Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 510.5

О ДОПУСТИМЫХ МНОЖЕСТВАХ ВИДА $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ НАД РЕКУРСИВНО НАСЫЩЕННЫМИ МОДЕЛЯМИ

Р. Р. Авдеев

Аннотация. Получено эффективное представление элементов допустимого множества $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ в виде шаблонных множеств. Доказана Σ-сводимость $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ к $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная модель регулярной теории. Приведен критерий униформизации в $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная модель. Доказана униформизация в $\mathbb{HYP}(\mathfrak{N})$ и $\mathbb{HYP}(\mathfrak{R}')$, где $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{R}'$ — рекурсивно насыщенные модели арифметики и вещественно замкнутых полей соответственно. Доказано отсутствие униформизации в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — счетно-насыщенная модель несчетно категоричной теории, и приведен пример такой теории с определимыми скулемовскими функциями. Также приведен пример модели регулярной теории с Σ-определимыми скулемовскими функциями, но без определимых скулемовских функций в любом расширении теории конечным числом констант.

Ключевые слова: допустимое множество, HYP, HF, рекурсивно насыщенная модель, униформизация, шаблонное множество, сигма-сводимость, скулемовские функции.

Работа посвящена одному из развивающихся подходов к обобщенной теории вычислимости, а именно вычислимости в произвольных допустимых множествах с праэлементами. В ряду изучаемых свойств допустимых множеств стоит униформизация. В монографии Барвайса [1] изложено доказательство униформизации в Σ-перечислимых допустимых множествах, замечено наличие этого свойства в некоторых других частных случаях. А. И. Стукачев получил критерий свойства униформизации в наследственно конечных надстройках над моделями регулярных теорий в терминах Σ-определимых скулемовских функций [2, 3], критерий был использован для доказательства униформизации в наследственно конечных надстройках $\mathbb{HF}(\mathfrak{R})$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{Q}_p)$. Неточности в формулировке критерия были им исправлены в [4]. Данная работа продолжает исследования в этой области, в ней представлен критерий униформизации в «более сложных» допустимых множествах вида $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ над рекурсивно насыщенными моделями $\mathfrak{M}$. Другим направлением исследований является изучение определимости одних допустимых множеств в других. Рассматриваются различные сводимости и изучаются их свойства. А. И. Стукачев доказал Σ-определимость $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ для рекурсивно насыщенной модели $\mathfrak{M}$ регулярной теории [5]. В данной работе этот результат усилен, доказана Σ-сводимость $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ к $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Сначала излагаются необходимые определения и обозначения. В разд. 1 и 2 получаются основные результаты и излагаются их следствия.

Обозначаем через σ конечную предикатную сигнатуру с равенством $\approx$ такую, что $\sigma \cap \{\varnothing, U^1, \in^2\} = \varnothing$. Через $\sigma' \leftrightharpoons \sigma \cup \{\varnothing, U^1, \in^2, \dots\}$ обозначаем сигнатуру допустимых множеств (знак $\leftrightharpoons$ будет использоваться в формульных определениях и при введении новых объектов в значении «равно по определению»).

В σ' определяются Δ_0-формулы — формулы, не содержащие неограниченных кванторов, а также Σ-(Π-)формулы — не содержащие неограниченных кванторов $\forall$ ($\exists$).

Предполагается, что читатель знает определения и свойства регулярных теорий. Основные сведения из теории допустимых множеств, например аксиомы теории Крипке — Платека с праэлементами (KPU), содержатся в [1, 6]. Аксиомы KPU — ослабленные аксиомы ZFU (теории Цермело — Френкеля с праэлементами). В KPU аналогично определяются транзитивные множества и ординалы.

Определение 1 [6]. *Допустимым множеством* называется KPU-модель, у которой отношение $\in$ вполне упорядочивает множество ординалов этой модели. Допустимые множества обозначаем через $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \dots$. В допустимом множестве $\mathbb{A}$ все отношения сигнатуры σ заданы только на множестве праэлементов. Это множество образует некоторую модель $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ. Говорят, что $\mathbb{A}$ — *допустимое множество над* $\mathfrak{M}$.

Определение 2. На допустимом множестве задаются Σ- (Δ-)*подмножества*, которые определяются Σ-формулами (Σ- и Π-формулами одновременно), возможно, с параметрами. Семейства n-арных Σ- и Δ-предикатов допустимого множества $\mathbb{A}$ будем обозначать через $\Sigma(\mathbb{A}^n)$ и $\Delta(\mathbb{A}^n)$ соответственно. При $n = 1$ индекс опускаем.

Важным примером Δ-предиката для этой работы является $\mathrm{Ord}(x)$, состоящий в точности из всех ординалов допустимого множества $\mathbb{A}$.

Пусть $\varphi(\bar{x})$ — формула сигнатуры σ'. Через $\varphi(\mathbb{A})$ обозначим $\{\bar{x} \in A^{<\omega} \mid \mathbb{A} \models \varphi(\bar{x})\}$ (A — носитель модели $\mathbb{A}$). Если P — предикат, определимый этой формулой, то это множество также обозначаем через $P(\mathbb{A})$. Например, $\mathrm{Ord}(\mathbb{A})$ — множество всех ординалов данного допустимого множества — само является ординалом.

Определение 3. Функция $F : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}$ называется Σ-*функцией*, если ее график является Σ-предикатом.

Важным примером Σ-функции является TC, где $TC(x)$ — транзитивное замыкание x, т. е. наименьшее по включению транзитивное множество, содержащее x в качестве подмножества.

Определение 4. Определим *наследственно конечную надстройку* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ — наименьшее по включению допустимое множество над $\mathfrak{M}$. Пусть M — носитель $\mathfrak{M}$. Пусть $HF_0(M) \leftrightharpoons M$, $HF_{n+1}(M) \leftrightharpoons HF_n(M) \cup P_\omega(HF_n(M))$, где $P_\omega(X)$ — множество всех конечных подмножеств X; $HF(M) \leftrightharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega} HF_n(M)$. На $HF(M)$ естественным образом определяется структура $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ сигнатуры σ'. Предикат U состоит из всех праэлементов, т. е. $U(\mathbb{HF}(\mathfrak{M})) = M$.

Определение 5. Для каждой модели $\mathfrak{M}$ определим еще одно допустимое множество $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ над $\mathfrak{M}$. В отличие от надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ для любой $\mathfrak{M}$ это допустимое множество является моделью теории KPU^+ — теории KPU, расширенной одной аксиомой, а именно справедливо $\exists x \forall y (U(y) \leftrightarrow y \in x)$. Данное допустимое множество может быть определено следующим образом: $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M}) \leftrightharpoons \bigcap\{\mathbb{A} \mid \mathbb{A}$ — модель KPU^+ над $\mathfrak{M}\}$.

Рассмотрим следующие Σ-функции, заданные на элементах допустимого множества (см. [1]):

$\mathscr{F}_1(b, c) \leftrightharpoons \{b, c\}$,

$\mathscr{F}_2(b, c) \leftrightharpoons \cup b$,

$\mathscr{F}_3(b,c) \leftrightharpoons b\backslash c$,
$\mathscr{F}_4(b,c) \leftrightharpoons b \times c$,
$\mathscr{F}_5(b,c) \leftrightharpoons \mathrm{dom}(b)$,
$\mathscr{F}_6(b,c) \leftrightharpoons \mathrm{rng}(b)$,
$\mathscr{F}_7(b,c) \leftrightharpoons \{\langle u,v,w\rangle \mid \langle u,v\rangle \in b, w \in c\}$,
$\mathscr{F}_8(b,c) \leftrightharpoons \{\langle u,w,v\rangle \mid \langle u,v\rangle \in b, w \in c\}$,
$\mathscr{F}_9(b,c) \leftrightharpoons \{u \in b \mid u$ — праэлемент$\}$,
$\mathscr{F}_{10}(b,c) \leftrightharpoons \{\langle v,u\rangle \in c \times b \mid u = v\}$,
$\mathscr{F}_{11}(b,c) \leftrightharpoons \{\langle v,u\rangle \in c \times b \mid u \in v\}$.
$i > 11$. Пусть $\sigma \leftrightharpoons \{R_0,\dots,R_k\}$; тогда $\mathscr{F}_i = \{\langle p_n,\dots,p_1,v\rangle \mid \langle p_n,\dots,p_1\rangle \in b, R_{i-12}(p_1,\dots p_n), v \in c\}$ для всех $i \in \{12,\dots,12+k\}$,
$\mathscr{D}(a) \leftrightharpoons a \cup \{\mathscr{F}_i(x,y) \mid x,y \in a, i = 1,\dots,k+12\}$.

Пусть M — носитель модели $\mathfrak{M}$ и $M \in \mathbb{A}$, т. е. $\mathbb{A}$ — модель KPU^+. Рассмотрим последовательность элементов $\mathbb{A}$ следующего вида: $L(0,M) \leftrightharpoons M$, $L(\alpha+1,M) \leftrightharpoons \mathscr{D}(\mathscr{J}(L(\alpha,M)))$, $L(\alpha,M) \leftrightharpoons \bigcup\limits_{\beta<\alpha} L(\beta,M)$, если α предельный. Для каждого предельного α определим модель $\mathscr{L}(\alpha)_{\mathfrak{M}}$ сигнатуры σ' с носителем $L(\alpha,M)$ и заданными естественно отношениями $U^1, \in^2$. Эта модель не обязана в общем случае быть допустимым множеством.

Предложение 1. *Для каждой модели $\mathfrak{M}$ существует ординал α такой, что $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M}) = \mathscr{L}(\alpha)_{\mathfrak{M}}$.*

Определение 6 [1]. Допустимое множество $\mathbb{A}$ с носителем A называется Σ-*перечислимым* (recusively listed), если существует частичная Σ-функция в $\mathbb{A}$, являющаяся биекцией между $\mathrm{Ord}(\mathbb{A})$ и A.

Определение 7 [7]. Допустимое множество $\mathbb{A}$ с носителем A называется *резольвентным*, если существует частичная Σ-функция f на $\mathbb{A}$ с областью определения $\mathrm{Ord}(\mathbb{A})$ такая, что $\alpha \le \beta \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})$ влечет $f(\alpha) \subseteq f(\beta)$ и $A = \bigcup \mathrm{rng}(f)$, эта функция называется *резольвентой.*

Заметим, что $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ является резольвентным допустимым множеством и $L(\alpha,M)$ — резольвента.

Здесь будут рассматриваться допустимые множества вида $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ над *рекурсивно насыщенными моделями* $\mathfrak{M}$. Само определение рекурсивной насыщенности модели не используется по существу в этой работе, а используется лишь следующий критерий.

Теорема 1 (Джона Шлипфа, см. [1]). *Модель $\mathfrak{M}$ рекурсивно насыщенна тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ord}(\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})) = \omega$, т. е. $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M}) = \mathscr{L}(\omega)_{\mathfrak{M}}$.*

Предложение 2 [6]. *Если $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная модель с носителем M, то каждый элемент $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ представим в виде терма $t(\bar{p},M)$ сигнатуры $\{\mathscr{F}_1,\dots,\mathscr{F}_{12+k},\mathscr{D}\}$ от праэлементов $\bar{p}$ и от M.*

Предложение 3 [3]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная модель с носителем M. Тогда $a \subseteq M^k$, $k \in \omega$, является элементом $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда a формульно определимо на $\mathfrak{M}$.*

Определение 8 [7]. Будем говорить, что допустимое множество $\mathbb{A}$ Σ-*сводится* к допустимому множеству $\mathbb{B}$ (и обозначать через $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$), если существует сюръективное отображение $\nu : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ такое, что $\nu^{-1}(\Sigma(\mathbb{A}^2)) \subseteq \Sigma(\mathbb{B}^2)$. В этом случае будем говорить, что ν *осуществляет* Σ-*сводимость*, и обозначать через $\nu : \mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$.

Определение 9 [6]. Будем говорить, что модель $\mathfrak{N}$ сигнатуры $\{R_1, \dots, R_k\}$ Σ-*определима* в допустимом множестве $\mathbb{A}$ (и обозначать через $\mathfrak{N} \leq_\Sigma \mathbb{A}$), если существует отображение $\nu : \mathbb{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{N}$ такое, что $\nu^{-1}(R_i) \in \Delta(\mathbb{A})$ для всех $i = 1, \dots, k$.

Отношение Σ-сводимости на допустимых множествах является более сильным, чем отношение Σ-определимости [7].

Определение 10. Будем говорить, что в допустимом множестве $\mathbb{A}$ выполняется *принцип униформизации*, если для любого бинарного Σ-предиката $R(x, y)$ существует Σ-функция $F(x)$ такая, что $\mathrm{dom}(F) = \{x \mid \exists y R(x, y)\}$, и справедливо $R(x, F(x))$ для всех $x \in \mathrm{dom}(F)$.

Определение 11. Теория T *имеет определимые скулемовские функции*, если для любой формулы $\varphi(x, \bar{y})$ существует формула $\psi(x, \bar{y})$ такая, что $T \vdash \exists x \varphi \to \exists! x(\varphi \wedge \psi)$.

Определение 12 [2, 3]. Модель $\mathfrak{M}$ *имеет Σ-определимые скулемовские функции*, если существует $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ для любой формулы $\varphi(x, \bar{y})$ (сигнатуры σ) и существует Σ-формула $\psi(x, \bar{y}, \bar{c})$ (сигнатуры σ') такая, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \exists\varphi \to \exists! x(\varphi \wedge \psi)$.

В наследственно-конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ над стандартной моделью $\mathfrak{N}$ арифметики для каждого элемента $\varkappa$ определим терм $t_\varkappa$ сигнатуры $\{\varnothing, \{\}^1, \cup^2\}$, содержащий в себе всю теоретико-множественную структуру элемента $\varkappa$, т. е. для некоторого натурального числа n выполняется $\varkappa = t_\varkappa(\bar{n})$, где $\bar{n} = \langle 0, \dots, n-1 \rangle$. Зафиксировав некоторую нумерацию элементов $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, получим соответствующую нумерацию термов (вместо $t_\varkappa$ пишем t_n). Заметим, в любой наследственно-конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ каждый элемент представим в виде $t_\varkappa(\bar{p})$ для некоторого $\varkappa \in \mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ и кортежа праэлементов $\bar{p}$.

Теорема 2 [4]. *Пусть σ — конечная предикатная сигнатура. Какова бы ни была вычислимая последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$, для которой каждое A_n состоит из гёделевских номеров $\exists$-формул сигнатуры σ с фиксированным набором параметров,*

$$A = \{t_n(\bar{u}) \mid n \in \omega,\, \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{u}) \quad \text{для некоторого } \varphi \in A_n\}$$

является Σ-подмножеством $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — модель сигнатуры σ. Более того, Σ-формула, определяющая A, не зависит от выбора модели $\mathfrak{M}$ и находится эффективно по $\{A_n\}_{n\in\omega}$.

1. Представление элементов $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ в виде шаблонных множеств

В этом разделе считаем, что $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная модель конечной предикатной сигнатуры σ.

Определение 1.1. Пусть $t(\bar{u})$ — терм сигнатуры $\{\{\}^1, \cup^2\}$, а $\varphi(\bar{u}, \bar{v})$ — формула сигнатуры σ. *Шаблоном $T(\bar{v})$ высоты* 0 ($\bar{v}$ — переменные) будем называть пару $\langle t, \varphi \rangle$, *значением шаблона T на праэлементах $\bar{p}$* — множество $\{t(\bar{u}) \mid \bar{u} \in M^k, \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{u}, \bar{p})\}$ (которое будем обозначать через $T(\bar{p})$ или $\langle t, \varphi \rangle(\bar{p})$).

Пусть $\langle t_i, \varphi_i \rangle(\bar{v}_i)$, $i = 1, \dots, k$, — шаблоны высоты 0. Пусть также кортеж $\bar{v}$ состоит из всех попарно различных переменных, встречающихся в кортежах $\bar{v}_i$. *Шаблонным множеством $s(\bar{v})$ высоты* 0 будем называть набор из этих k

шаблонов (и обозначать через $\bigcup\limits_{i=1}^{k}\langle t_i,\varphi_i\rangle$), *значением* $s(\bar p)$ *шаблонного множества* $s(\bar v)$ *на праэлементах* $\bar p$ — множество $\bigcup\limits_{i=1}^{k}\langle t_i,\varphi_i\rangle(\bar p_i)$, где $\bar p_i$ — праэлементы, соответствующие $\bar v_i$, $i=1,\dots,k$.

Пусть $\bar s(\bar u)$ — некоторые шаблонные множества высоты не более n и хотя бы одно из них высоты n, а $t(\bar u,\bar s)$ — терм сигнатуры $\{\{\}^1,\cup^2\}$. *Шаблоном* $T(\bar v)$ *высоты* $n+1$ будем называть пару $\langle t,\varphi\rangle$, *значением шаблона* T *на праэлементах* $\bar p$ — множество $\{t(\bar u,\bar s(\bar u))\mid \bar u\in M^k,\mathfrak{M}\models\varphi(\bar u,\bar p)\}$ (которое будем обозначать через $T(\bar p)$ или $\langle t,\varphi\rangle(\bar p)$).

Пусть $\langle t_i,\varphi_i\rangle(\bar v_i)$, где $i=1,\dots,k$, — шаблоны высоты не более $n+1$ и хотя бы один из них высоты $n+1$. Пусть кортеж $\bar v$ состоит из всех попарно различных переменных, встречающихся в кортежах $\bar v_i$. *Шаблонным множеством* $s(\bar v)$ высоты не $n+1$ назовем набор из этих k шаблонов (обозначаем через $\bigcup\limits_{i=1}^{k}\langle t_i,\varphi_i\rangle$), *значением шаблонного множества* $s(\bar v)$ *на праэлементах* $\bar p$ (обозначаем через $s(\bar p)$) — множество $\bigcup\limits_{i=1}^{k}\langle t_i,\varphi_i\rangle(\bar p_i)$, где $\bar p_i$ — праэлементы, соответствующие $\bar v_i$.

В дальнейшем независимо от высоты будем называть определенные выше объекты *шаблонами* и *шаблонными множествами*. Обозначаем класс всех значений шаблонных множеств через $TS(\mathfrak{M})$. В дальнейшем иногда будут опускаться $\bar v$-прапеременные, от которых зависит шаблон или шаблонное множество, если они будут известны из контекста. Чтобы упростить изложение, иногда будем опускать слово «значение» и писать просто «шаблонное множество». Идет ли речь о шаблонном множестве или о его значении, будет ясно из контекста.

Отметим очевидные свойства шаблонных множеств.

1. $TS(\mathfrak{M})\subseteq\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$. Доказывается индукцией по высоте с использованием предложения 3.

2. $TS(\mathfrak{M})$ транзитивно.

Предложение 1.1. *Функция ранга значения шаблонного множества* ($\mathrm{rnk}(s(\bar p))$ *в обозначениях из* [6]) *является* Σ*-функцией в* $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Для шаблона $T(\bar v)$ (или шаблонного множества $s(\bar v)$) определим ординал $\mathrm{toprnk}(T)$ (соответственно $\mathrm{toprnk}(s)$) индукцией по высоте. Он ограничивает сверху ранг значения данного шаблона (шаблонного множества).

Пусть $T(\bar v)=\langle t(\bar u),\varphi(\bar u,\bar v)\rangle$ — шаблон высоты 0. Определяем $\mathrm{toprnk}(T)$ вложенной индукцией по длине терма t. Если $t(\bar u)=u$, то $\mathrm{toprnk}(T)\leftrightharpoons 1$. Если $t=\{t_1\}$, то $\mathrm{toprnk}(T)\leftrightharpoons\mathrm{toprnk}(\langle t_1,\varphi\rangle)+1$. Если $t=t_1\cup t_2$, то $\mathrm{toprnk}(T)\leftrightharpoons\max(\mathrm{toprnk}(\langle t_1,\varphi\rangle),\mathrm{toprnk}(\langle t_2,\varphi\rangle))$. Пусть $s(\bar v)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}T_i(\bar v)$ — шаблонное множество высоты 0. Полагаем $\mathrm{toprnk}(s)\leftrightharpoons\max(\mathrm{toprnk}(T_i))$.

Определение toprnk для шаблонов и шаблонных множеств большей высоты абсолютно аналогично, только добавляется случай $t(\bar u)=s(\bar u)$. В этом случае полагаем $\mathrm{toprnk}(T)\leftrightharpoons\mathrm{toprnk}(s)+1$.

Покажем, что для любого шаблона $T(\bar v)$ (шаблонного множества S) и натурального числа $m\le\mathrm{toprnk}(T)$ эффективно находится формула $\varphi_{T,m}(\bar v)$ такая, что для любого кортежа праэлементов $\bar p$ выполняется $\mathrm{rnk}(T(\bar p))=m\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\varphi_{T,m}(\bar p)$. Это делается индукцией по высоте и вложенной индукцией по длине терма (для шаблонов).

Пусть $T(\bar v)=\langle t(\bar u),\varphi(\bar u,\bar v)\rangle$ — шаблон высоты 0. Если $t(\bar u)=u$, то

$$\mathrm{rnk}(T(\bar p))=\begin{cases}0, & \text{если } \mathfrak{M}\models\neg\exists\bar u\varphi(\bar u,\bar p),\\ 1, & \text{если } \mathfrak{M}\models\exists\bar u\varphi(\bar u,\bar p).\end{cases}$$

Если $t=\{t_1\}$, то $\mathrm{rnk}(T(\bar p))=\mathrm{rnk}(\langle t_1,\varphi\rangle(\bar p))+1$. Если $t=t_1\cup t_2$, то $\mathrm{rnk}(T(\bar p))=\max(\mathrm{rnk}(\langle t_1,\varphi\rangle(\bar p)),\mathrm{rnk}(\langle t_2,\varphi\rangle(\bar p)))$. В этих случаях соответствующие формулы $\varphi_{T,m}$ строятся очевидно. Пусть $s(\bar v)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}T_i(\bar v)$ — шаблонное множество высоты 0. Тогда $\mathrm{rnk}(s(\bar p))=\max(\mathrm{rnk}(T_i(\bar p)))$ и формулы $\varphi_{s,m}$ строятся из формул $\varphi_{T_i,l}$.

Пусть $T(\bar v)=\langle t(\bar u,\bar s(\bar u)),\varphi(\bar u,\bar v)\rangle$ — шаблон высоты $n+1$. Построение формул $\varphi_{T,m}$ отличается от случая высоты 0 только при $t(\bar u)=s(\bar u)$. Полагаем $\varphi_{T,m}(\bar v)\leftrightharpoons\exists\bar u(\varphi(\bar u,\bar v)\wedge\varphi_{s,m-1}(\bar u))\wedge\forall\bar u\left(\varphi(\bar u,\bar v)\to\bigwedge\limits_{j=m}^{\mathrm{toprnk}(s)}\neg\varphi_{s,j}(\bar u)\right)$.

Теперь, зная, что toprnk — Σ-функция в $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$, и имея формулы $\varphi_{s,m}$, легко получаем требуемое утверждение. $\square$

Лемма 1.1. *Для каждых Δ_0-формулы $\varphi(\bar x)$ сигнатуры σ' и кортежа $\bar a(\bar u)$, состоящего из шаблонных множеств и праэлементов, эффективно находится формула $\varphi^{\mathfrak{M},\bar a}(\bar u)$ сигнатуры σ такая, что для любого означивания црапеременных $\bar u$ (под црапеременными подразумеваем переменные, которые означиваются только праэлементами) выполняется соотношение*

$$\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})\models\varphi(\bar a(\bar u))\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\varphi^{\langle\mathfrak{M},\bar a\rangle}(\bar u).$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение для атомарных формул. В дальнейшем $\bot\leftrightharpoons\exists x\neg(x\approx x)$, $\top\leftrightharpoons\exists x(x\approx x)$ — тождественно ложная и тождественно истинная формулы соответственно.

1. $\varphi(x)=U(x)$, где $U(\mathbb{HYP}(\mathfrak{M}))$ — все праэлементы данного допустимого множества. Тогда если $a(\bar u)=u_i$ то $\varphi^{\mathfrak{M},\bar a}(\bar u)\leftrightharpoons\top$, иначе $\varphi^{\mathfrak{M},\bar a}(\bar u)\leftrightharpoons\bot$.

2. $\varphi(\bar x)=R(\bar x)$, где $R\in\sigma$ — предикатный символ. Тогда если все a_i — праэлементы, то $\varphi^{\mathfrak{M},\bar a}(\bar u)\leftrightharpoons R(\bar u)$, иначе $\varphi^{\mathfrak{M},\bar a}(\bar u)\leftrightharpoons\bot$.

3. $\varphi(x,y)=x\approx y$. Строим $\varphi^{\mathfrak{M},\langle a,b\rangle}(\bar v_1,\bar v_2)$ индукцией по рангу $a(\bar v_1)$ и $b(\bar v_2)$.

Пусть ранг равен 0, т. е. a и b — праэлементы или пустое множество. В случае, когда оба аргумента — праэлементы v_1 и v_2, то $\varphi^{\mathfrak{M},\bar a}(\bar u)\leftrightharpoons v_1\approx v_2$. Если оба — пустое множество, то $\varphi^{\mathfrak{M},\bar a}(\bar u)\leftrightharpoons\top$, если один из аргументов — праэлемент, а второй — пустое множество, то $\varphi^{\mathfrak{M},\bar a}(\bar u)\leftrightharpoons\bot$. Пусть для шаблонных множеств $c(\bar u_1)$, $d(\bar u_2)$ ранга, меньшего n, построены формулы $(x\approx y)^{\mathfrak{M},\langle c,d\rangle}(\bar u_1,\bar u_2)$. Пусть $a(\bar v_1)$ и $b(\bar v_2)$ — шаблонные множества ранга не больше $n+1$. Тогда элементами a и b являются множества или праэлементы ранга, не большего n. Пусть $a=\bigcup\limits_{i=1}^{k_1}\langle t_i^1(\bar u_i^1,\bar s_i^1),\varphi_i^1(\bar u_i^1,\bar v_1)\rangle$, $b=\bigcup\limits_{j=1}^{k_2}\langle t_j^2(\bar u_j^2,\bar s_j^2),\varphi_j^2(\bar u_j^2,\bar v_2)\rangle$. Тогда определим

$$\begin{aligned}(x\subseteq y)^{\mathfrak{M},\langle a,b\rangle}(\bar v_1,\bar v_2)\leftrightharpoons\bigwedge_{i=1}^{k_1}\forall\bar u_i^1\Bigg(&\varphi_i^1(\bar u_i^1,\bar v_1)\\ &\to\bigvee_{j=1}^{k_2}\exists\bar u_j^2\big(\varphi_j^2(\bar u_j^2,\bar v_2)\wedge(x\approx y)^{\mathfrak{M},\langle t_i^1(\bar u_i^1,\bar s_i^1),t_j^2(\bar u_j^2,\bar s_j^2)\rangle}(\bar u_i^1,\bar u_j^2,\bar v_1,\bar v_2)\big)\Bigg).\end{aligned}$$

Положим $(x\approx y)^{\mathfrak{M},\langle a,b\rangle}(\bar v_1,\bar v_2)\leftrightharpoons(x\subseteq y)^{\mathfrak{M},\langle a,b\rangle}(\bar v_1,\bar v_2)\wedge(x\subseteq y)^{\mathfrak{M},\langle b,a\rangle}(\bar v_2,\bar v_1)$.

4. $\varphi(x,y) = x \in y$. Если b — праэлемент v_2, то полагаем $\varphi^{\mathfrak{M},\langle a,b\rangle}(\bar v_1, v_2) \leftrightharpoons \bot$. Если же $b = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \langle t_i(\bar u_i, \bar s_i), \varphi_i(\bar u_i, \bar v_2)\rangle$, то $(x \in y)^{\mathfrak{M},\langle a,b\rangle}(\bar v_1, \bar v_2) \leftrightharpoons \bigvee\limits_{i=1}^{k} \exists \bar u_i(\varphi_i(\bar u_i, \bar v_2) \wedge (x \approx y)^{\mathfrak{M},\langle a, t_i(\bar u_i,\bar s_i)\rangle}(\bar v_1, \bar u_i, \bar v_2))$.

Для формул, не являющихся атомарными, ведем индукцию по длине формулы. Пусть для всех формул ψ длины, меньшей, чем φ, построены соответствующие $\psi^{\langle\mathfrak{M},\bar a\rangle}$. Тогда формула φ может иметь один из следующих видов.

• $\varphi(\bar x) = (\varphi_1(\bar x)\lambda\varphi_2(\bar x))$, где $\lambda \in \{\vee, \wedge, \to\}$. Положим

$$\varphi^{\langle\mathfrak{M},\bar a\rangle}(\bar u) \leftrightharpoons \big(\varphi_1^{\langle\mathfrak{M},\bar a\rangle}(\bar u)\lambda\varphi_2^{\langle\mathfrak{M},\bar a\rangle}(\bar u)\big).$$

• $\varphi(\bar x) = \neg\varphi_1(\bar x)$. Положим $\varphi^{\langle\mathfrak{M},\bar a\rangle}(\bar u) \leftrightharpoons \neg\varphi_1^{\langle\mathfrak{M},\bar a\rangle}(\bar u)$.

• $\varphi(\bar x) = \exists y \in z\varphi_1(y, \bar x)$, где z — одна из переменных в $\bar x$. Пусть $b(\bar u)$ — элемент из $\bar a(\bar u)$, соответствующий переменной z. Пусть $b = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \langle t_i(\bar u_i, \bar s_i), \psi_i(\bar u_i, \bar u)\rangle$. Положим $\varphi^{\langle\mathfrak{M},\bar a\rangle}(\bar u) \leftrightharpoons \bigvee\limits_{i=1}^{k} \exists \bar u_i\big(\psi_i(\bar u_i, \bar u) \wedge \varphi_1^{\langle\mathfrak{M},\langle t_i(\bar u_i,\bar s_i),\bar a\rangle\rangle}(\bar u_i, \bar u)\big)$. Для ограниченного квантора всеобщности $\varphi^{\langle\mathfrak{M},\bar a\rangle}(\bar u)$ строится аналогично с заменой $\bigvee$ на $\bigwedge$, а $\wedge$ на $\to$. $\square$

Лемма 1.2. *Для любой рекурсивно насыщенной модели $\mathfrak{M}$ справедливо соотношение $HYP(\mathfrak{M}) \subseteq M \cup TS(\mathfrak{M})$. Кроме того, по представлению любого множества $a \in HYP(\mathfrak{M})$ в виде значения терма t от праэлементов и M с помощью функций $\mathscr{F}_i$ и $\mathscr{D}$ эффективно строится представление этого элемента в виде значения шаблонного множества.*

Доказательство. Пусть $a = t(\bar v, M)$. Индукция по длине терма t. База очевидна. При доказательстве индукционного перехода в пп. $i \in \{1,\dots,11\}$ считаем, что $t(\bar u, \mathfrak{M}) = \mathscr{F}_i(b,c)$, где $b(\bar v), c(\bar v)$ — элементы $HYP(\mathfrak{M})$, для которых уже построены представления в виде шаблонных множеств.

1. $\mathscr{F}_1(b,c) = \{b,c\}$. Очевидно, $\{b,c\}(\bar v) = \langle t_1(b(\bar u)), \bar v \approx \bar u\rangle \cup \langle t_2(c(\bar u)), \bar v \approx \bar u\rangle$, где $t_i(x) = x$.

2. $\mathscr{F}_2(b,c) = \bigcup b$. Пусть $b(\bar v) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \langle t_i(\bar u_i, \bar s_i), \varphi_i(\bar u_i, \bar v)\rangle$. Так как объединение конечного числа шаблонных множеств — шаблонное множество, достаточно показать, что $\bigcup\langle t_1(\bar u_1, \bar s_1), \varphi_1(\bar u_1, \bar v)\rangle$ имеет представление в виде шаблонного множества. Ведем индукцию по длине терма t_1. Если $t_1 = u$, то искомое множество пусто. Если $t_1 = s(\bar u_1)$ и $s(\bar u_1) = \bigcup\limits_{i=1}^{l} \langle t'_i(\bar u'_i, \bar s'_i), \psi_i(\bar u'_i, \bar u_1)\rangle$, то $\cup b(\bar v) = \bigcup\limits_{i=1}^{l} \langle t'_i(\bar u'_i, \bar s'_i), \exists \bar u_1(\psi_i(\bar u'_i, \bar u_1) \wedge \varphi_1(\bar u_1, \bar v))\rangle$. Если $t_1 = \{t'_1\}$, то $\bigcup b(\bar v) = \langle t'_1(\bar u_1, \bar s_1), \varphi_1(\bar u_1, \bar v)\rangle$. Если $t_1 = t'_1 \cup t''_1$, то $\bigcup b(\bar v) = \bigcup\langle t'_1, \varphi_1\rangle \cup \bigcup\langle t''_1, \varphi_1\rangle$.

3. $\mathscr{F}_3(b,c) = b\backslash c$. Пусть $b(\bar v) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \langle t_i(\bar u_i, \bar s_i), \varphi_i(\bar u_i, \bar v)\rangle$. Тогда шаблонное представление $b\backslash c$ выглядит так:

$$(b\backslash c)(\bar v) = \bigcup_{i=1}^{k} \langle t_i(\bar u_i, \bar s_i), \varphi_i(\bar u_i, \bar v) \wedge (\neg(x \in y))^{\langle\mathfrak{M},\langle t_i(\bar u_i,\bar s_i),c\rangle\rangle}(\bar u_i, \bar v)\rangle.$$

4. $\mathscr{F}_4(b,c) = b \times c$. Замечание, сделанное в п. 2, позволяет ограничиться случаем, когда представления b и c состоят из одного шаблона: $b(\bar v) =$

$\langle t_1(\bar u_1,\bar s_1),\varphi_1(\bar u_1,\bar v)\rangle$, $c(\bar v)=\langle t_2(\bar u_2,\bar s_2),\varphi_2(\bar u_2,\bar v)\rangle$. Тогда

$$(b\times c)(\bar v)=\langle\langle t_1(\bar u_1,\bar s_1),t_2(\bar u_2,\bar s_2)\rangle,\varphi_1(\bar u_1,\bar v)\wedge\varphi_2(\bar u_2,\bar v)\rangle.$$

Заметим, что для того чтобы не возникло ошибки, здесь нужно, чтобы $\bar u_1$ и $\bar u_2$ не содержали общих переменных.

5. $\mathscr{F}_5(b,c)=\mathrm{dom}(b)$. Пусть $(\bigcup\bigcup b)(\bar v)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\langle t_i(\bar u_i,\bar s_i),\varphi_i(\bar u_i,\bar v)\rangle$. Такое представление существует согласно п. 2. Известно, что $\mathrm{dom}(b)\subseteq\bigcup\bigcup b$. Осталось выделить нужные элементы из $(\bigcup\bigcup b)(\bar v)$. Заметим, что $x\in\mathrm{dom}(y)$ — Δ_0-формула. Пусть $\psi_i(\bar u_i,\bar v)=(x\in\mathrm{dom}(y))^{\langle\mathfrak{M},\langle t_i(\bar u_i,\bar s_i),b\rangle\rangle}(\bar u_i,\bar v)$. Тогда $\mathrm{dom}(b)(\bar v)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\langle t_i(\bar u_i,\bar s_i),\varphi_i(\bar u_i,\bar v)\wedge\psi_i(\bar u_i,\bar v)\rangle$.

6. При $i>5$ рассуждения аналогичны рассуждениям п. 5. Искомое множество $\mathscr{F}_i(b,c)$ получается Δ_0-выделением из шаблонного с использованием леммы 1.1.

7. Осталось доказать, что если a имеет представление в виде шаблона, то и $\mathscr{D}(a)=\{\mathscr{F}_i(x,y)\mid x,y\in a,\ i=1,\dots\}$ тоже имеет такое представление. Опять из-за того, что объединение конечного числа шаблонных множеств — шаблонное множество, достаточно доказать следующее утверждение: для любых двух шаблонных множеств $a(\bar v_1)$, $b(\bar v_2)$, состоящих из одного шаблона ($\langle t_1(\bar u_1,\bar s_1),\varphi_1(\bar u_1,\bar v_1)\rangle$ и $\langle t_2(\bar u_2,\bar s_2),\varphi_2(\bar u_2,\bar v_2)\rangle$ соответственно), множество

$$\mathscr{F}_i[a,b]=\{\mathscr{F}_i(x,y)\mid x\in a,y\in b\}$$

имеет представление в виде шаблонного множества. Будем считать в дальнейшем, что $\bar u_1$ и $\bar u_2$ не имеют общих переменных.

Пусть $s(\bar u_1,\bar u_2)=\mathscr{F}_i(t_1(\bar u_1,\bar s_1),t_2(\bar u_2,\bar s_2))(\bar u_1,\bar u_2)$ — шаблонное множество, найденное по одному из пп. 1–6. Тогда

$$\mathscr{F}_i[a,b](\bar v_1,\bar v_2)\leftrightharpoons\langle s(\bar u_1,\bar u_2),\varphi_1(\bar u_1,\bar v_1)\wedge\varphi_2(\bar u_2,\bar v_2)\rangle.\qquad\square$$

Каждому шаблонному множеству $a(\bar v)$ сопоставим некоторое натуральное число, по которому можно определить всю его структуру. Назовем это число *кодом* $a(\bar v)$ и будем обозначать через $[a(\bar v)]$. Делается это индукцией по высоте шаблонного множества. Зафиксируем $c_i:\omega^i\to\omega$ — взаимно однозначные отображения (канторовские нумерации кортежей длины $i=1,\dots$), а также обратные к ним отображения $\{c_i^j:\omega\to\omega\mid j=1,\dots,i\}$ (выдающие j-й элемент кортежа). Зафиксируем нумерации термов сигнатуры $\{\{\}^1,\cup^2\}$ от k переменных: $[\cdot]_k$, и нумерации формул сигнатуры σ от k переменных: $[\cdot]_k$. От нумерации термов и формул требуем, чтобы они допускали эффективный переход к подтермам и подформулам. Кроме того, мы должны уметь проверять, является ли терм «простым», т. е. состоящим только из одной переменной.

Пусть коды кортежей шаблонных множеств $\bar s_i(\bar u_i)$ меньшей высоты уже построены, а $a(\bar v)=\bigcup\limits_{i=1}^{r}\langle t_i(\bar u_i,\bar s_i(\bar u_i)),\varphi_i(\bar v_i,\bar u_i)\rangle(\bar v)$. Пусть k — длина $\bar v$, l_i — длина $\bar v_i$, m_i — длина $\bar u_i$, n_i — длина $\bar s_i$. *Кодом шаблона* $T_i=\langle t_i(\bar u_i,\bar s_i(\bar u_i)),\varphi_i(\bar v_i,\bar u_i)\rangle$ назовем число $[T_i]\leftrightharpoons c_5(m_i,n_i,c_{n_i}([\bar s_i]),[t_i]_{m_i+n_i},[\varphi_i]_{l_i+m_i})$ (если $n_i=0$, то $c_0\leftrightharpoons 0$). Положим

$$[a(\bar v)]\leftrightharpoons c_3(k,r,c_r(2^k*[T_1]+k_1,\dots,2^k*[T_r]+k_r)),$$

где $k_i \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ — число, которое определяет, какие переменные из $\bar{v}$ попали в $\bar{v}_i$. Очевидно, по k_i эффективно находится l_i — количество степеней двойки в разложении k_i.

Заметим, что множество кодов всех шаблонных множеств — вычислимое множество. Шаблонное множество с кодом i обозначаем через $s[i](\bar{v}_i)$.

Предложение 1.2. *Следующие предикаты являются Σ-предикатами на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$.*

1. $\mathrm{Cort}(i, a)$ — *a является кортежем длины i.*

2. $\mathrm{Formula}(i, \bar{u})$ — *на модели $\mathfrak{M}$ истинна формула с номером i в нумерации $[\cdot]_l$ на праэлементах $\bar{u}$, где l — длина кортежа $\bar{u}$.*

Следующие функции являются частичными Σ-функциями на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$.

1. $\mathrm{Concat}(i, j, \bar{u}, \bar{v})$ — *функция конкатенации двух кортежей $\bar{u}$ и $\bar{v}$ длин i, j в кортеж длины $i + j$.*

2. $\mathrm{Height}(i)$ — *высота шаблонного множества с кодом i.*

3. $\mathrm{Term}(i, \bar{x})$ — *выдает значение терма сигнатуры $\{\{\}^1, \cup^2\}$ с номером i в нумерации $[\cdot]_l$ на элементах $\bar{x}$, где l — длина кортежа $\bar{x}$.*

4. $\mathrm{VarLength}(j, i)$ — *выдает длину l_j кортежа $\bar{v}_j$ в структуре шаблонного множества с кодом i.*

4. $\mathrm{GetVars}(j, i, \bar{v})$ — *выдает кортеж $\bar{v}_j$ параметров j-го шаблона в шаблонном множестве $s[i](\bar{v})$.*

Лемма 1.3. *Отображение $s[\cdot](\cdot)$, которое сопоставляет ординалу i и кортежу праэлементов $\bar{v}$ значение шаблонного множества $s[i](\bar{v})$, является частичной Σ-функцией на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$. Ее область определения — множество $\{\langle i, y\rangle \mid i$ — код шаблонного множества, $y \in M^{c_3^1(i)}\}$ (мы закодировали шаблонные множества так, что $c_3^1(i)$ — в точности количество параметров у шаблонного множества с кодом i).*

Доказательство. Определяем искомую Σ-функцию индукцией по $\mathrm{Height}(i)$. Это аналогично определению Σ-рекурсией, так как коды всех шаблонных множеств меньшей высоты, входящих в определение шаблонного множества с кодом i, эффективно находятся по i.

Пусть для всех кодов шаблона i' таких, что $\mathrm{Height}(i') \le \mathrm{Height}(i)$, для любого кортежа $\bar{v}_i'$ длины $c_3^1(i')$ определены $s[i'](\bar{v}_i')$. В этой лемме через k обозначается код j-го шаблона множества $s[i](\bar{v})$, через u — кортеж $\bar{u}_j$, через s — кортеж $\bar{s}_j(\bar{u}_j)$. Главная идея вычисления $s[i](\bar{v})$ заключается в том, что $s[i](\bar{v})$ состоит в точности из элементов вида $t_j(\bar{u}_j, \bar{s}_j)$ для всех $\bar{u}_j$ таких, что $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{u}_j, \bar{v}_j)$ (j пробегает все шаблоны множества $s[i](\bar{v})$). Положим

$$\begin{gathered} x \subseteq s[i](\bar{v}) \leftrightharpoons \forall y \in x \Bigg(\bigvee_{j=1}^{c_3^2(i)} \exists k \Bigg(\big(k \approx c^j_{c_3^2(i)}\big(c_3^3(i)\big)\big) \wedge \exists u \Bigg(\mathrm{Cort}\big(c_5^1(k), u\big) \\ \wedge \exists s \Bigg(\Bigg(\mathrm{Cort}\big(c_5^2(k), s\big) \wedge \bigwedge_{j'=1}^{c_5^2(k)} c^{j'}_{c_5^2(k)}(s) \approx s\big[c^{j'}_{c_5^2(k)}\big(c_5^3(k)\big)\big](u) \Bigg) \\ \wedge \big(y \approx \mathrm{Term}\big(c_5^4(k), \mathrm{Concat}\big(c_5^1(k), c_5^2(k), u, s\big)\big)\big) \\ \wedge \mathrm{Formula}\big(c_5^5(k), \mathrm{Concat}\big(c_5^1(k), \mathrm{VarLength}(j, i), u, \mathrm{GetVars}(j, i, \bar{v})\big)\big) \Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg). \end{gathered}$$

Пусть $M(i,j) \leftrightharpoons M^{i'}$, где $i' = c_5^1\big(c^j_{c_3^2(i)}\big(c_3^3(i)\big)\big)$, $j = 1,\dots,c_3^2(i)$. Очевидно, $M(i,j)$ является Σ-функцией на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$. Положим

$$s[i](\bar v) \subseteq x \leftrightharpoons \bigwedge_{j=1}^{c_3^2(i)} \exists k\Bigg(\big(k \approx c^j_{c_3^2(i)}\big(c_3^3(i)\big)\big) \wedge \forall u \in M(i,j)\Bigg(\big(\mathrm{Cort}\big(c_5^1(k),u\big) \wedge \mathrm{Formula}\big(c_5^5(k), \mathrm{Concat}\big(c_5^1(k), \mathrm{VarLength}(j,i), u, \mathrm{GetVars}(j,i,\bar v)\big)\big)\big) \to \exists s\Bigg(\Bigg(\mathrm{Cort}\big(c_5^2(k),s\big) \wedge \bigwedge_{j'=1}^{c_5^2(k)} c^{j'}_{c_5^2(k)}(s) \approx s\big[c^{j'}_{c_5^2(k)}\big(c_5^3(k)\big)\big](u)\Bigg) \wedge \big(\mathrm{Term}\big(c_5^4(k), \mathrm{Concat}\big(c_5^1(k), c_5^2(k), u, s\big)\big) \in x\big)\Bigg)\Bigg)\Bigg).$$

Осталось отметить, что $x \approx s[i](\bar v)$ задается следующей Σ-формулой:

$$(x \approx s[i](\bar v)) \leftrightharpoons (x \subseteq s[i](\bar v)) \wedge (s[i](\bar v) \subseteq x). \quad \square$$

Лемма 1.4. *Пусть $R(x)$ — предикат на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$, определимый некоторой Σ-формулой с параметрами $\bar y(\bar p)$. Тогда существует вычислимая последовательность A_n такая, что*

$$R = \{s[n](\bar v_n) \mid \text{существует } \varphi \in A_n \text{ такая, что } \mathfrak{M} \models \varphi(\bar v_n, \bar p)\}.$$

Каждое A_n состоит из формул (здесь формулу отождествляем с ее номером в нумерации $[\cdot]_{k+c_3^1(n)}$, где k — длина $\bar p$, а $c_3^1(n)$ — длина $\bar v_n$).

Доказательство. В силу принципа Σ-рефлексии существует Δ_0-формула $\varphi(x,\bar y,z)$ такая, что $R(x) \Leftrightarrow \exists z\varphi(x,\bar y,z)$. Зафиксируем некоторые шаблонные представления для множеств $L(i,M)$. Положим

$$A_n \leftrightharpoons \{(\exists z' \in z\varphi(x,\bar y,z'))^{\langle \mathfrak{M}, \langle s[n],\bar y, L(i,M)\rangle\rangle}(\bar v_n, \bar p) \mid i \in \omega\}. \quad \square$$

Лемма 1.5. *Пусть $s(\bar v)$ — шаблонное множество, $s(\bar v) = \bigcup_{i=1}^{r} \langle t_i, \varphi_i\rangle(\bar v)$. Тогда эффективно находится представление $s'(\bar v) = \{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y\rangle \in s(\bar v)\}$ в виде шаблонного множества следующего вида: $s'(\bar v) = \bigcup_{i=1}^{r'} \big\langle \langle t_i^1, t_i^2\rangle, \psi_i\big\rangle(\bar v)$.*

Доказательство. Пусть $\bigcup\bigcup s(\bar v) = \bigcup_{i=1}^{r''} \langle t_i', \varphi_i'\rangle(\bar v)$. Тогда

$$s'(\bar v) = \bigcup_{i=1}^{r'}\bigcup_{j=1}^{r'} \langle\langle t_i'(\bar u_1), t_j'(\bar u_2)\rangle, \varphi_i'(\bar u_1,\bar v) \wedge \varphi_j'(\bar u_2,\bar v) \wedge (\langle x,y\rangle \in z)^{\langle \mathfrak{M}, \langle t_i', t_j', s\rangle\rangle}(\bar u_1, \bar u_2, \bar v)\rangle. \quad \square$$

Лемма 1.6. *Пусть $s(\bar v)$ — шаблонное множество, $s(\bar v) = \bigcup_{i=1}^{r} \langle t_i, \varphi_i\rangle(\bar v)$. Тогда эффективно находится представление $s(\bar v)$ в виде шаблонного множества такое, что все шаблоны попарно не пересекаются.*

Доказательство. Положим

$$\psi_i(\bar u_i, \bar v) \leftrightharpoons \varphi_i(\bar u_i, \bar v) \wedge \bigwedge_{j=1}^{i-1} \neg\exists \bar u_j(\varphi_j(\bar u_j, \bar v) \wedge (x \approx y)^{\langle \mathfrak{M}, \langle t_i, t_j\rangle\rangle}(\bar u_i, \bar u_j, \bar v)).$$

Тогда $s(\bar{v}) = \bigcup_{i=1}^{r} \langle t_i, \psi_i \rangle(\bar{v})$ — требуемое представление. $\square$

Определим многозначное соответствие $\nu : \mathbb{HYP}(\mathfrak{M}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ следующим образом: $\nu(s[i](\bar{p})) \leftrightharpoons \langle i, \bar{p} \rangle$. Очевидно, что существует вычислимая инъективная функция $f : \omega \to \omega$ такая, что $\langle i, \bar{p} \rangle = t_{f(i)}(\bar{p})$.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная модель регулярной теории. Тогда $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M}) \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Докажем, что отображение ν^{-1} осуществляет эту Σ-сводимость. Пусть $R(x)$ — Σ-предикат на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ (здесь x может быть кортежем). По лемме 1.4 существует вычислимая последовательность $\{A_n\}_{n<\omega}$ такая, что

$$R = \{s[n](\bar{v}_n) \mid n \in \omega,\, \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{p}, \bar{v}_n) \text{ для некоторой } \varphi \in A_n\}.$$

Следовательно,

$$\nu(R) = \{\langle n, \bar{v}_n \rangle \mid n \in \omega,\, \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{p}, \bar{v}_n) \text{ для некоторой } \varphi \in A_n\},$$

т. е. $\nu(R) = \{t_{f(n)}(\bar{v}_n) \mid n \in \omega, \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{p}, \bar{v}_n) \text{ для некоторой } \varphi \in A_n\}$.

Строим вычислимую последовательность $\{B_n\}_{n\in\omega}$. Если выполняется $n = f(k)$ для некоторого k, то полагаем $B_n \leftrightharpoons \{\varphi' \mid \varphi \in A_k\} \cup \{\perp\}$, иначе $B_n \leftrightharpoons \{\perp\}$ (здесь φ' — $\exists$-формула сигнатуры σ, эквивалентная φ). Получим

$$\nu(R) = \{t_n(\bar{v}_n) \mid n \in \omega,\, \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{p}, \bar{v}_n) \text{ для некоторой } \varphi \in B_n\}.$$

По теореме 2 получаем, что $\nu(R)$ — Σ-подмножество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. $\square$

Лемма 1.7. *Если $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная модель и для некоторой формулы $\varphi(\bar{u}, \bar{p})$ нашлось вычислимое множество $A \subseteq \omega$ такое, что $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{u}, \bar{p}) \leftrightarrow \bigvee_{n\in A} \varphi_n(\bar{u}, \bar{q})$, то найдется конечное $B \subseteq A$ такое, что $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{u}, \bar{p}) \leftrightarrow \bigvee_{n\in B} \varphi_n(\bar{u}, \bar{q})$ (здесь $\bar{u}$ — кортеж переменных длины i, $\bar{p}, \bar{q}$ — кортежи параметров длин j, k соответственно).*

Доказательство. Рассмотрим $C(\bar{p}) \leftrightharpoons \{\bar{u} \mid \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{u}, \bar{p})\}$. Имеем

$$\mathbb{HYP}(\mathfrak{M}) \models \forall x \in C \exists n (n \in A \wedge \mathrm{Formula}(n, \mathrm{Concat}(i, k, \bar{u}, \bar{q}))).$$

Используя Σ-выборку и Δ-выделение, получаем ординал N такой, что

$$\mathbb{HYP}(\mathfrak{M}) \models \forall x \in C \exists n \in N (n \in A \wedge \mathrm{Formula}(n, \mathrm{Concat}(i, k, \bar{u}, \bar{q}))).$$

Искомое B равно $A \cap N$.

2. Критерий справедливости принципа униформизации на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ над рекурсивно насыщенной моделью $\mathfrak{M}$

Лемма 2.1. *Пусть $R(x, y)$ — Σ-предикат на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$. Существует последовательность попарно не пересекающихся шаблонных множеств $s_i(\bar{v}_i)$ и кортежей $\bar{p}_i$ элементов из M такая, что $R(\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})^2) = \bigcup_{i\in\omega} s_i(\bar{p}_i)$.*

Доказательство. В силу принципа Σ-рефлексии существует Δ_0-формула $\varphi(x, y, z, \bar{t})$ с параметрами $\bar{t}$ такая, что

$$\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \mathbb{HYP}(\mathfrak{M}) \models \exists z \varphi(x, y, z, \bar{t}).$$

Зафиксируем некоторые представления в виде шаблонных множеств для элементов $\bar{t}$, $L(n,M)$ и $A_n \leftrightharpoons (L(n+1,M)\backslash L(n,M)) \cap \mathbb{HYP}(\mathfrak{M})^2$. Пусть $A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{r_n} \langle\langle t_n^i, r_n^i\rangle, \varphi_n^i\rangle$ (задается без параметров), $\bar{t} = \bar{t}(\bar{p})$. Пусть $\bar{v}$ — кортеж праперменных той же длины, что и $\bar{p}$. Рассмотрим шаблонные множества

$$s_l^k(\bar{v}) \leftrightharpoons \bigcup_{i=1}^{r_l} \langle\langle t_l^i, r_l^i\rangle, \varphi_n^i \wedge (\exists z \in z_1 \varphi(x,y,z,\bar{t}) \\ \wedge \forall z \in z_2 \neg\varphi(x,y,z,\bar{t}))^{\langle \mathfrak{M}, \langle t_l^i, r_l^i, \bar{t}, L(k+1,M), L(k,M)\rangle\rangle}\rangle.$$

Здесь вместо переменной x подставляется t_l^i, вместо y — r_l^i, вместо z_1 — $L(k+1,M)$, вместо z_2 — $L(k,M)$ и вместо $\bar{t}$ — $\bar{t}$.

Заметим, что $R(\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})^2) = \bigcup\limits_{l\in\omega} \bigcup\limits_{k\in\omega} s_l^k(\bar{p})$, где шаблонные множества $s_l^k(\bar{v})$ попарно не пересекаются. Осталось собрать из $s_l^k(\bar{p})$ одну последовательность. Например, $R(\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})^2) = \bigcup\limits_{k\in\omega} s_{c_2^2(k)}^{c_2^1(k)}(\bar{p})$. $\square$

Теорема 2.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная модель. Следующие условия эквивалентны.*

1. *На $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ выполняется принцип униформизации.*

2. *Для любого $A \subset P(M) \setminus \{\varnothing\}$, $A \in \mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$, существует Σ-функция $f : A \to M$ такая, что для любого $a \in A$ выполняется $f(a) \in a$. Кроме того, все эти функции задаются с единым набором параметров $\bar{y}$.*

3. *Существует $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ такой, что для любой пары $\varphi(\bar{u},\bar{p})$ и $\psi(\bar{u},\bar{v},\bar{p})$ формул сигнатуры σ с параметрами $\bar{p}$ таких, что ψ определяет отношение эквивалентности η на $\varphi(\mathfrak{M}^k)$, существует вычислимое семейство формул $\chi_i(\bar{u},\bar{p},\bar{c})$, дизъюнкция которых определяет подмножество $\varphi(\mathfrak{M}^k)$, пересекающееся с каждым классом эквивалентности по отношению η ровно на одном элементе.*

Доказательство. $1 \to 2$. Пусть дано A, обладающее описанными условиями. Рассмотрим бинарный Δ-предикат $Q(a,u) \leftrightharpoons (a \in A) \wedge (u \in a)$. По принципу униформизации существует Σ-функция f такая, что $\mathrm{dom}(f) = A$ и для любого $a \in A$ выполняется $Q(a, f(a))$, т. е. $f(a) \in a$. Эта и есть функция выбора, которая требуется в условии 2. В качестве единого набора параметров для всех этих функций можно взять параметры, с которыми униформизуется универсальный Σ-предикат.

$2 \to 3$. Пусть $\bar{y}$ имеет представление в виде значения шаблонного множества $\bar{y} = \bar{y}(\bar{c})$. Докажем следующее утверждение индукцией по n.

Для любой пары $\varphi(\langle u_1,\dots,u_n\rangle,\bar{p})$ и $\psi(\langle u_1,\dots,u_n\rangle,\langle v_1,\dots,v_n\rangle,\bar{p})$ формул сигнатуры σ с параметрами $\bar{p}$ таких, что ψ определяет отношение эквивалентности η на $\varphi(\mathfrak{M}^n)$, существует формула $\chi(\langle u_1,\dots,u_n\rangle,\bar{p},\bar{c})$, которая определяет подмножество $\varphi(\mathfrak{M}^n,\bar{p})$, пересекающееся с каждым классом эквивалентности по отношению η ровно на одном элементе.

Доказательство базы индукции при $n = 1$ практически ничем не отличается от доказательства индукционного перехода. Чтобы не повторять одно и то же доказательство дважды, докажем базу индукции для $n = 0$. Определим некоторый единственный кортеж длины 0 — $\bar{u}_0$. Тогда для данных $\varphi(\bar{p})$ и $\psi(\bar{p})$ искомую формулу χ определим так: $\chi(\bar{p},\bar{c}) \leftrightharpoons \varphi(\bar{p})$.

Пусть утверждение верно для n, покажем его истинность для $n+1$. Обозначим $\bar{u} \leftrightharpoons \langle u_1,\dots,u_n\rangle$ и $\bar{v} \leftrightharpoons \langle v_1,\dots,v_n\rangle$. Пусть формулы $\varphi(\langle u_1,\dots,u_{n+1}\rangle,\bar{p})$ и

$\psi(\langle u_1,\dots,u_{n+1}\rangle,\langle v_1,\dots,v_{n+1}\rangle,\bar p)$ обладают указанным свойством. Рассмотрим формулу

$$\psi_1(\langle u_1,\dots,u_n\rangle,\langle v_1,\dots,v_n\rangle,u_{n+1},\bar p)\rightleftharpoons\psi(\langle u_1,\dots,u_{n+1}\rangle,\langle v_1,\dots,v_n,u_{n+1}\rangle,\bar p).$$

При каждом u_{n+1} она задает отношение эквивалентности η_1 на $\varphi(\mathfrak{M}^n,u_{n+1},\bar p)$. По предположению индукции существует формула $\chi_1(\langle u_1,\dots,u_n\rangle,u_{n+1},\bar p,\bar c)$ такая, что на $\mathfrak{M}$ выполнены следующие условия:

1. $\chi_1(\langle u_1,\dots,u_n\rangle,u_{n+1},\bar p,\bar c)\to\varphi(\langle u_1,\dots,u_{n+1}\rangle,\bar p)$.

2. $\forall\bar u\in M^n\forall\bar v\in M^n((\chi_1(\bar u,u_{n+1},\bar p,\bar c)\wedge\chi_1(\bar v,u_{n+1},\bar p,\bar c)\wedge\psi_1(\bar u,\bar v,u_{n+1},\bar p))\to(\bar u\approx\bar v))$.

3. $\forall\bar u\in M^n(\varphi(\bar u,u_{n+1},\bar p)\to\exists\bar v\in M^n(\psi_1(\bar u,\bar v,u_{n+1},\bar p)\wedge\chi_1(\bar v,u_{n+1},\bar p,\bar c)))$.

Далее обозначаем $\bar u'\rightleftharpoons\langle u_1,\dots,u_{n+1}\rangle$ и $\bar v'\rightleftharpoons\langle v_1,\dots,v_{n+1}\rangle$. Рассмотрим следующие шаблонные множества:

$$B(\bar u',\bar p,\bar c')\rightleftharpoons\{v_{n+1}\mid\exists\bar v(\psi(\bar u',\bar v',\bar p)\wedge\chi_1(\bar v',\bar p,\bar c'))\},$$

$$A(\bar p,\bar c)\rightleftharpoons\{B(\bar u',\bar p,\bar c')\mid\chi_1(\bar u',\bar p,\bar c)\wedge(\bar c\approx\bar c')\}.$$

Множество $A(\bar p,\bar c)$ удовлетворяет всем условиям из п. 2. Следовательно, существует Σ-функция выбора $f(\bar p,\bar c):A\to M$. Эта функция сама является элементом $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$, поэтому имеет представление в виде шаблонного множества. Так как она состоит лишь из пар $\langle B(\bar u',\bar p,\bar c),v_{n+1}\rangle$, можно выбрать ее шаблонное представление, состоящее из одного шаблона:

$$f(\bar p,\bar c)=\{\langle B(\bar u',\bar p,\bar c'),v_{n+1}\rangle\mid\chi_1(\bar u',\bar p,\bar c)\wedge\varphi^f(\bar u',v_{n+1},\bar p,\bar c)\wedge(\bar c\approx\bar c')\}.$$

Формула φ^f удовлетворяет следующим условиям:

1) $\chi_1(\bar u',\bar p,\bar c)\to\exists v_{n+1}\varphi^f(\bar u',v_{n+1},\bar p,\bar c)$;

2) $\forall\bar u'\in M^{n+1}\forall\bar v'\in M^{n+1}\forall w_1\in M\forall w_2\in M(\chi_1(\bar u',\bar p,\bar c)\wedge\chi_1(\bar v',\bar p,\bar c)\wedge\psi(\bar u',\bar v',\bar p)\wedge\varphi^f(\bar u',w_1,\bar p,\bar c)\wedge\varphi^f(\bar v',w_2,\bar p,\bar c))\to(w_1\approx w_2)$.

Положим $\chi(\bar u',\bar p,\bar c)\rightleftharpoons\chi_1(\bar u',\bar p,\bar c)\wedge\varphi^f(\bar u',u_{n+1},\bar p,\bar c)$. Докажем, что χ является искомой формулой.

1. $\chi(\bar u',\bar p,\bar c)\to\chi_1(\bar u',\bar p,\bar c)\to\varphi(\bar u',\bar p)$.

2. Пусть на $\mathfrak{M}$ выполнено $\chi(\bar u',\bar p,\bar c)\wedge\chi(\bar v',\bar p,\bar c)\wedge\psi(\bar u',\bar v',\bar p)$. Покажем, что тогда выполнено и $\bar u'\approx\bar v'$. Действительно, выполняется $\chi_1(\bar u',\bar p,\bar c)\wedge\chi_1(\bar v',\bar p,\bar c)\wedge\psi(\bar u',\bar v',\bar p)\wedge\varphi^f(\bar u',u_{n+1},\bar p,\bar c)\wedge\varphi^f(\bar v',v_{n+1},\bar p,\bar c)$. Следовательно, по свойству 2 формулы φ^f получаем $u_{n+1}\approx v_{n+1}$, далее по свойству 2 формулы χ_1 имеем $\bar u\approx\bar v$.

3. Пусть дан кортеж $\bar u'$ такой, что на $\mathfrak{M}$ выполнено $\varphi(\bar u',\bar p)$. Тогда по свойству 3 формулы χ_1 найдется кортеж $\bar v$ такой, что на $\mathfrak{M}$ выполнено $\chi_1(\bar v,u_{n+1},\bar p,\bar c)\wedge\psi(\bar u',\bar v,u_{n+1},\bar p)$. По свойству 1 формулы φ^f найдется $w_{n+1}\in M$ такой, что выполнено $\varphi^f(\bar v,u_{n+1},w_{n+1},\bar p,\bar c)$. Так как элемент w_{n+1} принадлежит $B(\bar v,u_{n+1},\bar p,\bar c)$, существует кортеж $\overline{w}$ такой, что выполнено $\psi(\bar v,u_{n+1},\overline{w}',\bar p)\wedge\chi_1(\overline{w}',\bar p,\bar c)$. Используя оба свойства формулы φ^f, получаем, что выполнено $\varphi^f(\overline{w}',w_{n+1},\bar p,\bar c)$. Получили кортеж $\overline{w}'$, для которого выполнено $\psi(\bar u',\overline{w}',\bar p)\wedge\chi(\overline{w}',\bar p,\bar c)$.

$3\to1$. Пусть дан бинарный предикат R, определимый некоторой Σ-формулой с параметрами $\bar a(\bar p)$. Из леммы 2.1 следует, что $R(\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})^2)=\bigcup\limits_{k\in\omega}s_k(\bar p)$. Достаточно униформизовать каждое из $s_k(\bar p)$. Применяем последовательно лемму 1.5 (получаем представление $s_k(\bar p)$ в виде шаблонного множества специального вида, у которого в каждом шаблоне терм является упорядоченной парой) и лемму 1.6 (получаем представление $s_k(\bar{p})$ в виде шаблонного множества с попарно не пересекающимися шаблонами). Теперь достаточно униформизовать данный шаблон $T(\bar{v}) = \langle\langle t_1(\bar{u}), t_2(\bar{u})\rangle, \varphi(\bar{u}, \bar{v})\rangle$.

Пусть $\psi(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{p}) \leftrightharpoons (x \approx y)^{\langle\mathfrak{M}, \langle t_1(\bar{u}_1), t_1(\bar{u}_2)\rangle\rangle}$ задает отношение эквивалентности η на $\varphi(\mathfrak{M}, \bar{p})$. Используя посылку (свойство 1), по формулам φ и ψ строим последовательность $\chi_i(\bar{u}, \bar{p})$ такую, что $\bigvee_{i\in\omega} \chi_i(\bar{u}, \bar{p})$ — формула, определяющая подмножество $\varphi(\mathfrak{M}^k, \bar{p})$, пересекающееся с каждым классом эквивалентности по η ровно на одном элементе. Считаем, что все множества $\chi_i(\mathfrak{M}^k, \bar{p})$ попарно не пересекаются. Тогда следующее объединение попарно не пересекающихся шаблонов является множеством, униформизующим шаблон $T(\bar{v})$: $\bigcup_{i\in\omega} \langle\langle t_1, t_2\rangle, \chi_i\rangle(\bar{v})$. В итоге, выполнив такую же операцию для каждого шаблона из разложения $R(x, y)$, эффективно найдем некоторое $R' \leftrightharpoons \bigcup_{i\in\omega} T_i(\bar{p})$ — множество, униформизующее предикат R. Осталось показать, что оно определяется в $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ некоторой Σ-формулой. Заметим, что $R' = \bigcup_{i\in\omega} s[f(i)](\bar{p})$, где $f(i)$ — вычислимая функция (код шаблона $T_i(\bar{v})$). Тогда

$$x \in R' \Leftrightarrow \mathbb{HYP}(\mathfrak{M}) \models \exists i(\mathrm{Ord}(i) \wedge (x \in s[f(i)](\bar{p}))).$$

Используя лемму 1.3 ($s[f(i)](\bar{v})$ — Σ-функция от i, $\bar{v}$), получаем, что R' — Σ-предикат. □

В условии 3 существование вычислимого семейства формул $\chi_i(\bar{u}, \bar{p})$ можно заменить существованием одной формулы $\chi(\bar{u}, \bar{p})$ (видно из доказательства $2 \to 3$).

Сформулируем предложения, часть которых — непосредственные следствия доказанной теоремы.

Предложение 2.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная модель арифметики. Тогда на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ выполняется принцип униформизации.*

Доказательство. Используя теорему 2.1, возьмем формулы $\varphi(\bar{v})$ и $\psi(\bar{v}, \bar{u})$, как в условии 1 теоремы. Пусть $\leq_k$ — лексикографический порядок на M^k, где k — длина кортежей $\bar{v}$ и $\bar{u}$. Положим

$$\chi(\bar{v}) \leftrightharpoons \varphi(\bar{v}) \wedge \forall\bar{u}((\varphi(\bar{u}) \wedge \psi(\bar{v}, \bar{u})) \to (\bar{v} \leq_k \bar{u})). \quad \square$$

Отметим ряд свойств допустимого множества $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ из предложения 2.1.

Предложение 2.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная модель арифметики. Тогда*

1. $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ *является резольвентным, но не Σ-перечислимым допустимым множеством, в котором выполняется принцип униформизации.*

2. $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ *является допустимым множеством, в котором выполняется принцип униформизации, но в нем существует Σ-подмножество такое, что любое его бесконечное кобесконечное Σ-подмножество не является Δ-подмножеством.*

Доказательство. 1. Если $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ Σ-перечислимо, то по предложению 2.2 из [7] оно является наследственно конечной надстройкой.

2. Множество стандартных натуральных чисел и любое его бесконечное подмножество не определимы никакой формулой на $\mathfrak{M}$, следовательно, не являются Δ-подмножествами $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$. Но множество стандартных натуральных чисел является Σ-подмножеством $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$, так как существует Σ-функция, являющаяся биекцией этого множества, и $\mathrm{Ord}(\mathbb{HYP}(\mathfrak{M}))$. □

Предложение 2.3. *Если T — несчетно категоричная теория и $\mathfrak{M}$ — ее счетно-насыщенная модель, то ни на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, ни на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ не выполняется принцип униформизации.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ (или $\mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ — доказательства для них одинаковы). Рассмотрим в $\mathbb{A}$ Σ-предикат $R(x,y) \leftrightharpoons x \in y$. Пусть этот предикат униформизуется Σ-предикатом $R'(x,y,\bar{t})$, где параметры $\bar{t}$ задаются параметрами $\bar{p}$ из M. Теория T имеет сильно минимальную формулу $\varphi(x)$, в модели $\mathfrak{M}$ базис множества $\varphi(\mathfrak{M})$ бесконечен. Обозначим этот базис через X. Любая биекция на X продолжается до автоморфизма модели $\mathfrak{M}$ [1]. Пусть элементы $\bar{p}$ лежат в алгебраическом замыкании конечного $Y \subset X$. Возьмем $u_1, u_2 \in X \setminus Y$. Определим биекцию ν на X, переставляющую только элементы u_0, u_1. Она продолжается до автоморфизма μ модели $\mathfrak{M}$. В частности, $\mu(u_i) = u_{1-i}$, и для любого p_i из $\bar{p}$ выполняется $\mu(p_i) = p_i$. Очевидно, μ продолжается до автоморфизма $\mathbb{A}$. Тогда $\mathbb{A} \models R'(u_0, \{u_0,u_1\},\bar{t}) \leftrightarrow R'(u_1,\{u_0,u_1\},\bar{t})$; противоречие. $\square$

Предложение 2.4. *Существует теория с определимыми скулемовскими функциями такая, что в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — ее счетно-насыщенная модель, не выполняется принцип униформизации.*

Доказательство. Докажем, что теория следования $T \leftrightharpoons \mathrm{Th}(\langle \omega, 0, s^1\rangle)$ является искомой. Отсутствие униформизации на указанных надстройках следует из того, что это несчетно категоричная теория, и из предложения 2.3. Теория T сильно минимальна, в ней определимы лишь конечные и коконечные множества. Докажем существование в ней определимых скулемовских функций, используя эту идею. Пусть $\varphi(x,\bar{y})$ — формула сигнатуры $\{0, s^1\}$. Построим формулу $\psi(x,\bar{y})$ такую, что $T \vdash \forall \bar{y}(\exists x \varphi(x,\bar{y}) \to \exists! x \psi(x,\bar{y}))$ и $T \vdash \forall x \forall \bar{y}(\psi(x,\bar{y}) \to \varphi(x,\bar{y}))$. Известно, что рассматриваемая теория подмодельно полна, поэтому считаем, что $\varphi(x,\bar{y})$ бескванторная и записана в дизъюнктивной нормальной форме с тесными отрицаниями: $\varphi(x,\bar{y}) = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y})$, где $\varphi_i(x,\bar{y})$ — элементарная конъюнкция. Для каждой φ_i строим ψ_i следующим образом. Пусть

$$\varphi_i(x,\bar{y}) = \bigwedge_{j=1}^{J_i} \big(T_j^1(x) \approx T_j^2(0,\bar{y})\big) \wedge \bigwedge_{k=1}^{K_i} \neg\big(T_k^3(x) \approx T_k^4(0,\bar{y})\big) \wedge \varphi_i^1(\bar{y}).$$

Здесь T_m^l — термы данной сигнатуры. Если $J_i > 0$, то полагаем $\psi_i(x,\bar{y}) \leftrightharpoons \varphi_i(x,\bar{y})$ (наличие хотя бы одного равенства обеспечивает единственность x, удовлетворяющего данной элементарной конъюнкции при его существовании). Если же $J_i = 0$, то множество, определяемое φ_i, коконечно и его одноэлементное подмножество определяется следующей формулой:

$$\psi_i(x,\bar{y}) \leftrightharpoons \bigvee_{m=0}^{K_i}\Bigg[\neg\exists z \bigvee_{l=0}^{m-1}\Bigg((z \approx s^l(0)) \wedge \bigwedge_{k=1}^{K_i} \neg\big(T_k^3(z) \approx T_k^4(0,\bar{y})\big) \wedge \varphi_i^1(\bar{y})\Bigg) \wedge (x \approx s^m(0)) \wedge \bigwedge_{k=1}^{K_i} \neg\big(T_k^3(x) \approx T_k^4(0,\bar{y})\big) \wedge \varphi_i^1(\bar{y})\Bigg].$$

Положим $\psi(x,\bar{y}) \leftrightharpoons \bigvee\limits_{i=1}^{n}\Bigg(\neg\exists z\Bigg(\bigvee\limits_{l=1}^{i-1}\psi_l(z,\bar{y})\Bigg) \wedge \psi_i(x,\bar{y})\Bigg)$. Из построения следует, что ψ обладает необходимыми свойствами. Стало быть, в теории T есть определимые скулемовские функции. $\square$

Предложение 2.5. *Пусть $\mathfrak{R}'$ — рекурсивно насыщенная модель теории вещественных чисел* $(\mathrm{Th}(\langle R, 0, 1, +^2, \cdot^2, <^2\rangle))$. *Тогда на* $\mathbb{HYP}(\mathfrak{R}')$ *выполняется принцип униформизации.*

Доказательство. Проверяем условие 3 теоремы 2.1. Пусть дано множество $A(\bar{p}) \in \mathbb{HYP}(\mathfrak{R}')$ с необходимыми свойствами. Не ограничивая общности, считаем, что оно состоит из одного шаблона, $A(\bar{p}) = \{a(\bar{r}) \mid \chi_1(\bar{r}, \bar{p})\}$, где $a(\bar{r}) = \{x \mid \chi_2(x, \bar{r})\}$. Рассмотрим формулу $\varphi(x, \bar{r}, \bar{p}) \leftrightharpoons \chi_1(\bar{r}, \bar{p}) \wedge \chi_2(x, \bar{r})$. Для произвольной формулы $\psi(x, \bar{y})$ рассматриваемой сигнатуры введем формулы, определяющие на $\mathfrak{R}'$ точную нижнюю грань и точную верхнюю грань множества $\psi(\mathfrak{R}', \bar{y})$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Inf}^{\psi}(x, \bar{y}) \leftrightharpoons{} & \forall y((y < x) \to \neg\psi(y, \bar{y})) \\ & \wedge \forall z[\forall y((y < z) \to \neg\psi(y, \bar{y})) \to ((z < x) \vee (z \approx x))],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Sup}^{\psi}(x, \bar{y}) \leftrightharpoons{} & \forall y((x < y) \to \neg\psi(y, \bar{y})) \\ & \wedge \forall z[\forall y((z < y) \to \neg\psi(y, \bar{y})) \to ((x < z) \vee (z \approx x))].\end{aligned}$$

Рассмотрим формулы

$$\psi(z, y, \bar{r}, \bar{p}) \leftrightharpoons (y < z) \wedge \forall t[((y < t) \wedge (t < z)) \to \varphi(t, \bar{r}, \bar{p})]$$

и

$$\begin{aligned}\chi(x, \bar{r}, \bar{p}) \leftrightharpoons{} & \exists y[\mathrm{Inf}^{\varphi}(y, \bar{r}, \bar{p}) \wedge \varphi(y, \bar{r}, \bar{p}) \wedge (x \approx y)] \\ & \vee \exists y[\mathrm{Inf}^{\varphi}(y, \bar{r}, \bar{p}) \wedge \neg\varphi(y, \bar{r}, \bar{p}) \wedge \exists z(\mathrm{Sup}^{\psi}(z, y, \bar{r}, \bar{p}) \wedge (x + x \approx y + z))] \\ & \vee \exists y[\mathrm{Inf}^{\varphi}(y, \bar{r}, \bar{p}) \wedge \neg\varphi(y, \bar{r}, \bar{p}) \wedge \neg\exists z\, \mathrm{Sup}^{\psi}(z, y, \bar{r}, \bar{p}) \wedge (x \approx y + 1)] \\ & \vee (\neg\exists y\, \mathrm{Inf}^{\varphi}(y, \bar{r}, \bar{p}) \wedge \exists z(\mathrm{Sup}^{\forall t(t<z \to \varphi(t, \bar{r}, \bar{p}))}(z, \bar{r}, \bar{p}) \\ & \wedge (x + 1 \approx z))) \vee (\neg\exists y\, \mathrm{Inf}^{\varphi}(y, \bar{r}, \bar{p}) \wedge \neg\exists z\, \mathrm{Sup}^{\forall t(t<z \to \varphi(t, \bar{r}, \bar{p}))}(z, \bar{r}, \bar{p}) \wedge (x \approx 0)).\end{aligned}$$

Известно, что в рассматриваемой теории определимыми множествами являются лишь конечные объединения интервалов, следовательно, формула χ определяет одну специальным образом выбранную точку самого левого (наименьшего по отношению порядка $<^2$) интервала множества $\{x \mid \varphi(x, \bar{r}, \bar{p})\}$. Получим, что $f(\bar{p}) \leftrightharpoons \{\langle a(\bar{r}), x\rangle \mid \chi(x, \bar{r}, \bar{p})\}$ — искомая Σ-функция из $A(\bar{p})$ в R'. $\square$

Предложение 2.6. *Пусть T — полная теория, в которой любая модель имеет Σ-определимые скулемовские функции. Тогда существует несущественное расширение T' этой теории, в котором есть определимые скулемовские функции.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная модель данной теории. На $\mathfrak{M}$ есть Σ-определимые скулемовские функции, т. е. существует $\bar{c} \in M^n$ такой, что для любой $\varphi(x, \bar{y})$ существует Σ-формула $\psi(x, \bar{y}, \bar{c})$ такая, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \exists x\varphi \to \exists! x(\varphi \wedge \psi)$. Докажем, что $T' \leftrightharpoons \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{c})$ — искомое несущественное обогащение. Пусть дана $\varphi(x, \bar{y})$ и для нее нашлась Σ-формула $\psi(x, \bar{y}, \bar{c})$, определяющая в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ скулемовскую функцию. По предложению 3.10 из [1] о представлении Σ-формул от праэлементов в $\mathbb{HF}$ получаем

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \psi(x, \bar{y}, \bar{c}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \bigvee_{i \in A} \psi_i(x, \bar{y}, \bar{c})$$

для некоторого вычислимого множества A. Имеем $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi \leftrightarrow \bigvee\limits_{i\in A} \exists x(\varphi \wedge \psi_i)$, по лемме 1.7 найдется конечное $B \subset A$ такое, что $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi \leftrightarrow \bigvee\limits_{i\in B} \exists x(\varphi \wedge \psi_i)$. Очевидно, что $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi \to \exists! x\big(\varphi \wedge \bigvee\limits_{i\in B} \psi_i\big)$. Тогда $T' \vdash \exists x\varphi \to \exists! x\big(\varphi \wedge \bigvee\limits_{i\in B} \psi_i\big)$ (если это не так, то это свойство не выполняется на $\mathfrak{M}$; противоречие). Стало быть, $\bigvee\limits_{i\in B} \psi_i$ определяет в T' скулемовскую функцию для φ. $\square$

Предложение 2.7. *Существует модель, в которой есть Σ-определимые скулемовские функции, но ее теория регулярна и в любом ее расширении конечным числом констант нет определимых скулемовских функций.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} \leftrightharpoons \langle \omega, \{0, s^2, P^2, Q^1\}\rangle$, где s^2 — предикатный символ следования, $(\mathfrak{M} \models P(x,y)) \leftrightharpoons (x \neq 0) \wedge ((y = (2x)^2) \vee (y = (2x+1)^2))$, $(\mathfrak{M} \models Q(x)) \leftrightharpoons (x = 1) \vee (x$ — не полный квадрат). Докажем, что $\mathfrak{M}$ искомая.

Рассмотрим следующий смешанный граф с пометками $\Gamma_{\mathfrak{M}}$. Множеством вершин $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ является ω. Его ребра трех видов (ориентированные S-ребра и P-ребра и неориентированные $\approx$-ребра, в данном случае петли), и пометки на вершинах (Q, $\neg Q$) строятся соответственно отношениям на $\mathfrak{M}$.

Для данной элементарной конъюнкции $\chi(\bar{x})$ формул вида $s(\cdot,\cdot)$, $P(\cdot,\cdot)$, $\cdot \approx \cdot$, $Q(\cdot)$, $\neg Q(\cdot)$ строим граф Γ_χ. Множеством его вершин будет $\bar{x}$. В нем ребра и пометки на вершинах таких же видов, как и в $\Gamma_{\mathfrak{M}}$, но строятся соответственно вхождениям формул в χ (предполагается, что формулы $Q(x)$ и $\neg Q(x)$ не входят в χ одновременно).

Пусть $T \leftrightharpoons \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$.

1. Регулярность T. Докажем модельную полноту T. Используем известный критерий: по произвольной $\forall$-формуле эффективно строим $\exists$-формулу (замечание 3.5.1 из [2]). В дальнейшем в доказательстве этого предложения считаем, что формулы содержат в качестве атомарных подформул только $x \approx y$, $s(x,y)$, $P(x,y)$, $Q(x)$ (где x и y — переменные), очевидно, остальные формулы приводятся в этот вид (формулу $\varphi(\bar{x},0)$ заменяем на $\exists y(y \approx 0 \wedge \varphi(\bar{x},y))$ и работаем с формулой $\varphi(\bar{x},y)$).

Пусть $\varphi(\bar{x}) = \forall\bar{y}\psi(\bar{x},\bar{y})$, где ψ — конъюнкция элементарных дизъюнкций таких, что в каждой из них любая атомарная формула от переменных $\bar{x},\bar{y}$ входит сама или с отрицанием (аналог СКНФ в логике высказываний). Очевидно, достаточно найти $\exists$-формулу, эквивалентную $\forall\bar{y}\psi'(\bar{x},\bar{y})$, где ψ' — элементарная дизъюнкция из ψ. Ведем индукцию по длине кортежа $\bar{y}$. База индукции, когда формула бескванторная, очевидна. В индукционном переходе считаем, что все формулы с меньшим числом кванторов «$\forall$» умеем сводить к $\exists$-формулам. Преобразуем формулу ψ' в формулу вида $\chi(\bar{x},\bar{y}) \to \xi(\bar{x},\bar{y})$, где χ — конъюнкция формул вида $P(\cdot,\cdot)$,$\cdot \approx \cdot$, $s(\cdot,\cdot)$, $Q(\cdot)$, $\neg Q(\cdot)$, а ξ — дизъюнкция формул вида $P(\cdot,\cdot)$, $\cdot \approx \cdot$, $s(\cdot,\cdot)$.

Строим Γ_χ — граф конъюнкции $\chi(\bar{x},\bar{y})$, разбиваем его на компоненты связности. Пусть им соответствуют подформулы $\chi_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$. Представляем соответственно формулу ξ в виде $\bigvee\limits_{1\le i\le j\le n} \xi_{ij}(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{x}_j,\bar{y}_j)$ (в частности, в ξ_{ii} содержатся все атомарные подформулы из ξ от переменных $\bar{x}_i,\bar{y}_i$). Итак, получили

$$T \vdash \left(\forall\bar{y}\psi' \leftrightarrow \forall\bar{y}\left(\bigwedge_{i=1}^{n}(\chi_i \wedge \neg\xi_{ii}) \to \bigvee_{1\le i<j\le n} \xi_{ij}\right)\right).$$

Рассмотрим первое i такое, что $\bar{y}_i$ непусто. Исследуем формулу $\chi_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \wedge \neg\xi_{ii}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ по пунктам. Ключевым словом СТОП обозначаем завершение работы алгоритма, в противном случае переходим к следующему пункту.

1. Считаем, что в χ_i нет подформул вида $\cdot \approx \cdot$, так как наличие такой формулы позволяет элиминировать одну связанную переменную (и использовать предположение индукции), либо ее можно вынести за кванторы $\forall$ (в случае, когда в нее входят лишь переменные из $\bar{x}_i$).

2. Проверяем: вершины Γ_{χ_i} разбиваются на компоненты связности только по S-ребрам, имеющие вид цепей, т. е. S-ребра не зацикливаются и из каждой вершины выходит не более одного S-ребра и входит не более одного S-ребра. Если эти условия не выполняются, то, вспомнив, что формула $\neg\xi_{ii}$ утверждает попарную различность переменных, получаем тождественную ложность формулы $\chi_i \wedge \neg\xi_{ii}$ и соответственно тождественную истинность формулы $\forall\bar{y}\psi'$ (СТОП).

3. Проверяем, что в графе Γ_{χ_i} у вершины, в которую входит P-ребро, стоит метка $\neg Q$, в каждую вершину входит не более одного P-ребра и из каждой вершины выходит не более двух P-ребер. Если эти условия не выполняются, то формула $\chi_i \wedge \neg\xi_{ii}$ тождественно ложна (СТОП).

4. Если в какой-то цепи по s более одной вершины с пометкой $\neg Q$, то ограничиваем один из элементов этой цепи сверху константой. Пусть $\neg Q$ — метки у вершин z_1 и z_2, где $z_2 - z_1 = l$. Тогда, очевидно, $z_2 \leq (l+1)^2/4$. Теперь ограничим сверху переменную y_k из $\bar{y}_i$, построив путь по S- и P-ребрам (независимо от их ориентации) от z_2 до y_k, получим $j_k \leq a$ и переходим к п. 8.

5. Проверим, можно ли частично упорядочить (строго) S-цепи по следующему правилу: первая цепь меньше второй, если из первой есть путь во вторую по P-ребрам (с учетом ориентации). Если этого сделать нельзя (есть цикл, в частности, петля), то ограничиваем переменную z в одной из цепей цикла сверху константой, решив неравенство $(2z-2n)^2 - n \leq z$, где n — наибольшая длина S-цепи. Если означивание z не удовлетворяет этому неравенству, то такое означивание обратит $\chi_i \wedge \neg\xi_{ii}$ в ложь. Далее, по аналогии с п. 4 ограничиваем сверху y_k из $\bar{y}_i$, получим $j_k \leq a$ и переходим к п. 8.

6. Если $\bar{x}_i$ непусто, то Γ_{χ_i} содержит P- или S-ребро между некоторыми y_k из $\bar{y}_i$ и x_l из $\bar{x}_i$. Если y_k может принимать ровно одно значение, то заменяем $\forall\bar{y}\psi'(\bar{x},\bar{y})$ на $\exists y_k \forall\bar{y}'\psi'(\bar{x},\bar{y})$. Если y_k может принимать два значения ($P(x_l, y_k)$ — подформула χ_i), то заменяем $\forall\bar{y}\psi'(\bar{x},\bar{y})$ на

$$\exists y_{k1} \exists y_{k2} \big(P(x_l, y_{k1}) \wedge P(x_l, y_{k2}) \wedge (\neg y_{k1} \approx y_{k2}) \wedge \forall\bar{y}'[\psi'(\bar{x},\bar{y})]^{y_k}_{y_{k1}} \wedge \forall\bar{y}'[\psi'(\bar{x},\bar{y})]^{y_k}_{y_{k2}} \big).$$

В обоих случаях $\bar{y}'$ — это $\bar{y}$ без y_k. Далее используем предположение индукции (СТОП).

7. Если дошли до этого пункта, то количество возможных означиваний $\bar{y}_i$, при которых $\mathfrak{M} \models \chi_i(\bar{y}_i) \wedge \neg\xi_{ii}(\bar{y}_i)$, бесконечно. Тогда

$$T \vdash \forall\bar{y}\psi' \leftrightarrow \forall\bar{y}' \Big(\bigwedge_{1 \leq j \leq n, j \neq i} (\chi_j \wedge \neg\xi_{jj}) \to \bigvee_{1 \leq j < k \leq n, j \neq i, k \neq i} \xi_{jk} \Big),$$

где $\bar{y}'$ — это $\bar{y}$ без $\bar{y}_i$. Импликация «$\leftarrow$» очевидна, в обратную сторону доказывается от противного: к каждому контрпримеру означивания $\bar{y}'$ добавляется достаточно большое означивание $\bar{y}_i$, обращающее формулу $\chi_i \wedge \neg\xi_{ii}$ в истину, а $\bigvee_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \xi_{ij}$ — в ложь. Заметим, число кванторов «$\forall$» уменьшилось и применяем предположение индукции (СТОП).

8. Обрабатываем ограничение $y_k \leq a$. В T формула $\forall \bar{y}\psi'(\bar{x})$ эквивалентна следующей:

$$\bigwedge_{l=0}^{a} \exists b_1, \dots, \exists b_l \left(b_1 \approx s(0) \wedge \bigwedge_{i=1}^{l-1} s(b_i, b_{i+1} \wedge \forall \bar{y}'[\psi(\bar{x}, \bar{y})]^{y_k}_{b_l}) \right),$$

где $\bar{y}'$ — $\bar{y}$ без y_k. Число кванторов «$\forall$» уменьшилось, применяем предположение индукции (СТОП).

Теперь покажем разрешимость $\mathfrak{M}$ (и, в частности, разрешимость T). Используя полноту и эффективное получение $\exists$-формулы, эквивалентной данной, одновременно вычисляем истинность на $\mathfrak{M}$ $\exists$-аналогов формул φ и $\neg\varphi$ (очевидно, $\mathfrak{M}$ — вычислимая модель). За конечное время процесс остановится — получим ответ.

2. Наличие Σ-определимых скулемовских функций на $\mathfrak{M}$. Пусть дана формула φ сигнатуры $\{0, s^1, P^2, Q^1\}$. Используя регулярность T, находим эквивалентную ей в T $\exists$-формулу ψ. Так как P и Q являются Δ-предикатами на $\mathbb{HF}(\langle\omega, 0, s\rangle)$ (следует из того, что умножение ординалов есть Σ-функция [1]), можно заменить в ψ все их положительные и отрицательные вхождения соответствующими Σ-формулами; получим Σ-формулу Φ. Далее, использовав униформизацию на $\mathbb{HF}(\langle\omega, 0, s\rangle)$, легко получаем искомую Σ-формулу, определяющую скулемовскую функцию для φ в $\mathbb{HF}(\langle\omega, 0, s\rangle)$, а следовательно, и в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

3. Отсутствие определимых скулемовских функций на $\mathfrak{M}$. На множестве вершин графа $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ зададим естественную метрику: расстояние между двумя вершинами считаем равным количеству ребер в кратчайшем пути из P- и S-ребер между ними (независимо от ориентации). Введем в рассмотрение для натурального числа n и множества вершин $\bar{u}$ шар $B(n, \bar{u})$, состоящий из всех вершин v таких, что существует u_i из $\bar{u}$ такое, что v достижимо из u_i за $\leq n$ шагов.

Докажем, что для формулы $\varphi(x, y) = P(y, x)$ не существует определимой скулемовской функции. Пусть формула $\psi(x, y, \bar{c})$ определяет искомую скулемовскую функцию. Считаем, что ψ — $\exists$-формула (использовали регулярность T), которая находится в пренексной нормальной форме, причем не содержит атомарных подформул вида $\neg P(\cdot, \cdot)$ и $\neg s(\cdot, \cdot)$. Этого всегда можно добиться, так как

$$T \vdash \neg P(x, y) \leftrightarrow \exists z_1 \exists z_2 (P(x, z_1) \wedge P(x, z_2) \wedge (\neg z_1 \approx z_2) \wedge (\neg y \approx z_1) \wedge (\neg y \approx z_2))$$

и

$$T \vdash \neg s(x, y) \leftrightarrow \exists z (s(x, z) \wedge (\neg y \approx z)).$$

Пусть

$$\psi(x, y, \bar{c}) = \exists \bar{z} \bigvee_{i=1}^{n} \psi_i(x, y, \bar{z}, \bar{c})$$

содержит не более m различных атомарных подформул вида $P(t_1, t_2)$, $s(t_1, t_2)$. Положим $m_0 \leftrightharpoons \max(m, \bar{c}) + 1$. Покажем, что $\mathfrak{M} \models \psi((2m_0)^2, m_0, \bar{c}) \leftrightarrow \psi((2m_0 + 1)^2, m_0, \bar{c})$. Это противоречит тому, что ψ определяет скулемовскую функцию для φ. Достаточно доказать, что для каждой из элементарных конъюнкций ψ_i выполнено $\mathfrak{M} \models \exists \bar{z} \psi_i((2m_0)^2, m_0, \bar{z}, \bar{c}) \leftrightarrow \exists \bar{z} \psi_i((2m_0 + 1)^2, m_0, \bar{z}, \bar{c})$. Разобьем $\psi_i = \chi_i \wedge \theta_i$, где θ_i — в точности конъюнкция всех подформул ψ_i вида $\neg \cdot \approx \cdot$, а χ_i таких не содержит. Докажем, что если на $\mathfrak{M}$ истинна формула

$\exists\bar{z}\psi_i((2m_0)^2, m_0, \bar{z}, \bar{c})$, то истинна и формула $\exists\bar{z}\psi_i((2m_0+1)^2, m_0, \bar{z}, \bar{c})$. Обратное доказывается симметрично.

Введем в рассмотрение «полушары» $\overline{B}(n,(2m_0)^2)$ и $\overline{B}(n,(2m_0+1)^2)$, которые состоят в точности из всех вершин v таких, что существует путь (по P- и S-ребрам) из v до центра длины, не пересекающий ребро $P(m_0,(2m_0)^2)$ (соответственно $P(m_0,(2m_0+1)^2)$). Эти полушары не пересекаются между собой и с полушаром $\overline{B}(n,\langle\bar{c},m_0\rangle)$, что существенно для последующих рассуждений (последний полушар состоит из вершин, достижимых за $\leq n$ шагов из $\langle\bar{c},m_0\rangle$ без проходов по обоим вышеуказанным ребрам). Очевидно, между $\overline{B}(n,(2m_0)^2)$ и $\overline{B}(n,(2m_0+1)^2)$ существует изоморфизм ν (смешанных графов с помеченными вершинами), продолжающийся до изоморфизма соответствующих шаров. Введем следующий автоморфизм μ шара $B(n,\langle m_0,(2m_0)^2,(2m_0+1)^2,\bar{c}\rangle)$:

$$\mu(x) = \begin{cases} \nu(x), & \text{если } x \in \overline{B}(n,(2m_0)^2), \\ \nu^{-1}(x), & \text{если } x \in \overline{B}(n,(2m_0+1)^2), \\ x, & \text{если } x \in \overline{B}(n,\langle\bar{c},m_0\rangle). \end{cases}$$

Кроме того, введем в рассмотрение граф Γ_{χ_i}. Обозначаем через $[\bar{v}]$ множество вершин, достижимых в Γ_{χ_i} из вершин $\bar{v}$.

Пусть $\mathfrak{M} \models \psi_i(\gamma(x),\gamma(y),\gamma(\bar{z}),\gamma(\bar{c}))$ для некоторого означивания γ ($\gamma(x) = (2m_0)^2, \gamma(y) = m_0, \gamma(\bar{c}) = \bar{c}$). Построим означивание γ' такое, что $\mathfrak{M} \models \psi_i(\gamma'(x), \gamma'(y),\gamma'(\bar{z}),\gamma'(\bar{c}))$ и $\gamma'(x) = (2m_0+1)^2, \gamma'(y) = m_0, \gamma'(\bar{c}) = \bar{c}$.

Шаг 0. Положим $\gamma_0 \leftrightharpoons \varnothing$, $E_0 \leftrightharpoons \varnothing$.

Шаг k. Положим $\delta\gamma_k \leftrightharpoons \delta\gamma_{k-1} \cup [E_{k-1}, y, x, \bar{c}]$ (δ здесь и в дальнейшем — область определения), $\gamma_k(v) \leftrightharpoons \mu(\gamma(v))$. Рассмотрим означивание

$$\gamma'_k(v) \leftrightharpoons \begin{cases} \gamma_k(v), & \text{если } v \in \delta\gamma_k, \\ \gamma(v) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $E_k \leftrightharpoons \{s \in (\delta\gamma \setminus \delta\gamma_k) \mid$ найдется $v \in \delta\gamma_k$ такое, что $\gamma_k(v) \approx \gamma(s)$, но формула $\neg s \approx v$ лежит в $\theta_i\}$.

Процесс считаем завершенным (а он завершится в силу конечности вершин в Γ_{χ_i}) на шаге $k_f > 0$, если $E_{k_f} = \varnothing$. В этом случае полагаем $\gamma' \leftrightharpoons \gamma'_{k_f}$. Это означивание искомое. Действительно, $\mathfrak{M} \models \chi_i(\gamma'(x,y,\bar{z},\bar{c}))$ из-за того, что $\rho\gamma_k \subseteq B(n,\langle m_0,(2m_0)^2,(2m_0+1)^2,\bar{c}\rangle)$ для каждого k (ρ — область значений, включение верно в силу того, что количество подформул $P(\cdot,\cdot)$ и $s(\cdot,\cdot)$ в χ_i не превосходит n и, следовательно, суммарная «длина» компонент связности в $\delta\gamma_k$ тоже не превосходит n), а μ — автоморфизм этого шара. То, что $\mathfrak{M} \models \theta_i(\gamma'(x,y,\bar{z},\bar{c}))$, следует аналогично из свойств μ и того, что $E_{k_f} = \varnothing$. То, что $\gamma'(x) = (2m_0+1)^2$, вытекает из того, что уже на первом шаге $\gamma_1(x) = \mu((2m_0)^2) = (2m_0+1)^2$. □

Предложение 2.8. *Пусть $\mathfrak{M}$ — счетно-насыщенная модель теории линейного порядка на натуральных числах* ($\mathrm{Th}(\langle\omega,\leq\rangle)$). *Тогда на* $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ *выполняется принцип униформизации, а на* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *— нет.*

Доказательство. Докажем, что для модели $\mathfrak{M}$ выполнено условие 3 теоремы 2.1. Рассмотрим $A(\bar{p}) \subset P(M)$, являющееся элементом $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$. Выберем его представление в виде шаблонного множества с попарно не пересекающимися шаблонами. Теперь достаточно доказать наличие Σ-функции f для случая, когда представление $A(\bar{p})$ состоит из одного шаблона: $A(\bar{p}) = \{a(\bar{u}) \mid \varphi(\bar{u},\bar{p})\}$, где $a(\bar{u}) = \{v \mid \psi(v,\bar{u})\}$. Имеем

$$\langle\omega,\leq\rangle \models \forall\bar{u}(\exists v\psi(v,\bar{u}) \to \exists v_0[\psi(v_0,\bar{u}) \wedge \forall v((\neg v \approx v_0 \wedge v \leq v_0) \to \neg\psi(v,\bar{u}))]).$$

Следовательно, на модели $\mathfrak{M}$ это тоже выполнено. Тогда искомая функция

$$f(\bar{p}) \leftrightharpoons \{\langle a(\bar{u}), v_0\rangle \mid \varphi(\bar{u},\bar{p}) \wedge \psi(v_0,\bar{u}) \wedge \forall v((\neg v \approx v_0 \wedge v \le v_0) \to \neg\psi(v,\bar{u}))\}.$$

По теореме 2.1 на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ выполняется принцип униформизации.

Покажем, что на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ не выполняется принцип униформизации. Известно, что счетно-насыщенная модель данной теории имеет носитель $\omega \oplus \bigoplus\limits_{\eta} Z$, где η — всюду плотный счетный линейный порядок. Пусть U_a — главная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-нумерация всех Σ-предикатов на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Рассмотрим Σ-предикаты $U_{x_0} \leftrightharpoons \{\langle n,m\rangle \mid n < m\}$ и $U_{x_1} \leftrightharpoons \{\langle n,m\rangle \mid \exists x(n < x < m)\}$. Покажем, что $U_{x_0} \setminus U_{x_1}$ не является Σ-предикатом. Пусть, напротив, это отношение определяется Σ-формулой $\Psi_0(x)$ с наибольшим параметром s_0. Строим $h : M \to M$ следующим образом:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \le s_0 + 1; \\ x+1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Хорошо известно [1, 6], что если $\mathfrak{M}_0 \le \mathfrak{M}_1$ и $\Phi(x)$ — Σ-формула сигнатуры $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$, то для любого $a \in HF(M_0)$ из $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \models \Phi(a)$ следует $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1) \models \Phi(a)$. Имеем

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi_0(\langle h(s_0+1), h(s_0+2)\rangle),$$

т. е.

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi_0(\langle s_0+1, s_0+3\rangle);$$

противоречие.

Определим функцию $f(x,y)$ так, что $U_{f(x,y)} = \{\langle n,m\rangle \mid s_1 < n < m\}$, где s_1 — наибольший элемент $sp(\langle x,y\rangle)$. Имеем $U_{x_0} \cap U_{x_1} \cap U_{f(x,y)} \ne \varnothing$ для всех $x, y \in HF(M)$. Пусть y_0, y_1 таковы, что $U_{y_i} \subseteq U_{x_i}$, $U_{y_0} \cap U_{y_1} = \varnothing$ и $U_{y_0} \cup U_{y_1} = U_{x_0} \cup U_{x_1}$. Проверим, что $U_{x_0} \cap U_{y_1} \cap U_{f(y_0,y_1)} = \varnothing$. Пусть $\langle z_0, z_1\rangle \in U_{x_0} \cap U_{y_1} \cap U_{f(y_0,y_1)}$. Имеем $\langle s_1+1, s_1+2\rangle \in U_{x_0} \setminus U_{x_1}$, следовательно $\langle s_1+1, s_1+2\rangle \in U_{y_0}$. Строим $h_1 : M \to M$ следующим образом:

$$h_1(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \le s_1; \\ z_0, & \text{если } x = s_1 + 1; \\ z_1 + k, & \text{если } x = s_1 + 2 + k,\ k \ge 0; \\ x, & \text{если } x > s_1 + n \text{ для всех } n \in \omega. \end{cases}$$

Получаем $\langle z_0, z_1\rangle \in U_{y_0}$ и $\langle z_0, z_1\rangle \in U_{y_0} \cap U_{y_1}$; противоречие. По теореме 2.1 из [8] получаем, что на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ не выполняется принцип редукции, а по теореме 1.1 из [8] — принцип униформизации. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1975.
2. *Stukachev A. I.* Uniformization property in heredidary finite superstructures // Sib. Adv. Math. 1997. V. 7, N 1. P. 123–132.
3. *Стукачев А. И.* Теорема об униформизации в наследственно-конечных надстройках // Обобщенная вычислимость и определимость. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1998. Т. 161.
4. *Ershov Yu. L., Puzarenko V. G., Stukachev A. I.* $\mathbb{HF}$-computability // Computability in context: Computation and logic in the real world / S. B. Cooper and A. Sorbi (eds.). Singapore etc.: Imperial College Press/World Sci., 2011. P. 173–248.
5. *Стукачев А. И.* Σ-допустимые семейства над линейными порядками // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 228–252.

6. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Новосибирск: Научная книга, 2000.

7. *Пузаренко В. Г.* Об одной сводимости на допустимых множествах // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 415–429.

8. *Пузаренко В. Г.* Дескриптивные свойства на допустимых множествах // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 2. С. 238–262.

Статья поступила 27 июня 2010 г., окончательный вариант — 7 июня 2011 г.

Авдеев Роман Русланович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
avdeyev@math.nsc.ru