

2) *разрешимым*, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$;

3) *π-разрешимым*, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}^{\pi}$;

4) *сопряженным*, если для каждой группы $G \in \mathfrak{X}$ множество $f(G)$ есть класс сопряженных подгрупп группы G;

5) *наследственным*, если класс $\mathfrak{X}$ наследствен.

Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор будем называть просто *фиттинговым функтором* для случая, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$.

Примеры 2.3. (а) Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}(G) = \{G_{\mathfrak{F}}\}$. Тогда $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}$ является сопряженным фиттинговым функтором. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi$, то фиттингов функтор $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}$ будем обозначать через Rad_π.

(б) Пусть f — π-разрешимый функтор такой, что каждой группе $G \in \mathfrak{S}^\pi$ он сопоставляет множество всех ее холловых π-подгрупп. Тогда по теореме С. А. Чунихина [17] функтор f является сопряженным. Такой функтор назовем *холловым π-функтором* и обозначим через Hall_π.

(в) Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\mathfrak{S}^\pi$. Если $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(G) = \{X : X$ — $\mathfrak{F}$-инъектор группы $G\}$, то по теореме II.2.5.3 из [18] $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}$ является сопряженным фиттинговым $\mathfrak{X}$-функтором.

Теорема 2.4. *Пусть f, g — наследственные фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *произведение $f \circ g$ — фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор;*

2) *если f и g — сопряженные фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы, то их произведение $f \circ g$ — сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор.*

Доказательство. 1. Покажем, что выполняется требование (i) определения 2.1.

Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и $\alpha : G \to \alpha(G)$ — изоморфизм группы G. Если f, g — фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы и подгруппа H принадлежит $\alpha((f \circ g)(G))$, то $H = \alpha(X)$ для некоторой подгруппы $X \in (f \circ g)(G)$. Тогда $X \in f(Y)$ для некоторой подгруппы $Y \in g(G)$. Таким образом, $H \in \alpha(f(Y))$ для некоторой $Y \in g(G)$. Но так как f — фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, то $H \in f(\alpha(Y))$. Пусть $Y_1 = \alpha(Y)$. Поскольку $Y \in g(G)$, то $Y_1 \in \alpha(g(G))$. Следовательно, $Y_1 \in g(\alpha(G))$. Итак, $H \in f(Y_1)$ для некоторой подгруппы $Y_1 \in g(\alpha(G))$. Значит, $H \in (f \circ g)(\alpha(G))$, и справедливо включение

$$\alpha((f \circ g)(G)) \subseteq (f \circ g)(\alpha(G)).$$

Докажем обратное включение. Пусть $R \in (f \circ g)(\alpha(G))$. Тогда $R \in f(X)$ для некоторой подгруппы $X \in g(\alpha(G))$. Но g — фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор и поэтому $X \in \alpha(g(G))$. Значит, $X = \alpha(Y)$ для некоторой подгруппы $Y \in g(G)$. Следовательно, $R \in f(\alpha(Y)) = \alpha(f(Y))$ для некоторой подгруппы $Y \in g(G)$. Это означает, что $R \in \alpha((f \circ g)(G))$ и условие (i) определения фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора выполняется.

Проверим выполнимость условия (ii) определения 2.1.

Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и N — нормальная подгруппа группы G. Если $X \in (f \circ g)(G)$, то существует подгруппа $Y \in g(G)$ такая, что $X \in f(Y)$. Но тогда ввиду того, что g — фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, следует $Y \cap N \in g(N)$. Кроме того, $Y \cap N \trianglelefteq Y$, и поэтому $X \cap N \in f(Y \cap N)$. Значит, $X \cap N \in (f \circ g)(N)$ и

$$(f \circ g)(G) \cap N \subseteq (f \circ g)(N).$$

Пусть $R \in (f \circ g)(N)$, тогда $R \in f(S)$ для некоторой подгруппы $S \in g(N)$. Но g — фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, поэтому существует такая подгруппа $X \in g(G)$, что $S = X \cap N$. Так как $S \trianglelefteq X$, существует такая подгруппа $Y \in f(X)$, что

$$R = Y \cap S = Y \cap X \cap N = Y \cap N.$$

Следовательно, $R \in (f \circ g)(G) \cap N$, и равенство $(f \circ g)(G) \cap N = (f \circ g)(N)$ доказано.

Докажем утверждение 2. Пусть f и g — сопряженные фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы и G_1, G_2 — подгруппы из $(f \circ g)(G)$. Существуют $H_1, H_2 \in g(G)$ такие, что $G_1 \in f(H_1)$ и $G_2 \in f(H_2)$. Ввиду сопряженности фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора g имеем $H_1^g = H_2$ для некоторого $g \in G$. В силу условия (i) определения фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора $G_1^g \in (f(H_1))^g = f(H_1^g) = f(H_2)$. Итак, $G_1^g \in f(H_2)$ и $G_2 \in f(H_2)$. Но f — сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, значит, $\left(G_1^g\right)^h = G_2$ для некоторого элемента $h \in H_2$. Отсюда следует, что фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор $f \circ g$ является сопряженным. Теорема доказана.

3. Класс $L_\pi(f)$ и его свойства

Изучим конструктивные возможности применения фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов для построения серии семейств классов Фиттинга. Ориентиром для определения следующего класса групп посредством фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора является известная в теории классов (впервые предложенная Локеттом [11]) конструкция разрешимого класса Фиттинга $L_\pi(\mathfrak{F})$ всех таких групп G, $\mathfrak{F}$-инъекторы которых содержат холловы π-подгруппы группы G.

Следуя [7], введем

Определение 3.1. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс Фиттинга, f — фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор и π — множество простых чисел. Определим класс групп $L_\pi(f)$ следующим образом: $G \in L_\pi(f)$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{X}$ и индекс $|G : X|$ является π'-числом для всех $X \in f(G)$.

Если $\pi = \varnothing$, то положим $L_\pi(f) = \mathfrak{X}$. В случае, когда $\pi = \{p\}$, обозначим класс $L_\pi(f)$ через $L_p(f)$. Если $\pi = \mathbb{P}$, то $L_{\mathbb{P}}(f) = \bigcap\limits_{p \in \mathbb{P}} L_p(f)$ обозначим через $L(f)$.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс Фиттинга, f — фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор. Тогда для любого множества простых чисел π класс групп $L_\pi(f)$ является классом Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $G \in L_\pi(f)$ и N — нормальная подгруппа группы G. Если $Y \in f(N)$, то ввиду условия (ii) определения 2.1 $Y = X \cap N$, где X — подгруппа группы G из $f(G)$. Тогда справедливо равенство

$$|N : Y| = \frac{|G : X|}{|G : XN|}.$$

Поскольку $G \in L_\pi(f)$ и $X \in f(G)$, индекс $|G : X|$ является π'-числом. Значит, индекс $|N : Y|$ также является π'-числом, и $N \in L_\pi(f)$.

Пусть N_1 и N_2 — нормальные подгруппы группы G такие, что $G = N_1N_2$ и N_1, N_2 принадлежат классу $L_\pi(f)$.

Если $X \in f(G)$, то по определению фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора выполняются следующие равенства:

$$X \cap N_1 = Y_1, \tag{3.2.1}$$

$$X \cap N_2 = Y_2 \tag{3.2.2}$$

для некоторых $Y_1 \in f(N_1)$ и $Y_2 \in f(N_2)$.

Вычисляя индекс подгруппы X в группе G, получаем равенство

$$\rho = |G : X| = \frac{|N_1| \cdot |N_2|}{|X| \cdot |N_1 \cap N_2|} = |N_1 : Y_1| \cdot |N_2 : Y_2| \cdot \frac{|Y_1| \cdot |Y_2|}{|X| \cdot |N_1 \cap N_2|}. \tag{3.2.3}$$

Поэтому с учетом равенств (3.2.1)–(3.2.3)

$$\rho = |N_1 : Y_1| \cdot |N_2 : Y_2| \cdot \frac{|Y_1Y_2| \cdot |Y_1 \cap Y_2|}{|X| \cdot |N_1 \cap N_2|}$$
$$= |N_1 : Y_1| \cdot |N_2 : Y_2| \cdot \frac{|(X \cap N_1)(X \cap N_2)| \cdot |X \cap N_1 \cap N_2|}{|X| \cdot |N_1 \cap N_2|}$$
$$= \frac{|N_1 : Y_1| \cdot |N_2 : Y_2|}{|X : ((X \cap N_1)(X \cap N_2))| \cdot |(N_1 \cap N_2) : (X \cap N_1 \cap N_2)|}.$$

Так как индексы $|N_1 : Y_1|$ и $|N_2 : Y_2|$ по условию являются π'-числами, $|G : X|$ также π'-число. Следовательно, $G \in L_\pi(f)$. Теорема доказана.

При конкретных заданиях $\mathfrak{X}$-функтора f данная теорема позволяет выделить многие семейства классов Фиттинга, которые были известны лишь в разрешимом случае (см., например, [10, гл. IX, X]).

Примеры 3.3. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — непустые классы Фиттинга, π — множество простых чисел и f — фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор.

1. Пусть f — π-разрешимый фиттингов функтор и $f = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}} \circ \mathrm{Hall}_\pi$. Тогда $L_\pi(f) = K_\pi(\mathfrak{F})$ — класс всех таких групп G, в которых холлова π-подгруппа G является $\mathfrak{F}$-группой.

Действительно, если $G \in L_\pi(\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}} \circ \mathrm{Hall}_\pi)$ и G_π — холлова π-подгруппа группы G, то $(G_\pi)_{\mathfrak{F}} \in (\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}} \circ \mathrm{Hall}_\pi)(G)$. Следовательно, индекс $|G : (G_\pi)_{\mathfrak{F}}|$ — π'-число и $(G_\pi)_{\mathfrak{F}}$ — холлова π-подгруппа группы G. Значит, $(G_\pi)_{\mathfrak{F}} = G_\pi$ и $G \in K_\pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $G \in K_\pi(\mathfrak{F})$. Если $X \in (\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}} \circ \mathrm{Hall}_\pi)(G)$, то X является $\mathfrak{F}$-радикалом холловой π-подгруппы группы G, т. е. $X = (G_\pi)_{\mathfrak{F}}$. Но $G_\pi \in \mathfrak{F}$ и, значит, $(G_\pi)_{\mathfrak{F}} = G_\pi$. Тогда индекс $|G : X| = |G : G_\pi|$ является π'-числом для всех $X \in f(G)$ и $G \in L_\pi(f)$.

Заметим, что в универсуме $\mathfrak{S}^\pi$ класс Фиттинга $K_\pi(\mathfrak{F})$ применялся нами для описания радикалов холловых π-подгрупп в [15].

2. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ и $f = \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}$. Тогда $L_\pi(f) = L_\pi(\mathfrak{F})$ — класс всех таких групп G, в которых $\mathfrak{F}$-инъектор G имеет π'-индекс. Такая конструкция впервые предложена Локеттом [11], и ее многочисленные применения для описания структуры инъекторов и характеризации разрешимых классов Фиттинга можно найти в [10, гл. IX].

3. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ и $f = \mathrm{Rad}_\pi \circ \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}$. Тогда $L_\pi(f) = L'_\pi(\mathfrak{F})$ — класс всех таких групп G, в которых холлова π-подгруппа G является нормальной подгруппой $\mathfrak{F}$-инъектора G.

Действительно, если $G \in L_\pi(\mathrm{Rad}_\pi \circ \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}})$ и V — $\mathfrak{F}$-инъектор группы G, то $O_\pi(V) \in (\mathrm{Rad}_\pi \circ \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}})(G)$. Следовательно, индекс $|G : O_\pi(V)|$ — π'-число. Но тогда $O_\pi(V)$ — холлова π-подгруппа группы G и поэтому $G \in L'_\pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $G \in L'_\pi(\mathfrak{F})$ и $X \in (\mathrm{Rad}_\pi \circ \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}})(G)$. Тогда X является $\mathfrak{E}_\pi$-радикалом некоторого $\mathfrak{F}$-инъектора V группы G. Значит, $X = O_\pi(V)$. По определению класса $L'_\pi(\mathfrak{F})$ имеем $G_\pi \trianglelefteq V$. Отсюда следует, что $G_\pi \leq O_\pi(V)$ и поэтому $O_\pi(V) = G_\pi$. Следовательно, индекс $|G : X|$ является π'-числом для всех $X \in (\mathrm{Rad}_\pi \circ \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}})(G)$ и $G \in L_\pi(\mathrm{Rad}_\pi \circ \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}})$.

4. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ и $f = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}$. Тогда класс $L_\pi(f) = R_\pi(\mathfrak{F})$ — класс групп G, в которых холлова π-подгруппа G содержится в $\mathfrak{F}$-радикале группы. Такой класс использовался нами при описании факторизаций локальных классов Фиттинга нелокальными множителями [14].

4. Радикалы, определяемые фиттинговыми $\mathfrak{X}$-функторами

Пусть π — непустое множество простых чисел. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *π-насыщенным*, если выполняется равенство $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'} = \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{E}_{\pi'}$ — класс всех π'-групп.

Лемма 4.1. *Пусть π — непустое множество простых чисел, f — π-разрешимый фиттингов функтор. Тогда класс Фиттинга $L_\pi(f)$ π-насыщен.*

Доказательство. Очевидно, что $L_\pi(f) \subseteq L_\pi(f)\mathfrak{E}_{\pi'}$. Пусть $G \in L_\pi(f)\mathfrak{E}_{\pi'}$. Тогда индекс $|G : G_{L_\pi(f)}|$ является π'-числом. Кроме того, если $X \in f(G)$, то ввиду условия (ii) определения 2.1 $G_{L_\pi(f)} \cap X \in f(G_{L_\pi(f)})$. Но $G_{L_\pi(f)}$ является $L_\pi(f)$-группой, поэтому индекс $|G_{L_\pi(f)} : (G_{L_\pi(f)} \cap X)|$ будет π'-числом. Следовательно, индекс

$$|G : X| = \frac{|G : G_{L_\pi(f)}| \cdot |G_{L_\pi(f)} : (G_{L_\pi(f)} \cap X)|}{|X : (G_{L_\pi(f)} \cap X)|}$$

является π'-числом и равенство $L_\pi(f) = L_\pi(f)\mathfrak{E}_{\pi'}$ доказано. Лемма доказана.

Следующая теорема описывает общие закономерности построения радикалов π-разрешимых групп в терминах π-разрешимых фиттинговых функторов и класса $L_\pi(f)$ и представляет основной результат работы.

Теорема 4.2. *Пусть π — непустое множество простых чисел, f — π-разрешимый фиттингов функтор такой, что для любой группы G выполняется равенство $|A_\pi| = |B_\pi|$ для всех групп $A_\pi, B_\pi \in (\mathrm{Hall}_\pi \circ f)(G)$. Тогда для любой π-разрешимой группы G и любой подгруппы X из $f(G)$ таких, что $X_\pi \leq G_\pi$ и $C = \mathrm{Core}_{G_\pi}(X_\pi)$, справедливы утверждения:*

1) $G_\pi \cap G_{L_\pi(f)} = C$;

2) *если* $K/\langle C^G\rangle = O_{\pi'}(G/\langle C^G\rangle)$, *то* $K = G_{L_\pi(f)}$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $\mathfrak{L} = L_\pi(f)$. Поскольку X_π — холлова π-подгруппа группы X, подгруппа $X_\pi \cap G_\mathfrak{L}$ является холловой π-подгруппой группы $X \cap G_\mathfrak{L}$. По определению фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора $X \cap G_\mathfrak{L} \in f(G_\mathfrak{L})$. Но $G_\mathfrak{L}$ является $\mathfrak{L}$-группой, следовательно, индекс $|G_\mathfrak{L} : (X \cap G_\mathfrak{L})|$ будет π'-числом. Отсюда получаем, что индекс

$$|G_\mathfrak{L} : (X_\pi \cap G_\mathfrak{L})| = |G_\mathfrak{L} : (X \cap G_\mathfrak{L})| \cdot |(X \cap G_\mathfrak{L}) : (X_\pi \cap G_\mathfrak{L})|$$

также π'-число. Таким образом, $X_\pi \cap G_\mathfrak{L} \in \mathrm{Hall}_\pi(G_\mathfrak{L})$. Но $G_\pi \cap G_\mathfrak{L}$ является холловой π-подгруппой группы $G_\mathfrak{L}$, и поэтому $X_\pi \cap G_\mathfrak{L} = G_\pi \cap G_\mathfrak{L}$. Итак, имеем $G_\pi \cap G_\mathfrak{L} \leq X_\pi$ и $G_\pi \cap G_\mathfrak{L} \trianglelefteq G_\pi$. Значит, $G_\pi \cap G_\mathfrak{L} \leq \mathrm{Core}_{G_\pi}(X_\pi)$.

Докажем обратное включение. Пусть $F/G_\mathfrak{L} = F_\pi(G/G_\mathfrak{L})$ — π-нильпотентный радикал группы $G/G_\mathfrak{L}$. Так как $F_\mathfrak{L} = F \cap G_\mathfrak{L}$ и $G_\mathfrak{L} \leq F$, то $G_\mathfrak{L} = F_\mathfrak{L}$. Тогда $F/F_\mathfrak{L} \in \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$. Следовательно, с учетом леммы 4.1 получим

$$F \in \mathfrak{L}(\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi) = (\mathfrak{L}\mathfrak{E}_{\pi'})\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{L}\mathfrak{N}_\pi.$$

Таким образом, $F/G_\mathfrak{L} \in \mathfrak{N}_\pi$, и $F/G_\mathfrak{L}$ является π-группой. Тогда $F \leq G_\pi G_\mathfrak{L}$.

Так как $(XG_\mathfrak{L} \cap F)/G_\mathfrak{L} \lhd\lhd F/G_\mathfrak{L}$, то $XG_\mathfrak{L} \cap F \lhd\lhd G$. Значит, $X \cap XG_\mathfrak{L} \cap F = X \cap F \in f(XG_\mathfrak{L} \cap F)$.

С другой стороны, индекс $|(XG_\mathfrak{L} \cap F) : (X \cap F)| = |(X \cap F)G_\mathfrak{L} : (X \cap F)| = |G_\mathfrak{L} : (X \cap G_\mathfrak{L})|$ является π'-числом.

Пусть Y — некоторая подгруппа из $f(XG_{\mathfrak{L}} \cap F)$. Представим индекс

$$|(XG_{\mathfrak{L}} \cap F) : Y| = \frac{|XG_{\mathfrak{L}} \cap F|}{|Y_\pi|} \cdot \frac{|Y_\pi|}{|Y|}$$

для $Y_\pi \in (\mathrm{Hall}_\pi \circ f)(XG_{\mathfrak{L}} \cap F)$. Учитывая условие теоремы, получаем, что для группы $(X \cap F)_\pi \in (\mathrm{Hall}_\pi \circ f)(XG_{\mathfrak{L}} \cap F)$ выполняется равенство $|Y_\pi| = |(X \cap F)_\pi|$. Тогда индекс $|(XG_{\mathfrak{L}} \cap F) : Y|$ представляется в виде

$$\frac{|XG_{\mathfrak{L}} \cap F|}{|(X \cap F)_\pi|} \cdot \frac{|Y_\pi|}{|Y|} = \frac{|(XG_{\mathfrak{L}} \cap F) : (X \cap F)| \cdot |(X \cap F) : (X \cap F)_\pi|}{|Y : Y_\pi|}$$

и является π'-числом для всех $Y \in f(XG_{\mathfrak{L}} \cap F)$. Значит, $XG_{\mathfrak{L}} \cap F \in \mathfrak{L}$ и $XG_{\mathfrak{L}} \cap F \leq G_{\mathfrak{L}}$. С другой стороны, F и $CG_{\mathfrak{L}}$ — нормальные подгруппы группы $G_\pi G_{\mathfrak{L}}$. Следовательно, $[CG_{\mathfrak{L}}, F] \leq CG_{\mathfrak{L}} \cap F \leq XG_{\mathfrak{L}} \cap F \leq G_{\mathfrak{L}}$. Отсюда $CG_{\mathfrak{L}} \leq C_G(F/G_{\mathfrak{L}})$. Так как $C_G(F/G_{\mathfrak{L}}) \leq F$, то $CG_{\mathfrak{L}} \leq F \cap CG_{\mathfrak{L}} \leq G_{\mathfrak{L}}$ и поэтому $C \leq G_\pi \cap G_{\mathfrak{L}}$ и $C = G_\pi \cap G_{\mathfrak{L}}$.

Докажем утверждение 2. Пусть $K/\langle C^G \rangle = O_{\pi'}(G/\langle C^G \rangle)$.

Ввиду утверждения 1 подгруппа C является холловой π-подгруппой группы $G_{\mathfrak{L}}$. Но так как $C \leq \langle C^G \rangle \leq G_{\mathfrak{L}}$, индекс

$$|\langle C^G \rangle : C| = \frac{|G_{\mathfrak{L}} : C|}{|G_{\mathfrak{L}} : \langle C^G \rangle|}$$

является π'-числом. Следовательно, индекс $|K : C| = |K : \langle C^G \rangle| \cdot |\langle C^G \rangle : C|$ также π'-число и $C \in \mathrm{Hall}_\pi(K)$. Поскольку $C \leq X \cap K \in f(K)$, то $K \in \mathfrak{L}$ и $K \leq G_{\mathfrak{L}}$.

С другой стороны, индекс

$$|G_{\mathfrak{L}} : \langle C^G \rangle| = \frac{|G_{\mathfrak{L}} : C|}{|\langle C^G \rangle : C|}$$

является π'-числом. Следовательно, $G_{\mathfrak{L}}/\langle C^G \rangle \leq O_{\pi'}(G/\langle C^G \rangle) = K/\langle C^G \rangle$, и поэтому $G_{\mathfrak{L}} \leq K$. Теорема доказана.

Следствие 4.3. *Пусть π-разрешимый фиттингов функтор f, группа G, холловы π-подгруппы X_π, G_π удовлетворяют условиям теоремы* 4.2. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *X_π — холлова π-подгруппа некоторой нормальной подгруппы группы G;*

2) *X_π — нормальная подгруппа группы G_π;*

3) *$X_\pi \leq G_{L_\pi(f)}$;*

4) *X_π — холлова π-подгруппа группы $G_{L_\pi(f)}$.*

Доказательство. 1 $\Rightarrow$ 2. Пусть $X_\pi \in \mathrm{Hall}_\pi(K)$ и $K \trianglelefteq G$. Тогда $X_\pi = G_\pi \cap K$ и $X_\pi \trianglelefteq G_\pi$.

2 $\Rightarrow$ 3. Если $X_\pi \trianglelefteq G_\pi$, то $\mathrm{Core}_{G_\pi}(X_\pi) = X_\pi$. Тогда по теореме 4.2 $G_\pi \cap G_{L_\pi(f)} = X_\pi$. Следовательно, $X_\pi \leq G_{L_\pi(f)}$.

3 $\Rightarrow$ 4. Пусть $X_\pi \leq G_{L_\pi(f)}$. Так как по условию $X_\pi \leq G_\pi$, то $X_\pi \leq G_\pi \cap G_{L_\pi(f)}$. Кроме того, $\mathrm{Core}_{G_\pi}(X_\pi) \leq X_\pi$, и ввиду теоремы 4.2 $G_\pi \cap G_{L_\pi(f)} \leq X_\pi$. Таким образом, $G_\pi \cap G_{L_\pi(f)} = X_\pi$.

4 $\Rightarrow$ 1. Пусть X_π — холлова π-подгруппа группы $G_{L_\pi(f)}$. Так как $G_{L_\pi(f)} \trianglelefteq G$, утверждение 1 выполняется.

При конкретных заданиях π-разрешимого фиттингова функтора доказанная теорема позволяет описать радикалы холловых π-подгрупп π-разрешимых групп, что подтверждает

Следствие 4.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, π — непустое множество простых чисел, H — холлова π-подгруппа π-разрешимой группы G и $\mathfrak{K} = (G \in \mathfrak{S}^{\pi} : \mathrm{Hall}_{\pi}(G) \subseteq \mathfrak{F})$ — класс Фиттинга. Тогда $H \cap G_{\mathfrak{K}} = H_{\mathfrak{F}}$ и $G_{\mathfrak{K}}/\langle H_{\mathfrak{F}}^{G}\rangle = O_{\pi'}\big(G/\langle H_{\mathfrak{F}}^{G}\rangle\big)$.*

Доказательство. Пусть $f = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}} \circ \mathrm{Hall}_{\pi}$ — π-разрешимый фиттингов функтор, $X \in f(G)$ и X_{π} — холлова π-подгруппа группы X такая, что $X_{\pi} \leq H$. Так как $L_{\pi}(f) = \mathfrak{K}$, по теореме 4.2

$$H \cap G_{\mathfrak{K}} = H \cap G_{L_{\pi}(f)} = \mathrm{Core}_H(X_{\pi}).$$

Но X — подгруппа из $f(G)$, поэтому $X = H_{\mathfrak{F}}$. Тогда ввиду того, что X является π-группой, справедливо равенство $X_{\pi} = H_{\mathfrak{F}}$. Таким образом, $\mathrm{Core}_H(X_{\pi}) = H_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $H \cap G_{\mathfrak{K}} = H_{\mathfrak{F}}$.

Теперь, применяя утверждение 2 теоремы 4.2, получаем

$$G_{\mathfrak{K}}/\langle H_{\mathfrak{F}}^{G}\rangle = G_{L_{\pi}(f)}/\langle H_{\mathfrak{F}}^{G}\rangle = O_{\pi'}\big(G/\langle H_{\mathfrak{F}}^{G}\rangle\big).$$

Заметим, что в разрешимом случае структура радикала холловой π-подгруппы впервые исследовалась Бризоном [12].

Если π — множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $\sigma = \pi(\mathfrak{F})$, следуя Локетту [11] и Галледжи [19], можно определить классы групп

$$\mathfrak{L} = (G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma} \cap \mathfrak{S}^{\pi} : V \geq G_{\pi}), \quad \mathfrak{L}' = (G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma} \cap \mathfrak{S}^{\pi} : G_{\pi} \trianglelefteq V)$$

соответственно (здесь через V обозначаем $\mathfrak{F}$-инъектор группы G). Тогда с учетом теоремы С. А. Чунихина из [17] и теоремы II.2.5.3 из [18] легко проверить, что $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}'$ — классы Фиттинга.

Следствие 4.5. *Пусть V — $\mathfrak{F}$-инъектор группы $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma} \cap \mathfrak{S}^{\pi}$, H и R — холловы π-подгруппы групп G и V соответственно. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $C = \mathrm{Core}_H(R)$, то $C = H \cap G_{\mathfrak{L}}$ и $G_{\mathfrak{L}}/\langle C^G\rangle = O_{\pi'}(G/\langle C^G\rangle)$;*

2) *если $C_1 = \mathrm{Core}_H(O_{\pi}(V))$, то $C_1 = H \cap G_{\mathfrak{L}'}$ и $G_{\mathfrak{L}'}/\langle C_1^G\rangle = O_{\pi'}\big(G/\langle C_1^G\rangle\big)$.*

Доказательство. Утверждение 1 вытекает непосредственно из теоремы 4.2 ввиду того, что $\mathfrak{L} = L_{\pi}(\mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}})$.

Докажем утверждение 2. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma} \cap \mathfrak{S}^{\pi}$ и фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор f равен $\mathrm{Rad}_{\pi} \circ \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}$, $X \in f(G)$ и X_{π} — холлова π-подгруппа группы X такая, что $X_{\pi} \leq H$. Тогда ввиду равенства $L'_{\pi}(\mathfrak{F}) = L_{\pi}(f)$ по теореме 4.2 $H \cap G_{\mathfrak{L}'} = \mathrm{Core}_H(X_{\pi})$. Но X — подгруппа из $f(G)$, поэтому $X = O_{\pi}(V)$. Следовательно, $X_{\pi} = O_{\pi}(V)$ и $H \cap G_{\mathfrak{L}'} = \mathrm{Core}_H(O_{\pi}(V))$. Кроме того, учитывая утверждение 2 теоремы 4.2, имеем $G_{\mathfrak{L}'}/\langle C_1^G\rangle = O_{\pi'}\big(G/\langle C_1^G\rangle\big)$.

5. π-Нормально вложенные фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы

Используя результаты разд. 4, выделим еще одно семейство $\mathfrak{X}$-функторов и изучим свойства их произведений.

Определение 5.1. Пусть π — множество простых чисел.

(a) Подгруппу X группы G назовем *π-нормально вложенной*, если холлова π-подгруппа группы X является холловой π-подгруппой некоторой нормальной подгруппы группы G.

(b) Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор f назовем *π-нормально вложенным*, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является π-нормально вложенной подгруппой G.

Заметим, что для $\pi = \{p\}$ функтор f называют *p-нормально вложенным.* В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, такие функторы исследовались в работах [7, 8].

Следуя [7], введем

Определение 5.2. Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор f назовем *удовлетворяющим аргументу Фраттини*, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$, подгруппы $N \trianglelefteq G$ и $X \in f(G)$ выполняется равенство $G = N \cdot N_G(X \cap N)$.

Лемма 5.3. *Пусть f — сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор. Тогда f удовлетворяет аргументу Фраттини.*

Доказательство. Пусть $N \trianglelefteq G$ и $X \in f(G)$. Тогда по условию (ii) определения 2.1 $X \cap N \in f(N)$. Пусть $g \in G$. По определению $\mathfrak{X}$-функтора $X^g \in f(G)$. Поэтому $X^g \cap N = (X \cap N)^g \in f(N)$. Так как f — сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, существует такой элемент $n \in N$, что $(X \cap N)^{gn} = X \cap N$. Следовательно, $gn \in N_G(X \cap N)$ и $g \in N_G(X \cap N) \cdot N$. Равенство $G = N_G(X \cap N) \cdot N$ доказано. Лемма доказана.

Теорема 5.4. *Пусть π — множество простых чисел и f, g — сопряженные π-разрешимые фиттинговы функторы. Если $Y \in g(G)$, $X \in f(Y)$, подгруппа X — π-нормально вложенная подгруппа группы Y и подгруппа Y — π-нормально вложенная подгруппа группы G, то X является π-нормально вложенной подгруппой G. В частности, если функторы f и g π-нормально вложены, то их произведение $f \circ g$ — π-нормально вложенный функтор.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L} = L_\pi(g)$ и $R = G_{\mathfrak{L}}$. Тогда $Y \cap R \in g(R)$. Так как g — сопряженный π-разрешимый фиттингов функтор, по аргументу Фраттини $G = RN_G(Y \cap R)$. Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{|G|}{|N_G(Y \cap R)|} = \frac{|R : (Y \cap R)|}{|(R \cap N_G(Y \cap R)) : (Y \cap R)|}. \tag{5.4.1}$$

Поскольку $R \in L_\pi(g)$, индекс $|R : (Y \cap R)|$ является π'-числом. В силу (5.4.1) индекс $|G : N_G(Y \cap R)|$ также π'-число. Тогда существует холлова π-подгруппа H группы G такая, что $H \le N_G(Y \cap R)$. Следовательно, $H \cap Y \cap R \in \mathrm{Hall}_\pi(Y \cap R) \subseteq \mathrm{Hall}_\pi(R)$. Но $H \cap R \in \mathrm{Hall}_\pi(R)$, значит, $H \cap Y \cap R = H \cap R$, и поэтому $H \cap R \le Y$. Ввиду того, что Y — π-нормально вложенная подгруппа G, по следствию 4.3 $\mathrm{Hall}_\pi(Y) \subseteq \mathrm{Hall}_\pi(R)$. Тогда $H \cap R \in \mathrm{Hall}_\pi(Y)$.

Пусть X_π — холлова π-подгруппа группы X. Тогда существует элемент $y \in Y$ такой, что $X_\pi \le (H \cap R)^y$. Так как X — π-нормально вложенная подгруппа группы Y, ввиду следствия 4.3

$$X_\pi = (H \cap R)^y \cap Y_{L_\pi(f)} = (H \cap (R \cap Y)_{L_\pi(f)})^y.$$

Поскольку $(R \cap Y)_{L_\pi(f)}$ является характеристической подгруппой группы $R \cap Y$ и $R \cap Y \trianglelefteq (R \cap Y)H$, то H нормализует $(R \cap Y)_{L_\pi(f)}$. Значит, $X_\pi \trianglelefteq H^y$. Так как по утверждению 2 теоремы 2.4 $f \circ g$ — сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, ввиду следствия 4.3 $X_\pi \in \mathrm{Hall}_\pi(G_{L_\pi(f \circ g)})$. Таким образом, X является π-нормально вложенной подгруппой группы G. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.
2. *Sudbrock W.* Sylowfunktionen in endlichen Gruppen // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. 1966. V. 36, N 1. P. 158–184.

3. *Barnes D. W., Kegel O. H.* Gaschütz functors on finite soluble groups // Math. Z. 1966. Bd 94. Heft 2. S. 134–142.
4. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
5. *Anderson W.* Fitting sets in finite soluble groups: Thes. ... doct. philosophy. Michigan State University, 1973.
6. *Schnackenberg F. R.* Injectors of finite groups // J. Algebra. 1974. V. 30. P. 548–558.
7. *Beidleman J. C., Brewster R., Hauck P.* Fittingfunktoren in endlichen auflösbaren Gruppen. I // Math. Z. 1983. Bd 182. S. 359–384.
8. *Beidleman J. C., Brewster R., Hauck P.* Fitting functors in finite solvable groups. II // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1987. V. 101. P. 37–55.
9. *Beidleman J. C., Hauck P.* Closure properties for Fitting functors // Mh. Math. 1989. V. 108. P. 1–22.
10. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
11. *Lockett P.* On the theory of Fitting classes of finite soluble groups // Math. Z. 1973. Bd 131. S. 103–115.
12. *Brison O. J.* Hall operators for Fitting classes // Arch. Math. (Basel). 1979. V. 33. P. 1–9.
13. *Cusack E.* Normal Fitting classes and Hall subgroups // Bull. Austral. Math. Soc. 1980. V. 21. P. 229–236.
14. *Шпаков В. В., Воробьев Н. Т.* Локальные факторизации нелокальных классов Фиттинга // Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 3. С. 111–118.
15. *Воробьев Н. Т., Витько Е. А., Иванова Н. В.* О свойствах радикалов холловых подгрупп π-разрешимых групп // Веснік Віцебскага дзяржачнага універсітэта. 2008. Т. 48, № 2. С. 125–129.
16. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
17. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп. Минск: Наука и техника, 1964.
18. *Guo Wenbin.* The theory of classes of groups. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000 (Math. Appl.; V. 505).
19. *Gallego M.* A note on Hall operators for Fitting classes // Bull. London Math. Soc. 1985. V. 17. P. 248–252.

Статья поступила 16 декабря 2010 г.

Витько Елена Анатольевна, Воробьев Николай Тимофеевич
Витебский гос. университет им. П. М. Машерова,
Московский пр., 33, Витебск 210038, Беларусь
`alenkavit@tut.by` `nicholas@vsu.by`