Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 519.644+532.582.33

НЕНАСЫЩАЕМЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

В. Н. Белых

Аннотация. На основе фундаментальных идей К. И. Бабенко построен принципиально новый — *ненасыщаемый* — метод численного решения внешней осесимметричной задачи Неймана для уравнения Лапласа. Отличительная черта метода — отсутствие главного члена погрешности, и как результат — способность автоматически подстраиваться под любые естественные для задачи классы гладкости решений.

Результат принципиален, ибо в случае C^∞-гладких решений предложенный метод с точностью до медленно растущего множителя реализует абсолютно неулучшаемую экспоненциальную оценку погрешности. Неулучшаемость оценки обусловлена асимптотикой александровских поперечников компакта C^∞-гладких функций, содержащего точное решение задачи. Эта асимптотика также имеет вид убывающей к нулю экспоненты.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, задача Неймана, ненасыщаемый численный метод, экспоненциальная сходимость.

Краевые задачи имеют, как правило, решения с достаточно широким спектром дифференциальных свойств, что приводит к рассмотрению различных классов корректности. Применение к этим задачам стандартных вычислительных методов часто сталкивается лишь с формальной констатацией существующих трудностей без указания возможных путей их преодоления. На практике выбирать подходящий численный метод приходится постоянно. В одних случаях этот выбор осуществляется традиционно, в других же, когда цена ошибки слишком велика, выбор численного метода становится трудной математической проблемой [1]. Подбор конкретного численного метода не является процессом чисто произвольным и случайным, а детерминирован, и прежде всего той частью информации о решении, которую мы, безусловно, намерены использовать в оценке точности производимых компьютерных вычислений. Именно такой неформальный подход к проблемам конструирования численных методов открывает для вычислительной практики новую перспективу: порядок убывания к нулю функционала погрешности численного метода должен определяться глубинными связями конструкции метода с классом корректности исходной задачи. Поэтому начавшееся с работы К. И. Бабенко [2] осознание значимости для реальных компьютерных вычислений экстраординарных запасов гладкости решений краевых задач следует считать скорее возвращением к классическим нормам, но никак не исключением из существующих правил.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00207–а, 11–01–00147–а), а также Междисциплинарного интеграционного проекта № 40 Президиума СО РАН.

При конструировании алгоритмов численного решения краевых задач речь идет всегда об аппроксимации континуальных объектов конечномерными и о построении аналогов последних, отправляясь от понятий, допускающих финитную формализацию. При этом качество финитизаций оценивается сравнением их точности $\varepsilon > 0$ и объема N начальных данных с асимптотиками двух числовых характеристик $\alpha_n(X)$ и $H_\varepsilon(X)$ — аппроксимационных возможностей компакта X решений задачи [3]. Точнее, сравнение проводится с асимптотикой при $n \to \infty$ александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$ и с асимптотикой при $\varepsilon \to 0$ колмогоровской ε-энтропии $H_\varepsilon(X)$. Напомним, что поперечник $\alpha_n(X)$ характеризует способность компакта X «хорошо» приближаться компактами топологической размерности $\leq n$, а энтропия $H_\varepsilon(X)$, определяемая двоичным логарифмом от минимального числа элементов в наиболее экономном 2ε-покрытии X, указывает в битах минимальный объем информации, требуемый для различения элементов в X с точностью $\varepsilon > 0$. При этом убывание $\alpha_n(X)$ к нулю при $n \to \infty$ тем быстрее, а рост $H_\varepsilon(X)$ к бесконечности при $\varepsilon \to 0$ тем медленнее, чем выше запас гладкости составляющих компакт X элементов. Для компакта X бесконечной гладкости $\alpha_n(X)$ убывает к нулю при $n \to \infty$ экспоненциально, а рост $H_\varepsilon(X)$ к бесконечности при $\varepsilon \to 0$ характеризуется фиксированной степенью $\log(1/\varepsilon)$. По своему смыслу $\alpha_n(X)$ и $H_\varepsilon(X)$ формируют точные числовые представления о предельных возможностях вычислительных алгоритмов. Практическая эффективность численного алгоритма определяется тем, насколько полно дискретизации краевых задач наследуют свойства своих дифференциальных прототипов. Выбор же численного метода должен обеспечивать требуемую точность $\varepsilon \geq \alpha_n(X)$ при наименьшем объеме $N \geq H_\varepsilon(X)$ перерабатываемой битовой информации.

Между тем действительность совсем не так замечательна, как об этом старательно напоминает теория: не воздав должное ошибкам округления, легко ошибиться в оценке достоверности получаемого компьютерного ответа. Связано это с тем, что никакие технические средства не позволяют выполнять арифметические операции над числами, заданными бесконечными дробями. Поэтому округление, т. е. операция замены действительного числа конечной дробью, просто необходимо при любой компьютерной реализации. Разность между округленным и округляемым числами называется *ошибкой округления.* Округление осуществляется после каждой арифметической операции и при записи числа в память компьютера. При этом, какими бы малыми ни́ были ошибки округления, их появление существенно меняет математические свойства самих операций. В этой связи при реализации сложного вычислительного алгоритма на его окончательный результат оказывает влияние большое число ошибок округления результатов промежуточных вычислений. Второстепенные на первый взгляд, они (вычисления) требуют достаточно ответственных и квалифицированных действий в зависимости от значимости этих вычислений во всем процессе. Кроме того, эти вычисления должны быть относительно просты в реализации. Поэтому так важны и детали вычислительной технологии, позволяющие осуществлять эффективный контроль всех промежуточных вычислений (процедур аппроксимаций, квадратурных формул, итераций).

Вопрос о ценности, или, что то же самое, о точности числового ответа находится в прямой зависимости от качеств используемой при решении задачи дискретизации. Связано это с тем, что вычислитель обязан соединить с конструируемой им числовой процедурой два события финитизации: превращение непрерывного в дискретное и дискретного опять в непрерывное. Эти события разделены обычно множеством вычислительных процедур, составляющих цепочку промежуточных событий — вычислений, в которой качество каждого последующего приближения из-за ошибок округлений зависит от предыдущего. Общая ошибка всех звеньев этой цепочки вычислений составляет суммарную ошибку вычислений численного метода. Для неустойчивых и плохо обусловленных вычислительных процессов нет никакой уверенности в правильности результата всей сконструированной цепочки компьютерных вычислений. Последнее означает, что без высококачественной дискретизации краевой задачи, учитывающей как имеющиеся запасы гладкости решений, так и всю специфику ее компьютерной реализации, рассчитывать в приближенном решении задачи можно лишь на удачу, а не на гарантированный успех.

Иными словами, пренебрежение информацией об экстраординарном запасе гладкости решений задач и финитностью производимых вычислений не только сужает возможности численных алгоритмов, но является также расточительным и неэкономным выбором. Особенно наглядно это проявляется в эллиптических задачах, компакты решений которых устроены сравнительно просто [3]. При этом их качественную финитизацию отличает способность дискретизаций к наследованию характеристического свойства этих задач — шаудеровских оценок гладкости решений.

Существенным вкладом в проблематику численного решения эллиптических задач явилось открытие К. И. Бабенко принципиально новых — *ненасыщаемых* — вычислительных методов [2, 3]. Имеющиеся примеры приложения таких методов в конкретных задачах [3–6] хотя и немногочисленны, но убеждают в содержательности и плодотворности такого подхода в реальных компьютерных вычислениях.

Отличительная черта ненасыщаемого численного метода [3, 7] — это отсутствие главного члена погрешности. Как результат проявляется способность метода автоматически подстраиваться под любые естественные для задачи классы корректности. Среди уже имеющихся в вычислительной практике алгоритмов ненасыщаемые методы выделяются своей особой новизной и нестандартностью. Они привносят в процесс компьютерных вычислений нечто неуловимое, но зато экстремально существенное, позволяющее численному алгоритму быть увлекаемым любой потенциальной информацией о запасе гладкости решений. Тем самым ненасыщаемые методы способствуют наиболее полному освоению имеющихся интеллектуальных ресурсов задач.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\omega \subset \mathbb{R}^3$ — область с осью симметрии z, ограниченная C^∞-гладкой замкнутой поверхностью вращения $\partial\omega$, а величины $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и z — инварианты группы вращений области ω относительно оси z. Меридиональное сечение поверхности $\partial\omega$ — это параметризованная кривая $\gamma : [0, \pi] \to \{r(s), z(s)\}$, $r \geq 0$, $dz/ds \geq 0$ и $\gamma(s) \in C^\infty[0, \pi]$. При этом точки $\gamma(0)$ и $\gamma(\pi)$ суть полюсы поверхности вращения $\partial\omega$, а функции $r(s)$, $z(s)$ имеют (нечетное и четное соответственно) C^∞-гладкие 2π-периодические продолжения с $[0, \pi]$ на отрезок $[0, 2\pi]$. Положение точек $x = (r, z)$ и $\xi = (\rho, \zeta)$ на γ определим координатами s и σ соответственно: $r = r(s), z = z(s)$; $\rho = r(\sigma), \zeta = z(\sigma)$. Нормаль $\mathbf{N}$ на $\partial\omega$ считается направленной в область $\mathbb{R}^3 \backslash \omega$.

Пусть $F(\mathbf{x})$ — непрерывная функция вне области ω. Прямое значение $F(\mathbf{x})$

на $\partial\omega$ (если оно существует) обозначим через $\overline{F}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}\in\partial\omega}$. Для предельного извне $\partial\omega$ и прямого на $\partial\omega$ значений производной $\partial F/\partial\mathbf{N} = \mathbf{N}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}F$ (если они существуют) используем обозначения: $(N_-\overline{F})(\mathbf{x})$ и $(N\overline{F})(\mathbf{x})$.

Внешняя задача Неймана состоит в отыскании вне ω функции $\Phi(\mathbf{x})$, удовлетворяющей условиям:

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}) = 0 \text{ при } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\backslash\overline{\omega};\ N_-\overline{\Phi} = f(\mathbf{x}) \text{ при } \mathbf{x}\in\partial\omega;\ \Phi\to 0 \text{ при } |\mathbf{x}|\to\infty. \quad (N_-)$$

Функция $f(\mathbf{x})$ здесь непрерывна и в цилиндрических координатах (r, z, v) от параметра v не зависит. Решение $\Phi(\mathbf{x})$ задачи (N_-) существует, единственно и зависит только от r, z. Гладкость $\Phi(\mathbf{x})$ определяется гладкостью $f(\mathbf{x})$. Обычно полагают [8, 9], что $f(\mathbf{x})$ принадлежит пространству $C^\alpha(\partial\omega)$ непрерывных функций, удовлетворяющих на $\partial\omega$ условию Гёльдера с показателем $0 < \alpha < 1$. Пусть $f \equiv f(r, z)$ — достаточно гладкая функция. Тогда $f(s) \equiv f(r(s), z(s))$ продолжается четным образом с $[0, \pi]$ на $[0, 2\pi]$, становясь непрерывной с сохранением класса гладкости 2π-периодической функцией.

Пусть $C[0, 2\pi]$ — класс непрерывных 2π-периодических функций с чебышёвской нормой $\|\cdot\|$. Множество четных функций обозначим через $C_+ \equiv C_+[0, \pi] \subset C[0, 2\pi]$.

Классический способ представления решения задачи (N_-) основан на понятии гармонического потенциала и допускает описание в терминах граничных интегральных уравнений [8]. Решение $\Phi(\mathbf{x})$ внешней задачи Неймана ищем в виде потенциала простого слоя с плотностью $\psi \in C^\alpha(\partial\omega)$, инвариантной относительно группы вращений вокруг оси z:

$$\Phi(\mathbf{x}) = V[\psi](\mathbf{x}) \equiv \int\limits_{\partial\omega} \frac{\psi(\xi)}{|\xi - \mathbf{x}|}\, d\omega_\xi.$$

Здесь $|\xi - \mathbf{x}|$ — расстояние между точками $\xi \in \partial\omega$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\backslash\omega$.

Эквивалентное задаче (N_-) интегральное уравнение имеет вид [8]

$$\psi(s) + K[\psi](s) = -\frac{1}{2\pi} f(s), \quad s \in [0, \pi],\ \psi, f \in C_+. \tag{1}$$

Здесь оператор K интегральный и определяется равенством

$$K[\psi](s) \equiv \int\limits_0^\pi k(s, \sigma)\psi(\sigma)\, d\sigma \equiv \int\limits_0^\pi (A(\sigma, s)E(q) + B(\sigma, s)D(q))h_*^{-1}\psi(\sigma)\, d\sigma. \tag{2}$$

В (2) функции $E(q)$ и $D(q)$ суть полные эллиптические интегралы [10] с модулем $q \in [0, 1]$, где $q \equiv q(\sigma, s) = 4\rho r h_*^{-2}$, $h_* \equiv h_*(\sigma, s) = \sqrt{(\rho + r)^2 + (\zeta - z)^2}$. Приняты также следующие обозначения:

$$A(\sigma, s) = -\frac{2\rho\delta}{\pi}\frac{\mathbf{H}(\sigma, s)\cdot\mathbf{N}(s)}{\sigma - s}, \quad B(\sigma, s) = -\frac{1}{\pi}\frac{\rho\delta}{rd} z_s,$$

$$\delta = \sqrt{\rho_\sigma^2 + \zeta_\sigma^2}, \quad d = \sqrt{r_s^2 + z_s^2},$$

$$\mathbf{H}(\sigma, s) = \mathbf{r}(\sigma, s)/|\mathbf{r}(\sigma, s)|^2, \quad \mathbf{r}(\sigma, s) = [(\rho - r)/(\sigma - s), (\zeta - z)/(\sigma - s)],$$

где $\rho_\sigma, \zeta_\sigma$ и r_s, z_s — производные функций $\rho = \rho(\sigma)$, $\zeta = \zeta(\sigma)$ и $r = r(s)$, $z = z(s)$ по локальным координатам σ и s соответственно.

Ядро $k(s,\sigma)$ слабо сингулярно, оператор $K : C_+ \to C_+$ компактен, и его норма вычисляется по формуле

$$\|K\| \equiv \max_{0\le s\le\pi} \int_0^\pi |k(s,\sigma)|\,d\sigma.$$

Наличие в (2) весового множителя $h_*^{-1}(\sigma,s)$, растущего вблизи оси симметрии z, типично для осесимметричных задач и служит своеобразной платой за цилиндрическую симметрию.

2. Дискретизация задачи и формулировка основного результата

При численном исследовании уравнения (1) основным является вопрос аппроксимации решения. От способа аппроксимации, а также от выбора реализующих оператор K приближенных процедур зависит точность конструируемого численного ответа [3]. Чтобы величина погрешности численного метода не способствовала утрате информации о точном решении, необходимо способ аппроксимации функции ψ и метод решения уравнения (1) согласовать с априорной информацией о решениях этого уравнения. При этом важны и качества используемых вычислительных процедур линейной алгебры [11].

Проведем дискретизацию интегрального уравнения (1).

Пусть $\mathscr{T}^m \subset C[0,2\pi]$ — подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше m, $m \ge 0$ целое. Положим

$$s_i = 2\pi i/(2m+1),\ 0\le i\le m, \quad J : C_+ \to \mathbb{R}^{m+1}, \quad Jg = (g(s_0),\dots,g(s_m)).$$

Интерполяционный тригонометрический многочлен Лагранжа имеет вид [12]

$$(Q_m g)(s) \equiv Q_m(s;Jg) = \sum_{k=0}^m g(s_k)w_k(s), \quad g(s)\in C_+[0,\pi],$$

где

$$w_k(s) = \begin{cases} 2D_m(s)/(2m+1), & k=0, \\ 2(D_m(s-s_k)+D_m(s+s_k))/(2m+1), & k=1,2,\dots,m, \end{cases}$$

а $D_m(s) = 1/2 + \sum\limits_{k=1}^m \cos ks$ — ядро Дирихле, $w_k(s_j) = \delta_{kj}$.

Обозначим

$$|Jg|_\infty = \max_{0\le k\le m} |g(s_k)|, \quad \|Q_m\| = \max_{0\le s\le\pi} \sum_{k=0}^m |w_k(s)|.$$

Тригонометрический многочлен $Q_m(s;Jg)$ задает проектор $Q_m : C_+ \to \mathscr{T}^m$ с константой Лебега $\|Q_m\| \le 3 + 2\pi^{-1}\ln m$ (см. [3]). Для $1<p<\infty$ при $m\to\infty$ справедливо предельное соотношение [12, с. 105]

$$\|g(s) - Q_m(s;Jg)\|_p \to 0 \quad \forall g\in C[0,2\pi]. \tag{3}$$

Здесь $\|\cdot\|_p$ обозначает норму в $L_p[0,2\pi]$:

$$\|g\|_p \equiv \left(\int_0^{2\pi} |g(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

В силу линейности оператора K, определенного равенством (2), имеем

$$(KQ_m g)(s) \equiv K[Q_m g](s) = \sum_{k=0}^{m} g(s_k) a_k(s),$$

где $a_k(s) = K[w_k](s)$. Далее получаем

$$\|KQ_m g\| \leq \max_{0 \leq s \leq \pi} \sum_{k=0}^{m} |g(s_k)||a_k(s)| \leq |Jg|_\infty \|KQ_m\|.$$

Здесь $\|KQ_m\| = \max\limits_{0 \leq s \leq \pi} \sum\limits_{k=0}^{m} |a_k(s)|$.

Пусть $u = J\psi$, $\rho_m(s) = \psi(s) - Q_m(s; J\psi)$, $\delta = -JK[\rho_m]$, $F = -(1/2\pi)Jf$. Применяя к обеим частям уравнения (1) оператор J, получаем соотношение

$$u + Au = F + \delta, \tag{4}$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица с элементами $a_{ik} = K[w_k](s_i)$, $0 \leq k \leq m$, $0 \leq i \leq m$. Отбросив погрешность аппроксимации — вектор $\delta \in \mathbb{R}^{m+1}$ — и обозначив приближенное значение $J\psi \in \mathbb{R}^{m+1}$ через $\overline{\psi} \in \mathbb{R}^{m+1}$, получим искомую дискретизацию интегрального уравнения (1):

$$(I + A)\overline{\psi} = F, \quad I \text{ — единичная } (m+1) \times (m+1)\text{-матрица}. \tag{5}$$

Пусть $|B|_\infty$ — чебышёвская норма [3] обратимой матрицы $B : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$. Мера обусловленности B задается числом $\kappa(B) = |B|_\infty \cdot |B^{-1}|_\infty$. Обозначим через $e_m(g) = \inf\limits_{H_m \in \mathscr{T}^m} \|g - H_m\|$ чебышёвское приближение функции $g \in C[0, 2\pi]$ тригонометрическими многочленами порядка не выше m.

Пусть уравнение (1) однозначно разрешимо в C_+ и $\|\psi\| \leq \Lambda \|f\|$. Верна

Теорема 1. *Существуют постоянные m_0, q_0, κ_0 и c_0 такие, что при $m \geq m_0$ существует матрица $(I + A)^{-1}$ и имеют место неравенства*

$$\|KQ_m\| \leq q_0, \quad \kappa(I + A) \leq \kappa_0,$$

$$|J\psi - \overline{\psi}|_\infty \leq c_0(1 + \|Q_m\|)e_m(\psi), \tag{6}$$

$$e_m(\psi) \leq \|\psi(s) - Q_m(s; \overline{\psi})\| \leq c_0 \|Q_m\|(1 + \|Q_m\|)e_m(\psi). \tag{7}$$

Постоянные q_0, κ_0, c_0 от параметра m не зависят и эффективно вычисляются.

Доказательство. Интегральный оператор K, имея слабую особенность [8, 9], обладает более сильными свойствами непрерывности, чем сами функции, на которые он действует. В [13, с. 65] доказано, что существует число $q > 1$ со свойством:

$$|(KQ_m g)(s)| \leq \left(\int_0^\pi |k(s, \sigma)|^q \, d\sigma \right)^{1/q} \|Q_m g\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \forall g \in C_+.$$

Отсюда, из соотношения (3) и теоремы Банаха — Штейнгауза в применении к последовательности Q_m получаем

$$\|KQ_m\| \leq Q\|Q_m\|_p \leq q_0 < \infty, \quad Q = \max_{0 \leq s \leq \pi} \left(\int_0^\pi |k(s, \sigma)|^q \, d\sigma \right)^{1/q} < \infty.$$

Следовательно, нормы операторов KQ_m равномерно ограничены в пространстве C_+.

Похожим способом получим

$$\|KQ_mg - Kg\| \leq Q\|Q_mg - g\|_p \quad \forall g \in C_+,$$

т. е. операторы KQ_m сильно сходятся к оператору K. Отсюда и из соотношения (3) в силу равномерной ограниченности норм $\|KQ_m\|$ следует, что $\|K\| \leq \varliminf_{m\to\infty} \|KQ_m\|$.

Поскольку уравнение (1) однозначно разрешимо в C_+, существует обратный оператор $(I+K)^{-1} : C_+ \to C_+$, причем $\|(I+K)^{-1}\| \leq \Lambda$ и справедлива оценка $\|\psi\| \leq \Lambda\|f\|$.

Решим уравнение (1) со специальной правой частью $Q_m(s;F) \equiv (Q_mF)(s)$. Отыскивая его решение в виде $\psi = Q_mF + w$, для остатка w получим соотношение

$$w = -K\psi, \quad \text{или} \quad w + Kw = -KQ_mF, \quad w = -(I+K)^{-1}KQ_mF. \tag{8}$$

Следовательно, справедлива оценка

$$|Jw|_\infty \leq \|w\| \leq \|(I+K)^{-1}\|\|KQ_mF\| \leq c\Lambda\|KQ_m\||Jf|_\infty, \quad c = \frac{1}{2\pi}. \tag{9}$$

Учитывая (9), последовательно получим

$$|J\psi|_\infty \leq |JQ_mF|_\infty + |Jw|_\infty = |F|_\infty + |Jw|_\infty \leq c(I + \Lambda\|KQ_m\|)|Jf|_\infty. \tag{10}$$

Далее, так как $\psi = Q_mF + w$, опять применяя неравенство (9), найдем

$$\|\psi\| \leq \|Q_mF\| + \|w\| \leq c(\|Q_m\| + \Lambda\|KQ_m\|)|Jf|_\infty.$$

Производные функции $w(s) = -(K\psi)(s)$ в случае $\psi \in C_+^\alpha$ существуют (поскольку определяются через интегралы со слабой особенностью [13]) и удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $0 < \beta < \alpha$ и константой $c_\beta \cdot c(\|Q_m\| + \Lambda\|KQ_m\|)|Jf|_\infty$.

Пользуясь классическими результатами Чебышёва, Лебега и Джексона, находим

$$\begin{aligned} \|\psi - Q_m\psi\| = \|Q_mF + w - Q_m(Q_mF + w)\| = \|w - Q_mw\| \leq (1 + \|Q_m\|)e_m(w) \\ \leq \varpi\frac{c_\beta \cdot c(1+\|Q_m\|)(\|Q_m\| + \Lambda\|KQ_m\|)|Jf|_\infty}{(m+1)^{1+\beta}} = \Delta_m|Jf|_\infty. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь

$$\Delta_m \equiv \varpi\frac{c_\beta \cdot c(1+\|Q_m\|)(\|Q_m\| + \Lambda\|KQ_m\|)}{(m+1)^{1+\beta}}, \quad \varpi > 0,\ c_\beta > 0 \text{ — константы.}$$

Воспользовавшись оценкой (11), покажем, что для $m \geq m_0$ существует матрица $(I+A)^{-1}$, при этом

$$|(I+A)^{-1}|_\infty \leq 2(1+\Lambda\|KQ_m\|), \quad \kappa(I+A) \leq 2(1+\|KQ_m\|)(1+\Lambda\|KQ_m\|). \tag{12}$$

Допустим противное, т. е. что $\det(I+A) = 0$. Тогда уравнение (5) разрешимо при условии ортогональности его правой части $F \in \mathbb{R}^{m+1}$ некоторому конечномерному подпространству N. Пусть $\zeta \in \mathrm{N}$ и $|\zeta|_\infty = 1$. Полагая $F = \zeta$, получим, что уравнение (4) имеет решение. Следовательно, $(\zeta+\delta,\zeta)=0$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{m+1}$. Отсюда $(\zeta,\zeta)=-(\delta,\zeta)$, и по неравенству Коши — Буняковского

$$1\le(\zeta,\zeta)^{1/2}\le(\delta,\delta)^{1/2}=\sqrt{\sum_{i=0}^{m}\delta_i^2}\le\sqrt{m+1}|\delta|_\infty.$$

Учитывая, что $\delta=-JK\rho_m$, из оценки (11) заключаем:

$$|\delta|_\infty=|JK\rho_m|_\infty\le\|K\rho_m\|\le\|K\|\|\psi-Q_m\psi\|\le\widetilde{\Delta}_m|F|_\infty,\quad \widetilde{\Delta}_m=2\pi\Delta_m\|K\|. \tag{13}$$

Но $1=|\zeta|_\infty=|F|_\infty$, поэтому $1\le\sqrt{m+1}|\delta|_\infty\le\sqrt{m+1}\widetilde{\Delta}_m$. Переходя здесь к пределу при $m\to\infty$, приходим к противоречию.

Таким образом, матрица $(I+A)^{-1}$ существует, а из оценки (13) по лемме Л. В. Канторовича (см. [3, с. 627]) вытекает неравенство

$$|(I+A)^{-1}|_\infty\le(1+\Lambda\|KQ_m\|)/(1-\widetilde{\Delta}_m),\quad m\ge m_0.$$

Усиливая его, получим оценку

$$|(I+A)^{-1}|_\infty\le 2(1+\Lambda\|KQ_m\|).$$

С учетом полученных неравенств число обусловленности матрицы $(I+A)^{-1}$ оценивается так:

$$\kappa(I+A)=|I+A|_\infty|(I+A)^{-1}|_\infty\le 2(1+\|KQ_m\|)(1+\Lambda\|KQ_m\|).$$

Положив $\chi=u-\overline{\psi}$ и вычитая (5) из (4), получим $(I+A)\chi=\delta$, или $\chi=(I+A)^{-1}\delta$. Но $\delta=-JK\rho_m$, поэтому окончательно имеем

$$|\chi|_\infty\le|(I+A)^{-1}|_\infty|\delta|_\infty\le c_0(1+\|Q_m\|)e_m(\psi),\quad c_0=2\|K\|(1+\Lambda\|KQ_m\|),$$

т. е. оценку (6). Оценка (7) элементарно следует из (6). Теорема 1 доказана.

Следствие. *Построенный численный метод* (5) *ненасыщаем* [14].

Доказательство. Интуитивно ненасыщаемость вычислительного метода означает, что с ростом запаса гладкости решения задачи скорость убывания погрешности к нулю возрастает. Формально это свойство было описано К. И. Бабенко в терминах александровского m-поперечника $\alpha_m(X)$. Известно [3], что параметр $\alpha_m(X)$ наиболее полно характеризует аппроксимативные возможности функционального компакта X. Однако на практике применение этого поперечника затруднено отсутствием его точных асимптотик при $m\to\infty$. Но теория приближения содержит в своем арсенале и ряд других способов аппроксимации. В частности, имеется описание компакта X в терминах колмогоровского m-поперечника:

$$\varkappa_m(X)=\inf_{(L_m,\pi_m)}\sup_{x\in X}\|x-\pi_m(x)\|,$$

где inf берется по всевозможным парам (L_m,π_m), состоящим из m-мерного линейного подпространства $L_m\subset C[0,2\pi]$ и непрерывного отображения $\pi_m:X\to L_m$.

Для классов гладких функций в $C[0,2\pi]$ имеются точные значения асимптотик колмогоровского m-поперечника $\varkappa_m(X)$ [3]. В сумме с возможностью применения теоремы К. И. Бабенко [15, с. 42] о слабой эквивалентности последовательностей $\varkappa_m(X)$ и $\alpha_m(X)$ при $m \to \infty$, т. е. о выполнимости неравенств $c_1\varkappa_m(X) \le \alpha_m(X) \le c_2\varkappa_m(X)$ с не зависящими от m постоянными $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, упомянутые асимптотики дают возможность использовать $\varkappa_m(X)$ в формальном определении ненасыщаемости численного метода (5). В рассматриваемом случае не нужно никаких дополнительных фактов: ненасыщаемость метода (5) фактически следует из оценок (7).

Действительно, для $k \ge 0$ и $0 < \alpha < 1$ рассмотрим класс 2π-периодических k раз непрерывно дифференцируемых функций $C^{k+\alpha}(M)$, производная k-го порядка которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α и константой M:

$$C^{k+\alpha}(M) = \{\varphi \mid \varphi \in C^k[0,2\pi],\ |\varphi^{(k)}(s) - \varphi^{(k)}(\sigma)| \le M|s-\sigma|^\alpha,\ s,\sigma \in [0,2\pi]\}.$$

Тогда $X^k \equiv C^{k+\alpha}(M) \cap \{\varphi \mid \varphi \in C[0,2\pi],\ \|\varphi\| \le 1\}$ — компакт в пространстве $C[0,2\pi]$.

Пусть $\psi \in X^k$. Тогда $\varrho_m(\psi) = \|\psi(s) - Q_m(s;\overline{\psi})\|$ и $\epsilon_m(X^k) = \sup\{\varrho_m(\psi) \mid \psi \in X^k\}$ — точность аппроксимации элемента ψ и точность метода на классе X^k соответственно.

Компакты X^k, где $0 \le k \le \infty$, вложены друг в друга: если $k_1 < k_2$, то $X^{k_2} \subset X^{k_1}$ [16, с. 228]. Ненасыщаемость численного метода (5) фактически состоит в проверке двух условий:

$$1)\ \lim_{m\to\infty} \epsilon_m(X^k) = 0, \quad 2)\ \epsilon_m(X^{k+1}) = o(\epsilon_m(X^k)) \quad \text{при } m \to \infty \quad \forall k \ge 0.$$

Убедимся в их справедливости. Из правой оценки в (7) в силу неравенства Джексона получаем

$$\epsilon_m(X^k) = \sup_{\psi\in X^k} \varrho_m(\psi) < 4c_0 \ln^2 m \sup_{\psi\in X^k} e_m(\psi) \le \frac{b_k \ln^2 m}{m^{k+\alpha}} \to 0 \text{ при } m \to \infty\ \forall k \ge 0.$$

С другой стороны, оценка $\varrho_m(\psi) \ge e_m(\psi)$ и оценка снизу [15, с. 42] для $\varkappa_m(X^k)$ дают

$$\epsilon_m(X^k) = \sup_{\psi\in X^k} \varrho_m(\psi) \ge \sup_{\psi\in X^k} e_m(\psi) \ge \varkappa_m(X^k) \ge \frac{d_k}{m^{k+\alpha}} \quad \forall k \ge 0.$$

(постоянные $b_k > 0$ и $d_k > 0$ от m не зависят). Получаем

$$0 \le \frac{\epsilon_m(X^{k+1})}{\epsilon_m(X^k)} \le \frac{b_{k+1}}{d_k}\frac{\ln^2 m}{m} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Следовательно, выполнено и условие 2.

Смысл условия 2 состоит как раз в следующем: если компакт X^{k_2} устроен существенно проще, чем компакт X^{k_1}, то при прочих равных условиях вычислительный метод (5) определяет решение $\psi \in X^{k_2}$ уравнения (1) с точностью большей, чем в случае, когда $\psi \in X^{k_1}$.

Замечание 1. Влияние ошибок округления на точность решения $\overline{\psi}$ задачи (5) определяется самим построением матрицы A и выражается появлением дополнительного сомножителя $(1+2\|Q_m\|)$ в правых частях неравенств (6), (7).

Дискретизация (5) не создает коллизий между точностью вычислений и объемом перерабатываемой битовой информации, если решение ψ уравнения (1) достаточно гладкое, в частности, бесконечно дифференцируемое [17]. При этом не возникает проблем, связанных с решением алгебраических систем «большой» размерности. Действительно, утверждение теоремы 1 о том, что число обусловленности $\kappa(I+A)$ системы (5) не зависит от ее порядка, обеспечивает устойчивость итерационного процесса построения решения $\overline{\psi}$ задачи (5). Иными словами, ошибки округления отыскиваемого решения имеют примерно тот же порядок малости, что и ошибки, допущенные при вычислении матрицы $I+A$ и правой части F (см. оценку (6)). Причина этого ясна — ошибки округления хорошо сходящегося итерационного процесса не накапливаются в процессе итераций: ошибки округления каждого предыдущего приближения исправляются последующим. Указанное свойство является важным преимуществом итерационных методов решения линейных алгебраических систем уравнений. Таким образом, хотя матрица $I+A$ не имеет специальной структуры и полностью заполнена, тем не менее указать эффективный итерационный метод решения системы линейных уравнений (5) можно.

Теорема 2. *Последовательность функций*

$$\overline{\psi}^{k+1} = (1-\tau)\overline{\psi}^k - \tau A\overline{\psi}^k + \tau F, \quad \tau = (1+\|KQ_m\|)^{-1},\ k = 0, 1\ldots, \tag{14}$$

получаемая при решении системы (5) *методом простых итераций, сходится к решению* $\overline{\psi}$ *задачи* (5) *как геометрическая прогрессия со знаменателем* < 1.

Доказательство. Известно, что интегральный оператор K задачи (N_-), т. е. оператор прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя на ляпуновской замкнутой поверхности $\partial\omega$, вполне непрерывен. Ненулевые точки его спектра суть вещественные простые полюсы его же резольвенты, содержащиеся в промежутке $(-1,1]$, собственные же функции оператора K непрерывны. При этом единица — это однократное собственное значение оператора K, а отвечающая ему собственная функция ψ_0 такова, что $\int\limits_0^\pi \psi_0(\sigma)\,d\sigma \neq 0$ [8, с. 160]. Любое характеристическое число μ оператора K, т. е. число со свойством $(I-\mu K)\varphi = 0$, где $\varphi \not\equiv 0$, является простым, вещественным и лежит вне $(-1,1]$.

Рассмотрим спектральную задачу $(I+K)\varphi = \lambda\varphi$, или $(I+\mu K)\varphi = 0$, где $\mu = -1/(\lambda-1)$. Чтобы эта однородная задача имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы $\operatorname{Im}\mu = 0$ и $\operatorname{Re}\mu < -1/2$. Оператор $I+\mu K$ имеет ограниченный обратный $(I+\mu K)^{-1}$, если μ не является таким вещественным отрицательным числом. Отсюда следует, что в области $\Omega(R,\varepsilon,\theta)$, где $R>1$, $0<\varepsilon,\theta<1$, которая получается в результате удаления из круга $\{\mu\in\mathbf{C} : |\mu|\le R\}$ сектора $\{\mu\in\mathbf{C} : |\arg(\mu+\theta/2)-\pi|<\varepsilon\}$, оператор $I+\mu K : C_+\to C_+$ обратим и для его нормы справедливо неравенство

$$\|(I+\mu K)^{-1}\| \le \nu(R,\varepsilon,\theta), \quad \nu > 0.$$

Пусть λ — собственное значение матрицы $I+A$, а η — соответствующий собственный вектор. Тогда уравнение $(I+A)\eta = \lambda\eta$ равносильно уравнению $\bigl(I-\frac{1}{\lambda-1}A\bigr)\eta = 0$. Но матрица $\bigl(I-\frac{1}{\lambda-1}A\bigr)$ получается в результате дискретизации оператора $\bigl(I-\frac{1}{\lambda-1}K\bigr)$, поэтому обратная к ней существует, если найдется такое $\varepsilon>0$, что $\frac{-1}{\lambda-1}\in\Omega(R,\varepsilon,\theta)$ и $m\ge m_0(\lambda)$. Следовательно, $\frac{-1}{\lambda-1}\notin\Omega(R,\varepsilon,\theta)$ для всех $\varepsilon>0$.

Пусть $0<\tau<1$, а λ — собственное значение матрицы $I-\tau(I+A)$, η — соответствующий собственный вектор. Тогда аналогично предыдущему получаем

$\frac{-\tau}{1-\tau-\lambda} \notin \Omega(R,\varepsilon,\theta)$ для всех $\varepsilon > 0$. Это возможно либо при $|\tau(1-\tau-\lambda)^{-1}| > R$, либо при $|\tau(1-\tau-\lambda)^{-1}| \le R$ и $\left|\arg\left(\frac{-\tau}{1-\tau-\lambda}+\frac{\theta}{2}\right)-\pi\right| < \varepsilon$. При $|\tau(1-\tau-\lambda)^{-1}| > R$ имеем

$$|\lambda| < 1-\tau(1-R^{-1}) < 1. \tag{15}$$

Докажем, что во втором случае λ вещественно и при этом справедливы неравенства

$$1-\tau-\frac{2\tau}{\theta} < \lambda < 1-\tau. \tag{16}$$

Обозначим $\Upsilon \equiv \frac{-\tau}{1-\tau-\lambda}+\frac{\theta}{2}$, тогда $|\arg\Upsilon-\pi| < \varepsilon$ и если $\lambda = X+iY$, то

$$\Upsilon \equiv \Pi + i\Psi = -\tau\frac{(1-\tau-X)-\frac{\theta}{2\tau}|1-\tau-\lambda|^2}{|1-\tau-\lambda|^2} - i\frac{\tau Y}{|1-\tau-\lambda|^2}.$$

В силу условия $|\arg\Upsilon-\pi| < \varepsilon$ вещественная часть Υ отрицательна, т. е. выполняется следующее неравенство:

$$\Theta(X;\tau,\theta) \equiv (1-\tau-X)-\frac{\theta}{2\tau}|1-\tau-\lambda|^2 > 0.$$

Выражение $\Theta(X;\tau,\theta)$ относительно X является квадратным трехчленом:

$$\Theta(X;\tau,\theta) = -\frac{\theta}{2\tau}X^2 - \left(1-\frac{\theta}{\tau}(1-\tau)\right)X + (1-\tau) - \frac{\theta}{2\tau}((1-\tau)^2+Y^2)$$

с дискриминантом $D \equiv D(\tau,\theta) = 1-(\theta/\tau)^2Y^2$. Выражение $\Theta(X;\tau,\theta)$ положительно, что возможно лишь при том условии, что уравнение $\Theta(X;\tau,\theta) = 0$ имеет два различных вещественных корня, т. е. при $D \equiv D(\tau,\theta) > 0$.

Корни $\Theta(X;\tau,\theta)$ имеют при этом вид

$$X_1 = -\frac{\tau}{\theta}+(1-\tau)-\frac{\tau}{\theta}\sqrt{D}, \quad X_2 = -\frac{\tau}{\theta}+(1-\tau)+\frac{\tau}{\theta}\sqrt{D},$$

причем верно равенство

$$\Theta(X;\tau,\theta) = -\frac{\theta}{2\tau}(X-X_1)(X-X_2).$$

Если $\varepsilon \to 0$, то $\arg\Upsilon = \pi$, поэтому $\lambda = X$, откуда $D = 1$. Таким образом, из условия $\Theta(X;\tau,\theta) > 0$ следует $X_1 < X < X_2$, что при $D = 1$ приводит к неравенствам (16).

Из оценок (15), (16) при $0 < \tau < 1$ вытекает, что спектральный радиус матрицы $I-\tau(I+A)$ строго меньше единицы. Поэтому для отыскания решения уравнения $\overline{\psi} = (I-\tau(I+A))\overline{\psi}+\tau F$, равносильного уравнению (5), приме́ним метод последовательных приближений (14) с $\tau = (1+\|KQ_m\|)^{-1}$. Теорема 2 доказана.

Для окончательного заключения о близости приближения $\overline{\psi}^k$ к решению $\overline{\psi}$ задачи (5) требуется эффективный критерий прерывания итерационного процесса (14). Естественно принять за такой критерий количество верных значащих цифр в конструируемом ответе. Это означает, что, исходя из оценки $|\overline{\psi}^k-\overline{\psi}|_\infty/|\overline{\psi}|_\infty \le \varepsilon$ при заданном $\varepsilon > 0$, проводить итерации следует до выполнения этого неравенства. Но априори само решение $\overline{\psi}$ нам неизвестно и указанный критерий рассматривать как эффективный нельзя. Сформулируем другой критерий, использующий последовательность значений $\overline{\psi}^{\,k}$ и число обусловленности $\kappa(I+A)$, характеризующее трудность [11] решения задачи (5).

Теорема 3. *Если* $|(I+A)\overline{\psi}^{\,k} - F|_\infty / |F|_\infty \le \varepsilon/\kappa(I+A)$, *то* $|\overline{\psi}^{\,k} - \overline{\psi}|_\infty / |\overline{\psi}|_\infty \le \varepsilon$.

Доказательство. Обозначим $B = I + A$, тогда $B\overline{\psi} = F$ и, следовательно,

$$\frac{|\overline{\psi}^k - \overline{\psi}|_\infty}{|\overline{\psi}|_\infty} = \frac{|B^{-1}(B\overline{\psi}^k - B\overline{\psi})|_\infty}{|B^{-1}B\overline{\psi}|_\infty} = \frac{|B^{-1}(B\overline{\psi}^k - F)|_\infty}{|B^{-1}F|_\infty}.$$

Поскольку $|F|_\infty = |BB^{-1}F|_\infty \le |B|_\infty |B^{-1}F|_\infty$, имеем $|B^{-1}F|_\infty \ge |B|_\infty^{-1}|F|_\infty$. Далее,

$$\frac{|\overline{\psi}^k - \overline{\psi}|_\infty}{|\overline{\psi}|_\infty} \le \frac{|B^{-1}|_\infty |(B\overline{\psi}^k - F)|_\infty}{|B|_\infty^{-1}|F|_\infty} = \kappa(I+A)\frac{|(I+A)\overline{\psi}^k - F)|_\infty}{|F|_\infty}.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Осуществить итерационный процесс (14) с любой заданной точностью $\varepsilon > 0$, используя только компьютерную конечно-разрядную арифметику, нельзя, если не предпринимать специальных мер [11]. Однако в тех случаях, когда число $\kappa(I+A)$ невелико, получаются достоверные данные о величине погрешности.

3. Феномен ненасыщаемости вычислительных процедур

Хотя математический смысл результатов, полученных в теоремах 1–3, прозрачен и прост, мотивация их практической применимости в компьютерных вычислениях отнюдь не очевидна. Укажем доводы в пользу учета экстраординарных запасов гладкости решения $\psi(s)$ при приближенном решении задачи (1). При этом мы не только оценим преимущества такого подхода, но и выявим аналитическую природу адаптивности процедур аппроксимации и квадратурных формул к запасам гладкости решения $\psi(s)$.

Начнем с аппроксимации периодических функций. Исходя из условий $g \notin \mathscr{T}^m$, $\|g\| = G(0) \ne 0$, $\|g^{(k)}\| \le G(k)$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{G(k)} = \infty$, сопоставим функции $g \in C^\infty[0, 2\pi]$ следующие две функции непрерывного аргумента $r \in [0,\infty)$:

$$\mu(r) = \begin{cases} G(0) & \text{при } 0 \le r < 1, \\ \inf\limits_{k\ge 0} \frac{G(k)}{r^k} & \text{при } r \ge 1, \end{cases}$$

$$\vartheta(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \le r < 1, \\ \max\{k \mid \mu(r) = \frac{G(k)}{r^k}\} & \text{при } r \ge 1. \end{cases}$$

При этом справедливы соотношения

$$\mu(r) = \min_{k\ge 0} \frac{G(k)}{r^k} = \frac{G[\vartheta(r)]}{r^{\vartheta(r)}} \quad \text{и} \quad e_m(g) \le \frac{\pi}{2}\mu(m).$$

Теорема 4 [7]. *При $r \ge 1$ функция $\vartheta(r)$ целочисленна, неотрицательна, не убывает, непрерывна справа и стремится к бесконечности вместе с r. Функция $\mu(r)$ строго монотонно убывает, всюду непрерывна и стремится к нулю при $r \to \infty$. Для любого $\xi \ge 0$ справедливо равенство*

$$\mu(r) = \mu(\xi) e^{-\int\limits_\xi^r \frac{\vartheta(t)}{t}\,dt}, \quad r \ge \xi.$$

Следствие. *Для $p \geq 0$ имеет место равенство* $\lim\limits_{r\to\infty} r^p\mu(r) = 0$.

Из оценки (7) в силу теоремы 4 следует, что для $\psi \in C_+^\alpha$ предложенный метод численного решения уравнения (1) сходится и ненасыщаем [3, 7]. Последнее означает, что с ростом гладкости решения $\psi(s)$ скорость убывания погрешности (7) к нулю возрастает. Таким образом, в отличие от методов, имеющих главный член погрешности, построенный нами численный метод с ростом запаса гладкости решений самосовершенствуется. Преодолевая барьер степенной сходимости, максимума своей практической эффективности — *экспоненциальной сходимости* — этот метод (в силу следствия) достигает на классе C^∞-гладких решений. Теорема 4 устанавливает, что информация о бесконечной дифференцируемости и аналитичности решения ψ, прежде находившаяся на периферии насущных интересов реальных вычислений, становится их активным персонажем. К примеру, если $\psi \in C_+^\infty$ и $G(k) = A^k k^{\alpha k}$ при $A > 1$ и $\alpha > 0$, то $\mu(m) \leq ce^{-\varrho\sqrt[\alpha]{m}}$, где c и ϱ — положительные константы. В этом случае правая часть неравенства (7) с ростом параметра m убывает к нулю экспоненциально с точностью до медленно растущего множителя $O(\ln^2 m)$. Достижение нужной точности происходит, очевидно, уже при небольших m. Более того, наилучшая сходимость построенного численного метода достигается на классе аналитических решений: условие $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{G(k)}/k < \infty$ характеризует аналитичность решения $\psi(s)$ [18]. Экспоненциальная сходимость построенного численного метода решения задачи (1) обеспечивает экономность конструирования компьютерного ответа с точностью, определяемой исключительно аппроксимативными свойствами компакта C^∞-гладких функций, содержащего точное решение уравнения (1).

Из теорем 1 и 4 следует, что скорость сходимости последовательности приближенных решений $\overline{\psi}$ уравнения (5) при $m \to \infty$ определяется исключительно гладкостью точного решения ψ уравнения (1). Однако при этом необходимо, чтобы контролируемо быстро могла убывать и погрешность дискретизации оператора K уравнения (1). Все преимущества ненасыщаемого численного метода сохранятся лишь при условии, что точность приближенной реализации интегрального оператора (2) имеет тот же порядок, что и величина $|\delta|_\infty = |JK\rho_m|_\infty$ при $m \geq m_0$. Это требование реализуется лишь при использовании ненасыщаемых квадратурных формул.

Большинство существующих методов приближенной реализации интегральных операторов насыщаемы из-за использования стандартных квадратурных формул, что довольно жестко предопределяет качество получаемых приближений. Чтобы иметь возможность адекватно учитывать информацию о гладкости решения ψ уравнения (1), нужно реализовать интегральный оператор K численно как можно тщательнее, желательно аналитически или же с помощью ненасыщаемых квадратурных формул.

Аналитическое выражение (2) для ядра интегрального оператора K показывает, что далеко не каждая квадратурная формула для реализации элементов $a_{ik} = K[w_k](s_i)$ представляет практический интерес. С одной стороны, ядро имеет на диагонали $\sigma = s$ «подвижную» логарифмическую особенность, обусловленную наличием функций $E(q)$ и $D(q)$. С другой стороны, в точках s вблизи оси симметрии z, являющейся зоной интенсивного роста градиентов ядра, возникают *пограничные слои* [7]. В полюсах же $\gamma(0)$ и $\gamma(\pi)$ представление (2) вполне регулярно.

В [19] построены специальные квадратурные формулы вида

$$\int_{-1}^{+1} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} c_i f(t_i) + \wp_n^c(f), \quad -\int_{-1}^{+1} f(t)\ln|t|\,dt = \sum_{i=1}^{n} l_i f(t_i) + \wp_n^l(f). \tag{17}$$

Здесь $t_k = \cos(\pi(2k-1)/2n)$, а $\wp_n^c$ и $\wp_n^l$ — функционалы погрешности, веса же c_k и l_k приведены в [19].

Приближение интегрального оператора K сводится к применению формул (17). Покажем, как это сделать. Представление (2) преобразуется к виду (см. [10]):

$$K[\psi](s) = \int_0^{\pi} \psi(\sigma)C(\sigma,s)h_*^{-1}\,d\sigma - \int_0^{\pi} \psi(\sigma)L(\sigma,s)\ln(1-q)h_*^{-1}\,d\sigma.$$

Здесь логарифмическая особенность явно выделена в виде сомножителя [5]. Зафиксировав параметр $s \in (0,\pi)$ и заменив неявно переменную σ новой переменной $t \equiv t(\sigma,s) = \sin\frac{(\sigma-s)}{2} / \sin\frac{(\sigma+s)}{2}$, получим представление

$$K[\psi](s) = \int_{-1}^{1} \Psi(t)\widetilde{C}(t)\,dt - \int_{-1}^{1} \Psi(t)\widetilde{L}(t)\ln|t|\,dt.$$

При этом подвижная логарифмическая особенность из (2) перешла в неподвижную — середину отрезка. Для функций же $C(\sigma,s)$ и $L(\sigma,s)$ выполняются соотношения

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k \tilde{g}(t) = \varepsilon^{-k}\left(\sin^2\frac{(\sigma+s)}{2}\frac{d}{d\sigma}\right)^k g(\sigma,s), \quad \varepsilon = 0.5\sin s,\ k \ge 0. \tag{18}$$

Здесь $\tilde{g} \equiv \tilde{g}(t) = g(\sigma(t,s),s)$, а в качестве $g(\sigma,s)$ выступает либо $C(\sigma,s)$, либо $L(\sigma,s)$. Функция $\sigma(t,s)$ при фиксированном $s \in (0,\pi)$ является обратной к $t(\sigma,s)$, а $\Psi(t) = \psi(\sigma(s,t))$.

Пусть $C[I]$ — пространство непрерывных на отрезке $I \equiv [-1,1]$ функций с чебышёвской нормой $\|\cdot\|$, а $\mathscr{P}^n \subset C[I]$ — подпространство алгебраических многочленов степени не выше $n-1$. Далее, пусть $E_n(f) = \inf\limits_{P_n \in \mathscr{P}^n} \|f - P_n\|$, $n > 0$ целое.

Теорема 5 [19]. *Если $n \ge 1$ и нечетно, то веса c_i и l_i в формулах* (17) *строго положительны, а их погрешности удовлетворяют оценке*

$$|\wp_n^c(f)| \le 4E_n(f), \quad |\wp_n^l(f)| \le 4E_n(f). \tag{19}$$

Обратим внимание на влияние ошибок округления на квадратурный процесс (17): без учета этого определяющего фактора современных компьютерных вычислений высказывать обоснованное суждение об эффективности квадратур было бы преждевременно. Положительность коэффициентов c_i, l_i обеспечивает квадратурным процессам (17) устойчивость к ошибкам округлений.

Из (19) выводится закон убывания к нулю погрешности $\wp_n^{c,l}(f)$ с ростом n. Если $f \in C^k[I]$, $k \ge 0$ целое, то

$$E_n(f) \le (\pi/2)\min_{0\le k\le n} a^k\|f^{(k)}\|/n^k, \quad a > 1 \text{ — абсолютная константа}$$

(усиленное[1]) неравенство Джексона [3, с. 307]).

Далее, при $f \in C^\infty[I]$, $f \notin \mathscr{P}^n$, $\|f\| = G(0) \neq 0$, $\|f^{(k)}\| \leq G(k)$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{G(k)} = \infty$ определены следующие функции аргумента $r \in [0, \infty)$:

$$\lambda(r) = \begin{cases} G(0) & \text{при } 0 \leq r < 1, \\ \min\limits_{0\leq k\leq r} \frac{G(k)}{r^k} & \text{при } r \geq 1, \end{cases}$$

$$\theta(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq r < 1, \\ \max\{k \mid 1 \leq k \leq r \quad \text{и} \quad \lambda(r) = \frac{G(k)}{r^k}\} & \text{при } r \geq 1. \end{cases}$$

При этом справедливы соотношения

$$\lambda(r) = \min_{0\leq k\leq r} \frac{G(k)}{r^k} = \frac{G[\theta(r)]}{x^{\theta(r)}} \quad \text{и} \quad E_n(f) \leq \frac{\pi}{2}\lambda(n/a).$$

Теорема 6 [7]. *При $r \geq 1$ функция $\theta(r)$ целочисленна и неотрицательна, не убывает, непрерывна справа и стремится к бесконечности вместе с r. Функция $\lambda(r)$ строго монотонно убывает, непрерывна справа и стремится к нулю при $r \to \infty$. Функция $\lambda(r)$ терпит разрывы слева лишь в точках разрыва функции $\theta(r)$. При этом для любого $\xi \geq 0$ справедливо равенство*

$$\lambda(r) = \lambda(\xi) e^{-\int\limits_\xi^r \frac{\theta(t)}{t}dt} e^{-\sum\limits_{\xi<r_i\leq x} |\sigma_i|}, \quad r \geq \xi.$$

Здесь $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_i = \ln\lambda(r_i - 0) - \ln\lambda(r_i)$ для всех $i > 0$.

Следствие. *Для $p \geq 0$ имеет место равенство $\lim\limits_{r\to\infty} r^p\lambda(r) = 0$.*

В силу неравенств (19) квадратурные формулы (17) обладают замечательной особенностью: с ростом числа узлов n в их погрешности автоматически учитываются дифференциальные свойства подынтегральной функции f. Точнее, погрешности квадратур настраиваются на оптимальное для данного n значение гладкости функции f автоматически (*феномен ненасыщаемости* [7]). Для $f \in C^\infty[I]$ при условии $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{G(k)}/k^\alpha < \infty$, где $\alpha > 0$, имеем оценку $|\wp_n^{c,l}(f)| \leq Ce^{-\varrho\sqrt[\alpha]{n}}$, где C, ϱ — положительные постоянные. Таким образом, характер экспоненциальной сходимости функционалов погрешности $\wp_n^c(f)$ и $\wp_n^l(f)$ к нулю при $n \to \infty$ зависит от величины α.

Ненасыщаемость расширяет сферу практической применимости квадратурных формул (17) до класса подынтегральных функций со следующим свойством.

Определение [7]. Функция $f \in C^\infty[I]$ *обладает на отрезке* $I \equiv [-1, 1]$ *пограничным слоем толщины* ε_0, $0 < \varepsilon_0 < 1$, если существуют такое малое положительное число $\tau = \tau(\varepsilon_0)$ и такая положительная функция $F(k)$, от ε_0 не зависящая, что при любом целом $k \geq 0$ справедливо неравенство

$$|f^{(k)}(t)| \leq \begin{cases} F(k) & \text{при } t \in I_\tau \equiv [-1+\tau, 1-\tau], \\ {\varepsilon_0}^{-k} F(k) & \text{при } t \in I \setminus I_\tau. \end{cases} \tag{20}$$

Наводящим соображением к нейтрализации влияния пограничного слоя на погрешность формул (17) служит следующий восходящий к работе С. М. Никольского [20] классический результат.

[1]В статье [7] это неравенство приведено с опечаткой. Автор благодарен профессору Р. М. Тригубу, обратившему его внимание на это обстоятельство.

Теорема (В. К. Дзядык [21]). *Для того чтобы k-я производная функции f удовлетворяла на отрезке $I \equiv [-1,1]$ условию Гёльдера с показателем $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы при любом целом $n \geq k$ существовал такой алгебраический многочлен $P_n(t)$ степени n, что для всех $t \in I$ справедливы оценки*

$$|f(t) - P_n(t)| \leq \frac{A_k}{n^{k+\alpha}} \left(\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n}\right)^{k+\alpha},$$

где A_k — постоянная, не зависящая от t и n.

Этой теоремой усиливается неравенство Джексона $E_n(f) \leq Mn^{-(k+\alpha)}$: в ней устанавливается возможность приближения $f(t)$ вблизи концов отрезка I с погрешностью $O(n^{-2(k+\alpha)})$. Этот факт эффективно используется на практике.

Теорема 7 [7]. *Если функция f принадлежит $C^\infty[I]$ и выполнено условие* (20), *то*

$$E_n(f) \leq \frac{\pi}{2} \min_{0 \leq k \leq n} \left\{ \frac{F_k {\varepsilon_0}^{-k/2}}{n^k} \right\}. \tag{21}$$

Коэффициенты F_k вычисляются по заданным значениям $F(k)$ из (20).

Прикладное значение оценки (21) в том, что за счет перераспределения пограничного слоя по всему отрезку $I \equiv [-1,1]$ его толщину удается увеличить до значения $\sqrt{\varepsilon_0}$. Именно это важное и полезное свойство квадратур (17) лежит в основе нейтрализации пограничного слоя заданной толщины $\varepsilon_0 > 0$ [7]. Как результат этой нейтрализации получается неравенство

$$|\wp_n^{c,l}(f)| \leq 2\pi \min_{0 \leq k \leq n} F_k/(n\sqrt{\varepsilon_0})^k \leq \varepsilon.$$

Справедливость этой оценки для значений $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ обеспечивается теоремой 6, если взять значение параметра n, большее некоторого его «порогового» значения $n_{\min}(\varepsilon_0)$. Порог $n_{\min}$ с уменьшением ε_0 может только возрасти. Количество $\theta(n)$ используемых при этом производных подынтегральной функции f является величиной $O\big(\varepsilon_0^{-1/2}\big)$ при $n \to \infty$.

Таким образом, вычисление элементов $a_{ik} = K[w_k](s_i)$ на основе квадратурных формул (17) с числом узлов $n > n_{\min}(\varepsilon_0) > m \geq m_0$ позволяет в силу соотношений (18)–(21) нейтрализовать влияние пограничного слоя заданной толщины $\varepsilon_0 = 0.5 \sin s$. При этом матрица $A = (a_{ij})$ вычисляется с наперед заданной точностью $(1 + 2\|Q_m\|)e_m(\psi)$, ибо числовые характеристики $e_m(\psi)$ точного решения ψ уравнения (1) в случае $\psi \in C_+^\infty$ убывают к нулю экспоненциально с ростом параметра m (теорема 4).

Сделаем общее замечание о приближенном вычислении констант в приведенных оценках. Во всех случаях мы имели дело с тригонометрическими многочленами и при рассмотрении вопросов, относящихся к вычислению упомянутых в теоремах констант, придерживались практики, проиллюстрированной нижеследующим примером.

Чтобы оценить максимум модуля тригонометрического многочлена $T(s)$ степени m, вычислим сначала его значения в равноотстоящих узлах $s_j = \frac{2\pi j}{2m+1}$, $j = 0, \dots, 2m$. Затем, воспользовавшись известным неравенством Лебега [3], запишем оценку

$$\max_{0 \leq s < 2\pi} |T(s)| \leq \Lambda_m \max_{0 \leq j \leq 2m+1} |T(s_j)| \equiv H,$$

где Λ_m — константа Лебега. Далее, по теореме С. Н. Бернштейна [3] имеем $|T^{(k)}| \leq m^k H$.

Пусть $M \gg m$. Вычислим значение $T(s)$ по бо́льшему числу узлов $\sigma_j = \frac{2\pi j}{2M+1}$, $j = 0, \dots, 2M$. Если σ_* — точка максимума $|T(s)|$, $\sigma_l \leq \sigma_* \leq \sigma_{l+1}$, то по формуле Тейлора в некоторой точке $\bar{\sigma}$, $\sigma_l \leq \bar{\sigma} \leq \sigma_*$, имеем

$$|T(\sigma_l) - T(\sigma_*)| = \frac{(\sigma_l - \sigma_*)^2}{2} |T''(\bar{\sigma})|$$

и, следовательно,

$$|T(\sigma_l) - T(\sigma_*)| \leq \frac{H}{2} \left(\frac{\pi m}{2M+1} \right)^2.$$

Выбирая число M подходящим образом, всегда можем оценить $\max\limits_{0 \leq s < 2\pi} |T(s)|$ по узловым значениям $|T(s_j)|$, $j = 0, \dots, 2M$. С учетом того, что в величине $\max\limits_{0 \leq s < 2\pi} |T(s)|$ нужно лишь небольшое число значащих цифр, вычисления такого рода легко осуществить для полиномов $T(s)$ не очень больших степеней.

4. Выводы

Самое существенное в приведенных результатах заключается в вытекающем из оценок (6), (7) следствии: запас гладкости точного решения ψ уравнения (1) служит залогом его успешного компьютерного построения. Преимущество способа аппроксимации решения ψ уравнения (1) определяется тем, насколько полно он сохраняет дифференциальные свойства ψ.

Для периодических функций эффект сохранения дифференциальных характеристик гладкости хорошо известен [21]: только осуществляющий наивысшую скорость приближения аппроксимирующий аппарат полностью унаследует дифференциальные характеристики отыскиваемого решения ψ. Как бы ни определялся многочлен $Q_m(s; J\psi)$ порядка не выше m в соотношении (7), левое неравенство во всех случаях будет выполнено: не может быть приближения лучше наилучшего. Правое неравенство в (7) имеет порядок убывания к нулю, не соответствующий порядку убывания величин $e_m(\psi)$, и характеризует потерю решением ψ гладкости. В результате никакая дискретизация уравнения (1) не способна сохранять гладкость его точного решения ψ.

Для эффективного использования оценок (6) и (7) необходимо, конечно, располагать некоторой априорной информацией о точном решении уравнения (1). Такую информацию всегда можно извлечь из входных данных. В реальных вычислениях важны, как правило, не сами априорные оценки решений, а дифференциальные свойства точного решения ψ, обеспечивающие достаточно быстрое убывание к нулю последовательности $e_m(\psi)$ при возрастании m. Во многих случаях порядок стремления к нулю характеристик $e_m(\psi)$ устанавливается по гладкости правой части уравнения (1) — функции f. Тем самым в оценки (6), (7) входят именно те характеристики точного решения ψ, которыми мы на практике всегда располагаем. Из оценок (6), (7) следует, что скорость убывания к нулю погрешности построенного численного метода возрастает с ростом запаса гладкости точного решения ψ. В случае $\psi \in C_+^\infty$ правые части неравенств (6), (7) согласно следствию теоремы 4 убывают к нулю экспоненциально с ростом числа m, $m \geq m_0$. Достижение нужной точности происходит, очевидно, при небольших m. Более того, при $\psi \in C_+^\infty$ построенный ненасыщаемый численный метод осуществляет реализацию так называемых доказательных компьютерных вычислений [3]. Последнее означает, что по уровню строгости получаемый компьютерный числовой ответ представляет собой математическую теорему, суть которой состоит в описании окрестности, содержащей точное решение задачи (теорема 1). Доказательством же теоремы служит сам процесс компьютерных вычислений (теоремы 2, 3), организованный в соответствии с концепцией гарантированной точности [11]. При этом весьма важно, что величина окрестности точного решения в достаточно широком классе C^∞-гладких решений оказывается вполне приемлемой для организации таких вычислений.

Отметим, что полученный в статье результат явился своеобразным откликом на реальную потребность вычислительной гидродинамики [1, 5].

Результаты докладывались на семинаре отдела теории функций в МИ РАН им. В. А. Стеклова. Автор признателен всем участникам семинара за чрезвычайно интересные и полезные обсуждения, критические замечания, а также благодарен руководителю семинара академику С. М. Никольскому за приглашение выступить и поддержку. Автор признателен также профессору В. Л. Васкевичу, тщательно просмотревшему статью и сделавшему ряд ценных уточнений и замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Belykh V. N.* To the problem of evolutionary «blow-up» of axially symmetric gas bubble in ideal incompressible fluid (main constructive hypothesis) // Proc. Intern. Conf. dedicated to M. A. Lavrentyev on the occasion on his birthday centenary. Ukraine, Kiev, 2000. P. 6–8.

2. *Бабенко К. И.* Несколько замечаний о дискретизации эллиптических задач // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221, № 1. С. 11–14.

3. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск: РХД, 2002.

4. *Алгазин С. Д., Кийко И. А.* Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006.

5. *Белых В. Н.* К проблеме обтекания осесимметричных тел большого удлинения потоком идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 5. С. 56–67.

6. *Белых В. Н.* Внешняя осесимметричная задача Неймана для уравнения Лапласа: ненасыщаемые методы численного решения // Докл. РАН. 2007. Т. 417, № 4. С. 442–445.

7. *Белых В. Н.* О свойствах наилучших приближений C^∞-гладких функций на отрезке вещественной оси (к феномену ненасыщаемости численных методов) // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 483–499.

8. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехтеоретиздат, 1953.

9. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

10. *Белых В. Н.* О вычислении на ЭВМ полных эллиптических интегралов $K(x)$ и $E(x)$ // Краевые задачи для уравнений с частными производными. Новосибирск: ИМ СО АН, 1988. С. 3–15.

11. *Годунов С. К., Антонов А. Г., Кирилюк О. П., Костин В. И.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1992.

12. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.

13. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.

14. *Бабенко К. И.* О явлении насыщения в численном анализе // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 3. С. 505–508.

15. *Теоретические основы* и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Н. Н. Анучина, К. И. Бабенко, С. К. Годунов и др. М.: Наука, 1977.

16. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.

17. *Белых В. Н.* Об асимптотике колмогоровской ε-энтропии некоторых классов бесконечно дифференцируемых периодических функций (к проблеме К. И. Бабенко) // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 6. С. 731–735.

18. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. М.: АН СССР, 1954. Т. 2.
19. *Белых В. Н.* Алгоритмы без насыщения в задаче численного интегрирования // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 3. С. 529–533.
20. *Никольский С. М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // ИАН. Сер. мат. 1946. Т. 10, № 4. С. 295–318.
21. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

Статья поступила 8 ноября 2010 г.

Белых Владимир Никитич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
belykh@math.nsc.ru