Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 517.54

ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНЫЙ КРИТЕРИЙ МЁБИУСОВОСТИ ГОМЕОМОРФИЗМА ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

В. В. Асеев, Т. А. Кергилова

Аннотация. Упорядоченная четверка попарно различных точек $T = \{z_1, z_2, z_3, z_4\} \subset \mathbf{C}$ называется *правильной*, если точки z_2 и z_4 лежат по разные стороны от прямой, проведенной через z_1, z_3. Величина $\Phi(T) = \angle z_1 z_2 z_3 + \angle z_1 z_4 z_3$ (углы неориентированные) рассматривается как геометрическая характеристика правильной тетрады. Доказана теорема: *при любом фиксированном $\alpha \in (0, 2\pi)$ мёбиусовость гомеоморфизма $f : D \to D^*$ областей в $\mathbf{C}$ эквивалентна тому, что для любой правильной тетрады $T \subset D$ с $\Phi(T) = \alpha$, образ которой fT также является правильной тетрадой, выполняется равенство $\Phi(fT) = \alpha$.* Ранее (H. Haruki, Th. Rassias, 1994) этот критерий мёбиусовости был установлен только в классе однолистных аналитических функций $f(z)$.

Ключевые слова: мёбиусово преобразование, геометрический критерий мёбиусовости, локальная выпуклость, точка невыпуклости, точка распрямления.

Введение. В теории функций хорошо известен дифференциальный критерий мёбиусовости отображения, осуществляемого аналитической функцией (см., например, [1, 1.5, с. 10]): функция $f(z)$ в области $D \subset \mathbf{C}$ является дробно-линейной тогда и только тогда, когда во всех тех точках $z \in D$, где $f'(z) \neq 0$, ее производная Шварца равна нулю. Однако во многих ситуациях более удобны для использования геометрические критерии мёбиусовости такие, как

Теорема Каратеодори [2, теорема 2, замечание к ней]. *Инъективное отображение $f : D \to \mathbf{C}$ области $D \subset \mathbf{C}$ является мёбиусовым* (т. е. *ограничением на D мёбиусова автоморфизма расширенной плоскости*) *тогда и только тогда, когда для любой точки $z \in D$ существует такой открытый круг $U \subset D$ с центром в z, что образ $f(\Sigma)$ каждой окружности $\Sigma \subset U$ является окружностью.*

Замечательно то, что при этом от отображения f не требуется даже непрерывности. Полный аналог теоремы Каратеодори установлен в [3, теорема 2.1] для инъективных отображений областей в $\mathbb{R}^n$ с заменой окружностей гиперсферами. В классе непрерывных отображений (но без требования инъективности) областей в $\mathbb{R}^n$ геометрический критерий мёбиусовости (подмножества гиперсфер переходят в подмножества гиперсфер и образ всей области не содержится в гиперсфере) был получен в [4, теорема 8].

К элементарным признакам мёбиусовости в классе инъективных отображений на плоскости относится инвариантность ангармонического отношения $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$ четверок попарно различных точек (тетрады): инъективное

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–90714–моб_ст).

отображение $f : D \to \mathbf{C}$ области $D \subset \mathbf{C}$ является дробно-линейным тогда и только тогда, когда для любой тетрады $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \subset D$ выполняется равенство $[f(z_1) : f(z_2) : f(z_3) : f(z_4)] = [z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$. В классе гомеоморфизмов областей в $\mathbb{R}^n$ критерием мёбиусовости отображения служит инвариантность абсолютного двойного отношения тетрады

$$|x_1 : x_2 : x_3 : x_4| = \frac{|x_1 - x_3| \cdot |x_2 - x_4|}{|x_3 - x_2| \cdot |x_4 - x_1|}$$

(см., например, [5, теорема 3.2.7]).

На основе этих классических признаков мёбиусовости сложилось современное направление, называемое *характеризацией геометрических преобразований при минимальных предположениях* [6], включающее также изучение минимальных признаков изометричности [7–10] и аффинности [11–13]. К исследованию минимальных признаков мёбиусовости естественно примыкает описание минимальных геометрических критериев гиперболических изометрий (см., например, [14] — сохранение четырехсторонников Ламберта, [15] — сохранение треугольных областей и др.)

Геометрические критерии мёбиусовости в классе аналитических функций указаны в [16–19] (см. также [20]); их доказательство сводилось к проверке дифференциального критерия мёбиусовости. Критерий мёбиусовости, полученный в [18] для мероморфных функций, переформулирован в работе [21] как инвариантность абсолютного двойного отношения с фиксированным значением, равным 1, там же доказано [21, теорема 5.2], что это свойство дает признак мёбиусовости в классе инъективных отображений областей в $\overline{\mathbb{R}}^n$ (без условия непрерывности). Критерий мёбиусовости, указанный в [17], переформулирован в работе [22] как инвариантность ангармонического отношения с фиксированным значением $(1 + i\sqrt{3})/2$ и усилен следующим образом: для гомеоморфизмов класса C^1 плоских областей мёбиусовость равносильна инвариантности ангармонического отношения с фиксированным невещественным значением α. В статье авторов [23] такой же критерий получен для любого фиксированного $\alpha \neq \infty, 0, 1$ в классе непрерывных отображений (без требований дифференцируемости и инъективности). Условие непрерывности, однако, отбросить нельзя: есть пример (см. [21, замечание после теоремы 1.1]) инъективного отображения, сохраняющего ангармоническое отношение с фиксированным значением -1, которое не является непрерывным.

В данной статье мы распространяем на класс гомеоморфизмов геометрический признак мёбиусовости, полученный в [16] (только для аналитических функций) в терминах сохранения фиксированного значения $\alpha \in (0, 2\pi)$ суммы (неориентированных) углов в противоположных вершинах z_2, z_4 правильного четырехугольника $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ (т. е. такого, у которого прямая, проходящая через две другие вершины z_1, z_3, разделяет точки z_2, z_4). При этом условие проверяется только для тех правильных четырехугольников, «образы» которых $\{f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)\}$ также образуют правильный четырехугольник. Мы доказываем, что в классе гомеоморфизмов $f : D \to D^*$ областей $D, D^* \subset \mathbf{C}$ при любом фиксированном $\alpha \in (0, 2\pi)$ выполнение этого условия равносильно мёбиусовости отображения (без предварительного требования его дифференцируемости).

Обозначения и терминология. В тексте используются следующие термины и обозначения: $\mathbf{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация, для пары различных точек $a_1, a_2 \in \mathbf{C}$ символ $\Lambda\{a_1, a_2\}$

означает прямую, проведенную через точки a_1 и a_2, символ $\lambda[a_1,a_2]$ — прямолинейный отрезок с концами a_1 и a_2, $\lambda(a_1,a_2):=\lambda[a_1,a_2]\setminus\{a_1,a_2\}$ — открытый прямолинейный отрезок с концами a_1 и a_2. Если L — прямая на плоскости, то связные компоненты множества $\mathbf{C}\setminus L$ обозначаются символами L^+ и L^- (с необходимым уточнением, какая из них обозначена через L^+) и называются *открытыми полуплоскостями.* Прямая L *разделяет* точки b_1 и b_2, если они лежат в разных открытых полуплоскостях L^+ и L^-.

Евклидово расстояние между точками $a,b\in\mathbf{C}$ обозначается через $|a-b|$, замыкание множества $A\subset\mathbf{C}$ в топологии плоскости $\mathbf{C}$ — через $\overline{A}$ или $\mathrm{Cls}(A)$, расстояние от точки $a\in\mathbf{C}$ до множества $A\subset\mathbf{C}$ есть величина

$$\mathrm{dist}(a,A):=\inf\{|z-a|:z\in A\},$$

символом ∂A обозначается граница множества $A\subset\mathbf{C}$, открытый круг с центром в точке $a\in\mathbf{C}$ и радиусом $R>0$ — через $B(a,R)$. *Диаметром* непустого ограниченного множества $A\subset\mathbf{C}$ называем величину $\operatorname{diam}A:=\sup\{|a-b|: a\in A,\ b\in A\}$. Все необходимые сведения о сходимости замкнутых множеств и топологических пределах в метрических пространствах можно найти в [24, § 29].

Упорядоченная четверка попарно различных точек $\{z_1,z_2,z_3,z_4\}\subset\mathbf{C}$ называется *тетрадой.* Эта тетрада называется *правильной*, если прямая $L:=\Lambda\{z_1,z_3\}$ разделяет точки z_2 и z_4. Множество всех правильных тетрад в $\mathbf{C}$ обозначим символом $\mathscr{T}$. Если точки a_1,a_2,a_3 служат вершинами невырожденного треугольника $\triangle a_1a_2a_3$, то $\angle a_1a_2a_3$ означает абсолютную величину угла при вершине a_2 (т. е. мы считаем, что $\angle a_1a_2a_3=\angle a_3a_2a_1\in(0,\pi)$). *Угловая характеристика* $\Phi(T)\in(0,2\pi)$ вводится только для правильных тетрад $T=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}\in\mathscr{T}$ и определяется равенством $\Phi(T)=\angle z_1z_2z_3+\angle z_1z_4z_3$.

Определение (см. также [16, с. 321]). Пусть задано $\alpha\in(0,2\pi)$. Гомеоморфизм $f:D\to D^*$ областей в $\mathbf{C}$ *удовлетворяет условию* $\mathscr{P}(\alpha)$, если для любой правильной тетрады $T\subset D$ такой, что $\Phi(T)=\alpha$ и $f(T)\in\mathscr{T}$, выполняется равенство $\Phi(f(T))=\alpha$. Гомеоморфизм $f:G\to G^*$ областей в $\overline{\mathbf{C}}$ *удовлетворяет локальному условию* $\mathscr{P}(\alpha)$, если для любой точки $z\in G\setminus\{\infty,f^{-1}(\infty)\}$ имеется такая открытая связная окрестность $U(z)\subset G\setminus\{\infty,f^{-1}(\infty)\}$, что ограничение гомеоморфизма f на $U(z)$ удовлетворяет условию $\mathscr{P}(\alpha)$.

Основной результат. Мы показываем, что критерий мёбиусовости, установленный в [16] для отображений, осуществляемых однолистными аналитическими функциями, сохраняет силу в классе гомеоморфизмов.

Теорема. *Пусть фиксировано $\alpha\in(0,2\pi)$. Гомеоморфизм $f:D\to D^*$ областей в $\overline{\mathbf{C}}$ является мёбиусовым тогда и только тогда, когда он удовлетворяет локальному условию $\mathscr{P}(\alpha)$.*

Вспомогательные леммы. Под *дугой* всюду в тексте понимается *жорданова дуга*, т. е. гомеоморфный образ прямолинейного отрезка, дуга γ с концами a_1,a_2 также обозначается символом $\gamma[a_1,a_2]$, открытая дуга — это дуга за вычетом ее концов, т. е. $\gamma(a_1,a_2):=\gamma[a_1,a_2]\setminus\{a_1,a_2\}$. Дугу, лежащую на окружности, называем *круговой дугой.* Две дуги $\gamma=\gamma[a_1,a_2]$ и $\tau=\tau[a_1,a_2]$ с общими концами *разделены* прямой $L:=\Lambda\{a_1,a_2\}$, если открытые дуги $\gamma(a_1,a_2)\subset\gamma$ и $\tau(a_1,a_2)\subset\tau$ лежат в разных полуплоскостях L^+ и L^-. На круговой дуге $\gamma=\gamma[a_1,a_2]$ для любой точки $a\in\gamma(z_1,z_2)$ величина угла $\angle a_1aa_2$ не зависит от выбора точки a, обозначается символом $\theta(\gamma)$ и называется *углом, вписанным* в круговую дугу γ.

Если жорданова дуга $\gamma = \gamma[a_1, a_2]$ не пересекается с открытым отрезком $\lambda(a_1, a_2)$ (*хордой* этой дуги), то область, ограниченную дугой γ и ее хордой $\lambda(a_1, a_2)$, называем (*жордановым*) *сегментом* дуги γ и обозначаем символом $\mathrm{segm}(\gamma)$. В случае круговой дуги γ ее сегмент $\mathrm{segm}(\gamma)$ называем *круговым сегментом.*

Лемма 1. *Пусть гомеоморфизм $f : D \to D^*$ областей в $\mathbf{C}$ удовлетворяет условию $\mathscr{P}(\alpha)$ с $\alpha \in (0, 2\pi)$. Если для круговой дуги $\gamma = \gamma[z_1, z_3] \subset D$ имеется правильная тетрада $T = \{z_1, z_2, z_3, z_4\} \in \mathscr{T}$ с точками $z_2 \in \gamma$ и $z_4 \in D$, у которой $\Phi(T) = \alpha$ и $f(T) \in \mathscr{T}$, то $f(\gamma)$ — круговая дуга.*

Доказательство. Так как $f(T) \in \mathscr{T}$, то $f(z_2) \notin \Lambda\{f(z_1), f(z_3)\}$, поэтому существует единственная круговая дуга $C = C[f(z_1), f(z_3)]$, проходящая через $f(z_2)$. Прямая $P_0 := \Lambda\{f(z_1), f(z_3)\}$ разделяет точки $f(z_2)$ и $f(z_4)$, т. е. $f(z_2) \in P^+$ и $f(z_4) \in P^-$. Тогда $C(f(z_1), f(z_3)) \subset P^+$. На открытой круговой дуге $\gamma(z_1, z_3)$ множество M всех тех $z \in \gamma(z_1, z_3)$, для которых $f(z) \in C$, содержит точку z_2, поэтому непусто. Если $z_0 \in M$, то $f(z) \in C(f(z_1), f(z_3))$ и, следовательно, $f(z_0) \in P^+$. В силу непрерывности f существует такая открытая поддуга $\gamma' := \gamma(t_1, t_2) \subset \gamma(z_1, z_2)$, содержащая z_0, для которой $f(\gamma') \subset P^+$. Это значит, что для любого $t \in \gamma'$ точки $f(t)$ и $f(z_4)$ разделены прямой P_0, так как $f(t) \in P^+$, а $f(z_4) \in P^-$. Следовательно, образ $f(T') = \{f(z_1), f(t), f(z_3), f(z_4)\}$ тетрады $T' := \{z_1, t, z_3, z_4\} \in \mathscr{T}$ является правильной тетрадой. Поскольку $\angle z_1 t z_3 = \theta(\gamma) = \angle z_1 z_2 z_3$, то $\Phi(T') = \Phi(T) = \alpha$, и выполнение условия $\mathscr{P}(\alpha)$ дает равенство $\angle f(z_1) f(t) f(z_3) = \Phi(f(T')) - \angle f(z_1) f(z_4) f(z_3) = \alpha - \angle f(z_1) f(z_4) f(z_3) = \Phi(f(T)) - \angle f(z_1) f(z_4) f(z_3) = \angle f(z_1) f(z_2) f(z_3) = \theta(C)$. Следовательно, $\angle f(z_1) f(t) f(z_2)$ является углом, вписанным в круговую дугу C, и это означает, что $f(t) \in C(f(z_1), f(z_2))$, т. е. $t \in M$. Таким образом, у любой точки $z_0 \in M$ имеется открытая (в индуцированной из $\mathbf{C}$ топологии на $\gamma(z_1, z_2)$) окрестность γ', содержащаяся в $\gamma(z_1, z_3)$, т. е. множество M открыто в топологии на $\gamma(z_1, z_3)$. Так как $M = f^{-1}(C) \cap \gamma(z_1, z_3)$ (прообраз замкнутого множества), множество M является замкнутым в топологии $\gamma(z_1, z_3)$. В силу связности $\gamma(z_1, z_3)$ непустое открыто-замкнутое множество M совпадает с $\gamma(z_1, z_3)$. Поэтому $f(z) \in C$ для всех $z \in \gamma$, т. е. $f(\gamma) \subset C$. Так как концы дуги $f(\gamma)$ совпадают с концами круговой дуги C, то $f(\gamma) = C$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть $\varphi_0 \in (0, \pi)$. Тогда для любой точки z_0 в области $D \subset \mathbf{C}$ открытый круг $B(z_0, r(z_0, \varphi_0))$ с радиусом*

$$r(z_0, \varphi_0) := \frac{\mathrm{dist}(z_0, \partial D)}{2(1 + 2(\sin \min\{\varphi_0, \pi/2\})^{-1})} \tag{2.1}$$

обладает следующим свойством: любая круговая дуга γ с концами в этом круге и вписанным углом $\theta(\gamma) \geq \varphi_0$ содержится в D вместе с замыканием ее кругового сегмента $\mathrm{segm}(\gamma)$.

Доказательство. Пусть круговая дуга $\gamma = \gamma[a_1, a_2]$ с концами $a_1, a_2 \in B(z_0, r(z_0, \varphi_0))$ имеет вписанный угол $\theta(\gamma) = \beta \geq \varphi_0$. Положим $\widetilde{\varphi} = \min\{\varphi_0, \pi/2\}$. В случае, когда $\beta \in (0, \pi/2]$, круговая дуга γ лежит на окружности радиуса $|a_1 - a_2|/(2\ \sin\beta)$, т. е. $\mathrm{diam}(\gamma) \leq |a_1 - a_2|/\sin\beta$. Так как в этом случае

$\varphi_0 \le \beta \le \pi/2$, то $\widetilde{\varphi} = \varphi_0$, $\sin\beta \ge \sin\varphi_0 = \sin\widetilde{\varphi}$. Следовательно,

$$\operatorname{diam}\gamma \le \frac{|a_1 - a_2|}{\sin\widetilde{\varphi}}. \tag{2.2}$$

В случае, когда $\beta \in (\pi/2, \pi)$, диаметр множества γ равен в точности $|a_1 - a_2|$. Так как $\sin\widetilde{\varphi} \le 1$, и в этом случае выполняется оценка (2.2): $\operatorname{diam}\gamma = |a_1 - a_2| \ge |a_1 - a_2|/(\sin\widetilde{\varphi})$.

Поскольку $|z_0 - a_1| < r(z_0, \varphi_0)$, для любой точки $z \in \operatorname{Cls}(\operatorname{segm}(\gamma))$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |z - z_0| &\le |z - a_1| + |a_1 - z_0| < \frac{|a_1 - a_2|}{\sin\widetilde{\varphi}} + |a_1 - z_0| \\ &\le \frac{|a_1 - z_0| + |a_2 - z_0|}{\sin\widetilde{\varphi}} + |a_1 - z_0| \\ &< \frac{2}{\sin\widetilde{\varphi}} r(z_0, \varphi_0) + r(z_0, \varphi_0) = r(z_0, \varphi_0)\left(\frac{2}{\sin\widetilde{\varphi}} + 1\right) = \frac{\operatorname{dist}(z_0, \partial D)}{2}. \end{aligned}$$

Значит, $z \in B(z_0, \operatorname{dist}(z_0, \partial D)) \subset D$. В силу произвольного выбора точки z из замыкания кругового сегмента $\operatorname{segm}(\gamma)$ получаем требуемое включение $\operatorname{Cls}(\operatorname{segm}(\gamma)) \subset D$.

Лемма 3. *Пусть $\alpha \in (0, \pi]$ и гомеоморфизм $f : D \to D^*$ областей в $\mathbf{C}$ удовлетворяет условию $\mathscr{P}(\alpha)$. Тогда у каждой точки $z_0 \in D$ имеется такой открытый круг $U(z_0) \subset D$ с центром в этой точке, что образ $f(\Sigma)$ любой окружности $\Sigma \subset U(z_0)$ является окружностью.*

Доказательство. Положим $\varphi_0 := \alpha/2$, $U(z_0) := B(z_0, r(z_0, \varphi_0))$, где $r(z_0, \varphi_0)$ определено формулой (2.1), и покажем, что круг $U(z_0)$ обладает требуемым свойством.

Для произвольно заданной окружности $\Sigma \subset U(z_0)$ рассмотрим открытый круг B с $\partial B = \Sigma$. Фиксировав какую-нибудь точку $O \in \mathbf{C}$, положим $R := \inf\{r > 0 : f(\Sigma) \subset B(O, r)\}$. Тогда $f(B) \subset B(O, R)$ и существует хотя бы одна точка $b \in f(\Sigma) \cap \partial B(O, R)$. Построим прямую P, касательную к окружности $\partial B(O, R)$, разбивающую плоскость на открытые полуплоскости P^+ и P^- так, что $f(B) \subset B(O, R) \subset P^+$. Так как $f(\Sigma) \setminus \{b\} \subset \overline{B}(O, R) \setminus \{b\} \subset P^+$, найдется точка $b_1 \in f(\Sigma) \cap P^+$. Для $\delta > 0$ проведем прямую $P(\delta) \subset P^+$ параллельно прямой P на расстоянии δ от нее. При всех достаточно малых $\delta > 0$ точки b_1 и b разделяются прямой $P(\delta)$ и лежат в разных открытых полуплоскостях: $b_1 \in P(\delta)^+$, $b \in P(\delta)^-$. Отметим на Σ точки $c_1 := f^{-1}(b_1)$, $c := f^{-1}(b)$ и рассмотрим замкнутое множество $M = f^{-1}(P(\delta) \cap f(\Sigma))$. Заметив, что точки c_1 и c лежат в разных компонентах связности открытого на Σ множества $\Sigma \setminus M$, обозначим через $\tau(\delta)$ ту из них, для которой $c \in \tau(\delta)$. Множество $\tau(\delta)$ является открытой круговой дугой на Σ; ее концы обозначим через $z_1(\delta)$ и $z_3(\delta)$; их образы $f(z_1(\delta))$ и $f(z_3(\delta))$ лежат на прямой $P(\delta)$.

Учитывая топологическую сходимость замкнутых (в $\mathbf{C}$) множеств $P(\delta) \to P$ и $P(\delta) \cap f(\Sigma) \to P \cap f(\Sigma) = \{b\}$ при $\delta \to 0$, из которой следует, что $f(z_1(\delta)) \to b$ и $f(z_3(\delta)) \to b$, получаем, переходя к прообразам этих точек, сходимость $z_1(\delta) \to c$ и $z_3(\delta) \to c$. Отсюда при $\delta \to 0$ следует сходимость углов $\alpha'(\delta) := \angle z_1(\delta) c_1 z_3(\delta) \to 0$. Поэтому при всех достаточно малых $\delta > 0$ справедлива оценка $\alpha'(\delta) < \alpha/2$ и, следовательно, $\beta'(\delta) := \alpha - \alpha'(\delta) > \alpha/2 = \varphi_0$. Пусть $L := \Lambda\{z_1(\delta), z_3(\delta)\}$ и $c \in L^-$. В силу построения круга $U(z_0)$ по лемме 2 круговая дуга $C(\delta) := C[z_1(\delta), z_3(\delta)]$ с вписанным углом $\theta(C(\delta)) = \beta'(\delta) > \varphi_0$, лежащая в полуплоскости $L^- \cup L$, содержится в D вместе с $\mathrm{Cls}(\mathrm{segm}(C(\delta)))$. Круговая дуга $S(\delta) := S[z_1, z_3] \subset \Sigma$, проходящая через точку c_1, лежит в полуплоскости $L^+ \cup L$ и имеет вписанный угол $\theta(S(\delta)) = \alpha'(\delta)$.

Таким образом, имеем две круговые дуги $C(\delta)$ и $S(\delta)$, лежащие по разные стороны от прямой $L = \Lambda\{z_1, z_3\}$. Рассмотрим отдельно два случая: $\alpha = \pi$ и $\alpha < \pi$.

Случай 1. Пусть $\alpha = \pi$. Тогда $\beta'(\delta) = \pi - \alpha'(\delta)$ и это значит, что $C(\delta) = \tau(\delta) \subset \Sigma$. Применив лемму 1 к правильной тетраде $T := \{z_1, c_1, z_3, c\}$, образ которой $f(T) = \{f(z_1), b_1, f(z_2), b\}$ также является правильной тетрадой, приходим к тому, что $f(\tau(\delta))$ и $f(S(\delta))$ — круговые дуги. Так как для их вписанных углов справедливо равенство $\theta(\tau(\delta)) + \theta(S(\delta)) = \alpha = \pi$, обе эти дуги лежат на одной и той же окружности Σ^* и тогда множество $f(\Sigma) = f(S(\delta)) \cup f(\tau(\delta)) = \Sigma^*$ является окружностью, что и требовалось установить.

Случай 2. Пусть $0 < \alpha < \pi$. В этом случае точка c является внутренней точкой области $G(\delta)$, ограниченной круговыми дугами $S(\delta)$ и $C(\delta)$; точка $f(c)$ — внутренняя точка области $f(G(\delta))$ с границей $\partial f(G(\delta)) = f(S(\delta)) \cup f(C(\delta))$. Следовательно, на границе области $f(G(\delta))$ должна быть некоторая точка $b_2(\delta) \in P^-$. Так как $f(S(\delta)) \subset f(\Sigma) \subset P^+ \cup P$, то $b_2(\delta) \in f(C(\delta)) \cap P^-$. Положив $c_2(\delta) := f^{-1}(b_2(\delta)) \in C(\delta) \setminus \{z_1(\delta), z_3(\delta)\}$, получаем правильную тетраду $T := \{z_1(\delta), c_1, z_3(\delta), c_2(\delta)\}$, образ которой $f(T) = \{f(z_1(\delta)), b_1, f(z_3(\delta)), b_2(\delta)\}$ также является правильной тетрадой. Поскольку при этом

$$\Phi(T) = \angle z_1(\delta) c_1 z_3(\delta) + \angle z_1(\delta) c_2(\delta) z_3(\delta) = \alpha'(\delta) + \beta'(\delta) = \alpha,$$

применением леммы 1 устанавливаем, что $f(S(\delta))$ и $f(C(\delta))$ — круговые дуги, и это справедливо для всех достаточно малых $\delta > 0$. При $\delta \to 0$ имеем топологическую сходимость $S(\delta) \to \Sigma$, из которой следует топологическая сходимость $f(S(\delta)) \to f(\Sigma)$. Но жорданова кривая $f(\Sigma)$, являющаяся топологическим пределом круговых дуг, может быть только окружностью, т. е. $f(\Sigma)$ — окружность, что и требовалось доказать.

Для того чтобы получить аналогичную лемму в случае $\pi < \alpha < 2\pi$, придется использовать более тонкие рассуждения, связанные с локальной выпуклостью жордановых кривых.

В формулировках лемм 4–8 будет использовано следующее предположение.

(У1) *Пусть* $\alpha \in (0, \pi)$, $\alpha^* = \pi + \alpha$, *гомеоморфизм* $f : D \to D^*$ *областей в* $\mathbf{C}$ *удовлетворяет условию* $\mathscr{P}(\alpha^*)$ *и открытый круг* $B \subset D$ *таков, что любая круговая дуга с концами в* B *и вписанным углом* $> \alpha/2$ *содержится в* D *вместе с замыканием ее кругового сегмента.*

Лемма 4. *В предположении* (У1) *для любой круговой дуги* $\gamma = \gamma[z_1, z_2]$ *с* $z_1, z_2 \in B$ *и* $\theta(\gamma) > \alpha/2$ *либо* $f(\gamma) = \lambda[f(z_1), f(z_2)]$, *либо* $f(\gamma) \cap \Lambda\{f(z_1), f(z_2)\} = \{f(z_1), f(z_2)\}$.

Доказательство. Положим $P := \Lambda\{f(z_1), f(z_2)\}$ и $L := \Lambda\{z_1, z_2\}$. Докажем, что

(i) для любой круговой дуги γ, удовлетворяющей условиям леммы, либо $f(\gamma) \cap P^+ = \varnothing$, либо $f(\gamma) \cap P^- = \varnothing$.

Допустив противное, отметим точки $b_1 \in f(\gamma) \cap P^+$, $b_2 \in f(\gamma) \cap P^-$ и их прообразы $c_1 = f^{-1}(b_1)$, $c_2 = f^{-1}(b_2)$ на $\gamma(z_1, z_2)$.

Пусть $\gamma(z_1, z_2) \subset L^-$. Построим круговую дугу $S = S[z_1, z_2] \subset L^+ \cup L$ с $\theta(S) = \beta := \pi + \alpha - \theta(\gamma) \in (\alpha, \pi)$. Так как $\beta > \alpha > \alpha/2$, то $\mathrm{Cls}(\mathrm{segm}(S)) \subset D$.

Случай 1. Пусть $f(S) \neq \lambda[f(z_1), f(z_2)]$. Тогда найдется точка $b_1 \in f(S) \cap (P^- \cup P^+)$. Пусть для определенности $b_1 \in P^+$. По предположению существует точка $b_2 \in f(\gamma) \cap P^-$. Положив $c_1 = f^{-1}(b_1) \in S(z_1, z_2)$ и $c_2 = f^{-1}(b_2) \in \gamma(z_1, z_2)$, получаем правильную тетраду $T := \{z_1, c_1, z_2, c_2\} \subset D$, образ которой $f(T) = \{f(z_1), b_1, f(z_2), b_2\}$ также является правильной тетрадой. При этом $\Phi(T) = \theta(S) + \theta(\gamma) = \pi + \alpha = \alpha^*$. Поэтому (по лемме 1) $f(\gamma)$ является круговой дугой, а следовательно, не может пересекаться с каждой из открытых полуплоскостей P^+ и P^-. Итак, этот случай приводит к противоречию.

Случай 2. Пусть $f(S) = \lambda[f(z_1), f(z_2)]$. Задав $\delta > 0$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\theta(\gamma) - \delta > \alpha$, построим круговую дугу $C(\delta) = C(\delta)[z_1, z_2] \subset L^- \cup L$ с вписанным углом $\theta(C(\delta)) = \theta(\gamma) - \delta$. При $\delta \to 0$ из топологической сходимости $C(\delta) \to \gamma$ следует сходимость $f(C(\delta)) \to f(\gamma)$. Поэтому при всех достаточно малых $\delta > 0$ дуга $f(C(\delta))$ пересекается как с P^-, так и с P^+. Построим круговую дугу $S(\delta) = S(\delta)[z_1, z_2] \subset L^+ \cup L$ с $\theta(S(\delta)) = \pi + \alpha - \theta(C(\delta)) = \pi + \alpha - \theta(\gamma) + \delta \in (\alpha, \pi)$. В силу инъективности f дуга $f(S(\delta))$ не может совпадать с $f(S) = \lambda[f(z_1), f(z_2)]$. Следовательно, для пары круговых дуг $C(\delta)$ (вместо γ) и $S(\delta)$ (вместо S) получаем ситуацию, рассмотренную в случае 1, которая, как было показано, дает противоречие. Таким образом, утверждение (i) доказано.

Пусть $\gamma \subset L^+ \cup L$, $f(\gamma) \subset P^+ \cup P$ и $f(\gamma)$ не совпадает с отрезком $\lambda[f(z_1), f(z_2)]$. Тогда имеются точка $b \in f(\gamma) \cap P^+$, открытый круг $B(b, r) \subset P^+$ и столь малое $\delta > 0$, что $\theta(\gamma) + \delta < \pi$, $\theta(\gamma) - \delta > \alpha/2$ и круговые дуги $\gamma^+ = \gamma^+[z_1, z_2] \subset L^+ \cup L$, $\gamma^- = \gamma^-[z_1, z_2] \subset L^+ \cup L$ с $\theta(\gamma^+) = \theta(\gamma) + \delta$ и $\theta(\gamma^-) = \theta(\gamma) - \delta$ пересекаются с $B(b, r)$. Так как $\theta(\gamma^+) > \alpha/2$ и $\theta(\gamma^-) > \alpha/2$, по построению круга B круговые дуги γ^+, γ^- лежат в D вместе с замыканиями их сегментов. Поэтому область $\Omega := \mathrm{segm}(\gamma^-) \setminus \mathrm{Cls}(\mathrm{segm}(\gamma^+))$ содержится в D вместе со своей границей $\partial\Omega = \gamma^+ \cup \gamma^-$. В силу утверждения (i) $f(\gamma^+) \subset P^+ \cup P$ и $f(\gamma^-) \subset P^+ \cup P$. Поэтому $\partial(f(\Omega)) = f(\gamma^+) \cup f(\gamma^-) \subset P^+ \cup P$ и, следовательно, $f(\Omega) \subset P^+$. Но поскольку $\gamma \in \Omega \cup \{z_1, z_2\}$, то $f(\gamma) \subset P^+ \cup \{f(z_1), f(z_2)\}$, что и требовалось установить. Лемма доказана.

Лемма 5 (о малых хордах). *Пусть в ситуации* (У1) *для круговой дуги* $J = J[z_1, z_2] \subset B$ *с* $\theta(J) > \alpha$ *ее образ* $f(J)$ *не пересекает прямую* $\Lambda\{f(z_1), f(z_2)\}$ *в точках, отличных от* $f(z_1)$ *и* $f(z_2)$, *и* $\Omega := \mathrm{segm}(f(J))$. *Тогда для любой поддуги* $\gamma := J[t_1, t_2] \subset J$, *где* $t_1, t_2 \in J(z_1, z_2)$, *ее образ* $f(\gamma)$ *либо совпадает с прямолинейным отрезком* $\lambda[f(t_1), f(t_2)]$, *либо не пересекается с* $\lambda(f(t_1), f(t_2))$, *и тогда* $\mathrm{segm}(\gamma) \cup \lambda(f(t_1), f(t_2))$ *содержится в области* Ω.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что концы t_1, t_2 поддуги $\gamma \subset J$ занумерованы так, что точки z_1, t_1, t_2, z_2 расположены последовательно на круговой дуге J. Рассмотрим ситуацию, когда прямая $L := \Lambda\{f(t_1), f(t_2)\}$ пересекается с $f(J)$ в какой-либо точке $f(t^*)$, отличной от $f(t_1)$ и $f(t_2)$. Тогда образ $f(\tau)$ круговой дуги $\tau := J[t^*, t_1] \cup J[t^*, t_2] \cup \gamma \subset J$ имеет концы на прямой L и пересекает ее более чем в двух точках $(f(t_1), f(t_2), f(t^*))$. По лемме 4 $f(\tau)$ — прямолинейный отрезок, значит, и ее поддуга $f(\gamma) \subset f(\tau)$ также является прямолинейным отрезком, т. е. $f(\gamma) = \lambda[f(t_1), f(t_2)]$.

Поэтому в дальнейшем мы считаем, что прямая L пересекает дугу $f(J)$ только в двух точках $f(t_1)$ и $f(t_2)$. Тогда корректно определен жорданов сегмент $\omega := \mathrm{segm}(f(\gamma))$. Далее рассматриваем отдельно два возможных случая.

Случай 1. Прямая L не разделяет точки $f(z_1)$ и $f(z_2)$. Через L^- обозначим ту открытую полуплоскость с границей L, в которой содержатся точки $f(z_1), f(z_2)$ (ни одна из них не может лежать на прямой L, так как тогда L пересекала бы дугу $f(J)$ в трех различных точках $f(t_1), f(t_2), f(z_j)$).

Допустим, что имеется точка $t_0 \in \gamma$, у которой $f(t_0) \in L^-$. Тогда в L^- можно провести прямую Q параллельно прямой L, которая отделяет множество $\{f(z_1), f(t_0)\}$ от прямой L. Дуга $f(J[z_1, t_1])$ имеет концы $f(t_1) \in L$ и $f(z_1)$, разделенные прямой Q, и, следовательно, пересекает эту прямую в некоторой точке $f(t^*) \in Q$, где $t^* \in J(z_1, t_1)$. Дуга $f(\gamma)$ с концами на L имеет точку $f(t_0)$, отделенную от L прямой Q. Следовательно, $f(\gamma)$ пересекает прямую Q в двух точках $f(t_1')$ и $f(t_2')$, где $t_1' \in J(t_1, t_0)$, $t_2' \in J(t_0, t_2)$. Тогда дуга $f(J[t^*, t_2']) \subset f(J)$ с концами на Q пересекает прямую Q в точке $f(t_1')$, отличной от ее концов. По лемме 4 в применении к круговой дуге $J[t^*, t_2']$ получаем равенство $f(J[t^*, t_2']) = \lambda[f(t^*), f(t_2')] \subset Q$, противоречащее наличию точки $t_1 \in J(t^*, t_2')$, образ которой $f(t_1) \in L$ не лежит на прямой Q. Полученное противоречие показывает, что $f(J(t_1, t_2)) \subset L^+$. Следовательно, $\omega \subset L^+$.

Так как дуги $f(J(z_1, t_1)) \subset L^-$, $f(J(t_2, z_2)) \subset L^-$, $\lambda[f(z_1), f(z_2)] \subset L^-$ и $\lambda[f(t_1), f(t_2)] \subset L$ попарно не пересекаются, множество

$$f(J[z_1, t_1]) \cup \lambda[f(t_1), f(t_2)] \cup f(J[t_2, z_2]) \cup \lambda[f(z_1), f(z_2)]$$

является жордановой кривой, ограничивающей область $G' \subset L^-$. Тогда множество $\Omega^* = G' \cup \lambda(f(t_1), f(t_2)) \cup \omega$ является областью, ограниченной жордановой кривой

$$\begin{aligned}\partial\Omega^* = (\lambda[f(z_1), f(z_2)] \cup f(J[z_2, t_2]) \cup f(J[z_1, t_1])) \cup f(J[t_1, t_2])\\ = \lambda[f(z_1), f(z_2)] \cup f(J) = \partial\Omega.\end{aligned}$$

Две жордановы области с одной и той же границей должны совпадать, стало быть, $\Omega^* = \Omega$. Но $\omega \subset \Omega^*$ по построению, следовательно, $\omega \subset \Omega$, что и утверждалось.

Случай 2. Пусть прямая L разделяет точки $f(z_1)$ и $f(z_2)$. Так как $f(\gamma)$ не совпадает с $\lambda[f(t_1), f(t_2)]$, имеется точка $f(t^*) \in f(\gamma)$, не лежащая на прямой L. Считая $\delta > 0$ достаточно малым, проведем на расстоянии δ от прямой L прямую L^*, параллельную L и отделяющую точку $f(t^*)$ от прямой L. Если δ достаточно мало, то прямая L^* разделяет точки $f(z_1)$ и $f(z_2)$. Тогда одна из этих точек (пусть это будет точка $f(z_j)$) отделена прямой L^* от прямой L. Через i обозначим индекс, дополнительный к j в паре $\{1, 2\}$. Тогда дуга $f(J[z_j, t_j])$ пересекает прямую L^* в некоторой точке $f(t_j^*)$, где $t_j^* \in J(z_j, t_j)$. Дуга $f(\gamma)$ должна пересекать прямую L^* в двух различных точках $f(x_1)$ и $f(x_2)$, где $x_1 \in J(t_1, t^*)$, $x_2 \in J(t^*, t_2)$. Таким образом, для круговой дуги $\mu := J[t_j^*, x_i]$ ее образ $f(\mu)$ есть дуга с концами на прямой L^*, пересекающая эту прямую в еще одной точке $f(x_j)$, отличной от ее концов. По лемме 4 $f(\mu) = \lambda[f(t_j^*), f(x_i)] \subset L^*$, а это противоречит наличию точки $f(t^*) \in \mu$, не лежащей на L^*. Следовательно, случай 2 приводит к противоречию и потому невозможен. Лемма 5 полностью доказана.

Введем некоторую терминологию, связанную с локальной выпуклостью. Пусть область $D \subset \mathbf{C}$ ограничена жордановой кривой $\Gamma = \partial D$. Точку $a \in \Gamma$ будем называть *точкой вогнутости* относительно D, если в любой открытой окрестности $U(a)$ этой точки существует дуга $\gamma = \gamma[a_1, a_2] \subset \Gamma \cap U(a)$, удовлетворяющая следующим условиям:

(Ф1) $a \in \gamma(a_1, a_2)$;

(Ф2) $\lambda(a_1, a_2) \cap \gamma = \varnothing$;

(Ф3) для некоторой открытой окрестности $V(a)$ точки a множество $D \cap V(a)$ не пересекается с жордановым сегментом $\operatorname{segm}(\gamma)$.

Точку $a \in \Gamma$ называем *точкой распрямления*, если имеется прямолинейный отрезок $\lambda[t_1, t_2] \subset \Gamma$ такой, что $a \in \lambda(t_1, t_2)$. Точку $a \in \Gamma$ назовем *точкой невыпуклости* относительно D, если она является либо точкой распрямления, либо точкой вогнутости относительно области D.

Лемма 6. *Пусть в ситуации* (У1) *окружность* $\Sigma \subset B$ *ограничивает открытый круг* B_0 *и круговая дуга* $J = J[z_1, z_2] \subset \Sigma$ *имеет вписанный угол* $\theta(J) > \alpha$. *Если существует такая точка* $t_0 \in J(z_1, z_2)$, *что* $f(t_0)$ *является точкой невыпуклости относительно области* $f(B_0)$, *то* $f(t)$ — *точка невыпуклости относительно* $f(B_0)$ *для всех* $t \in J(z_1, z_2)$.

Доказательство. Если $f(J) = \lambda[f(z_1), f(z_2)]$, то любая точка дуги $f(J(z_1, z_2)$ является точкой распрямления, и в этом случае утверждение леммы тривиально верно. В дальнейшем считаем, что $f(J)$ не является прямолинейным отрезком. Тогда по лемме 4 $f(J(z_1, z_2))$ не пересекает прямую $P := \Lambda\{f(z_1), f(z_2)\}$. Следовательно, $f(J(z_1, z_2)) \subset P^+$, и, значит, корректно определен жорданов сегмент $\Omega := \operatorname{segm}(f(J))$. Положим $\Omega' := P^+ \setminus \overline{\Omega}$.

Случай 1. Пусть $f(t_0)$ — точка вогнутости относительно $f(B_0)$ при некотором $t_0 \in J(z_1, z_2)$.

Пусть $L := \Lambda\{z_1, z_2\}$ и $J(z_1, z_2) \subset L^-$. При всех достаточно малых $\delta > 0$ сохраняются оценки $\theta(J) - \delta > \alpha$ и $\theta(J) + \delta < \pi$. В полуплоскости $L^- \cup L$ построим две круговые дуги: $S_\delta = S_\delta[z_1, z_2]$ с $\theta(S_\delta) = \theta(J) + \delta \in (\alpha, \pi)$ и $C_\delta = C_\delta[z_1, z_2]$ с $\theta(C_\delta) = \theta(J) - \delta \in (\alpha, \pi)$, для которых справедливы включения $S_\delta(z_1, z_2) \subset B_0$ и $C_\delta(z_1, z_2) \subset \mathbf{C} \setminus (B_0 \cup \Sigma)$.

При $\delta \to 0$ имеем топологическую сходимость $S_\delta \to J$ и $C_\delta \to J$, дающую топологическую сходимость $f(S_\delta) \to f(J)$ и $f(C_\delta) \to f(J)$, из которой следует, что при всех достаточно малых $\delta > 0$ дуги $f(S_\delta)$ и $f(C_\delta)$ пересекаются с P^+. Тогда по лемме 4 открытые дуги $f(S_\delta(z_1, z_2))$ и $f(C_\delta(z_1, z_2))$ лежат в P^+, причем одна из них лежит в области Ω, а другая — в Ω'.

Допустим, что для некоторого достаточно малого $\delta > 0$ выполнено включение

$$f(S_\delta(z_1, z_2)) \subset \Omega. \tag{6.1}$$

Тогда для области $H_\delta \subset B_0$, ограниченной круговыми дугами J и S_δ, из (6.1) следует включение

$$f(H_\delta) \subset f(B_0) \cap \Omega. \tag{6.2}$$

Теперь воспользуемся тем, что $f(t_0)$ — точка вогнутости относительно $f(B_0)$. В качестве открытой окрестности этой точки возьмем открытый круг $U(f(t_0)) := B(f(t_0), \operatorname{dist}(f(t_0), f(S_\delta)))$. По определению точки вогнутости существует дуга $\gamma := f(J(t_1, t_2)) \subset f(J) \cap U(f(t_0))$ со свойствами (Ф1)–(Ф3), т. е. $t_0 \in J(t_1, t_2)$; $\gamma \cap \lambda(f(t_1), f(t_2)) = \varnothing$ (и поэтому корректно определен жорданов сегмент $\omega := \operatorname{segm}(\gamma)$); для некоторой окрестности $V(f(t_0))$ точки $f(t_0)$ выполняется равенство

$$(\omega \cap V(f(t_0))) \cap f(B_0) = \varnothing. \tag{6.3}$$

Однако по лемме 5 $\omega \subset \Omega$. Так как $f(t_1), f(t_2)$ лежат в открытом круге $U(f(t_0))$, то $\lambda[f(t_1), f(t_2)] \subset U(t_0)$ и, следовательно, $\lambda[f(t_1), f(t_2)]$ не пересекается с дугой $f(S_\delta)$. Поэтому жорданов сегмент $\omega \subset \Omega \cap U(f(t_0))$ лежит в области, ограниченной дугами $f(J)$ и $f(S_\delta)$, т. е. в области $f(H_\delta)$. Тогда в силу (6.2) $\omega \subset f(B_0)$. Так как $f(t_0) \in \partial\omega$, пересечение $\omega \cap V(t_0)$ непусто и также содержится в $f(B_0)$, т. е. $(\omega \cap V(f(t_0))) \cap f(B_0) = \omega \cap V(f(t_0)) \neq \varnothing$. Но это противоречит (6.3), поэтому в рассматриваемом случае включение (6.1) не может реализоваться и, следовательно, для всех достаточно малых $\delta > 0$ выполняются включения

$$f(S_\delta(z_1, z_2)) \subset \Omega'; \quad f(C_\delta(z_1, z_2)) \subset \Omega. \tag{6.4}$$

Поэтому для области H'_δ, ограниченной круговыми дугами J и C_δ, справедливы соотношения

$$f(H'_\delta) \subset \Omega; \quad f(H'_\delta) \cap f(B_0) \neq \varnothing. \tag{6.5}$$

Докажем, что для произвольной точки $t^* \in J(z_1, z_2)$ ее образ $f(t^*)$ является точкой невыпуклости относительно $f(B_0)$.

Если существует открытая поддуга $J(t_1^*, t_2^*) \subset J$, содержащая t^*, образ которой является прямолинейным отрезком, то точка $f(t^*)$ будет точкой распрямления и, следовательно, точкой невыпуклости относительно $f(B_0)$, что и утверждалось.

Поэтому в дальнейшем можно считать, что для любой достаточно малой круговой дуги $J[t_1^*, t_2^*] \subset J$ с $t^* \in J(t_1^*, t_2^*)$ ее образ $f(J[t_1^*, t_2^*])$ не является прямолинейным отрезком, и тогда по лемме 4 $f(J[t_1^*, t_2^*])$ не пересекается с $\lambda(f(t_1^*, t_2^*))$, т. е. корректно определен жорданов сегмент $\operatorname{segm}(J[t_1^*, t_2^*])$, который по лемме 5 о малых хордах содержится в Ω.

Используя определение, покажем, что $f(t^*)$ — точка вогнутости относительно $f(B_0)$. Пусть задана произвольная открытая окрестность U этой точки. Положим $r = \operatorname{dist}(f(t^*), C_\delta \cup \partial U)$. В силу непрерывности f существует такая достаточно малая круговая дуга $J[t_1^*, t_2^*]$ с $t^* \in J(t_1^*, t_2^*)$, для которой $\gamma := f(J[t_1^*, t_2^*]) \subset B(f(t^*, r))$ и $\omega := \operatorname{segm}(\gamma) \subset \Omega$. Так как при этом $\omega \subset B(f(t^*), r)$, то ω содержится в области, ограниченной дугами $f(J)$ и $f(C_\delta)$, т. е. $\omega \subset f(H'(\delta))$. Беря в качестве открытой окрестности $V(f(t^*))$ всю плоскость $\mathbf{C}$ и учитывая, что $f(H'_\delta) \cap f(B_0) = \varnothing$, получаем соотношение $(\mathbf{C} \cap \omega) \cap f(B_0) \subset f(H'_\delta) \cap f(B_0) = \varnothing$. Значит, построенная дуга γ удовлетворяет требованиям (Ф1)–(Ф3), и точка $f(t^*)$ является точкой вогнутости относительно $f(B_0)$. Итак, в случае 1 утверждение леммы доказано.

Случай 2. Пусть $f(t_0)$ — точка распрямления для некоторого $t_0 \in J(z_1, z_2)$. Покажем, что тогда существует $t^* \in J(z_1, z_2)$, для которого $f(t^*)$ является точкой вогнутости относительно $f(B_0)$, и рассматриваемый случай сводится к случаю 1.

Множество $M \subset f(J(z_1, z_2))$ всех точек распрямления — непустое (так как $t_0 \in M$) открытое подмножество в $f(J(z_1, z_2))$. Возьмем $f(J(a_1, a_2))$ — компоненту связности множества M, содержащую точку t_0 (нумерацию точек a_1, a_2 устроим так, чтобы точки z_1, a_1, t_0, a_2, z_2 располагались последовательно на круговой дуге J). Тогда $f(J[a_1, a_2])) = \lambda[f(a_1), f(a_2))]$, и так как в изучаемой ситуации $f(J)$ не является прямолинейным отрезком, по крайней мере одна из точек a_1, a_2 не совпадает с концом дуги J. Пусть $a_j \neq z_j$, где $j \in \{1, 2\}$, и i — индекс, дополнительный к j в паре $\{1, 2\}$. Тогда существует последовательность $\{a_j^{(n)}\} \subset J(z_j, a_j)$, сходящаяся к a_j при $n \to \infty$ и такая, что $J\bigl[a_j^{(n+1)}, a_j\bigr] \subset J\bigl(a_j^{(n)}, a_j\bigr]$ при $n = 1, 2, \dots$. Введем обозначения $\gamma := J[a_1, a_2] = J[a_j, a_i]$; $\gamma_n := J\bigl[a_i, a_j^{(n)}\bigr]$ и $Q := \Lambda\{f(a_1), f(a_2)\}$.

Если дуга $f\bigl(J\bigl(a_j, a_j^{(1)}\bigr]\bigr)$ имеет на прямой Q какую-нибудь точку $f(t')$, то по лемме 4, примененной к круговой дуге $J[a_i, t']$, дуга $f(J[a_i, t'])$ является прямолинейным отрезком, поэтому $J(t', a_i) \subset M$. Но тогда $J(t', a_i) \subset J(a_1, a_2) \subset J(a_i, t')$, что невозможно, так как $t' \neq a_j$. Следовательно, полуоткрытая дуга $f\bigl(J\bigl(a_j, a_j^{(1)}\bigr]\bigr)$ вместе со своими поддугами $f\bigl(J\bigl(a_j, a_j^{(n)}\bigr]\bigr)$ лежит в открытой полуплоскости с границей Q; эту открытую полуплоскость обозначим через Q^-.

Для каждого n проведем прямую $Q_n := \Lambda\bigl\{f(a_i), f\bigl(a_j^{(n)}\bigr)\bigr\}$. По лемме 5 $f(J)$ не пересекается с прямолинейным отрезком $\lambda\bigl(f(a_i), f\bigl(a_j^{(n)}\bigr)\bigr)$ и жорданов сегмент $G_n := \operatorname{segm}(f(\gamma_n))$ содержится в Ω. Открытую полуплоскость с границей Q_n, содержащую область G_n, обозначим через Q_n^+. Итак, для каждого n

$$\Omega \subset P^+, \quad G_n \subset \Omega \cap Q^- \cap Q_n^+. \tag{6.6}$$

Так как $\gamma_n \subset J$, то $\theta(\gamma_n) > \theta(J) > \alpha$. Для каждого n построим круговую дугу $S_n = S_n\bigl[a_i, a_j^{(n)}\bigr]$ с $\theta(S_n) = \alpha^* - \theta(\gamma_n) = \pi + \alpha - \theta(\gamma_n) \in (\alpha, \pi)$, лежащую с круговой дугой γ_n по разные стороны от прямой $\Lambda\bigl\{a_i, a_j^{(n)}\bigr\}$. Тогда $S_n\bigl(a_i, a_j^{(n)}\bigr) \subset B_0$ и при $n \to \infty$ имеется топологическая сходимость $S_n \to S$, где $S = S[a_i, a_j]$ — круговая дуга с вписанным углом $\theta(S) = \alpha^* - \theta(\gamma)$, лежащая с γ по разные стороны от прямой $\Lambda\{a_i, a_j\}$.

Если $f(S_n) \cap Q_n^- \neq \varnothing$, то по лемме 1 $f(\gamma_n)$ — круговая дуга, а это невозможно, так как $f(\gamma_n)$ содержит прямолинейный отрезок $f(\gamma)$. Следовательно, $f(S_n) \subset Q_n^+$, и так как $f(S_n) \cap f(\gamma_n) = \bigl\{f(a_i), f\bigl(a_j^{(n)}\bigr)\bigr\}$, для каждого n выполняется одно из включений

$$f\bigl(S_n\bigl(a_i, a_j^{(n)}\bigr)\bigr) \subset Q_n^+ \setminus \overline{G}_n \tag{6.7}$$

или

$$f(S_n) \subset G_n \cup \lambda\bigl[f(a_i), f\bigl(a_j^{(n)}\bigr)\bigr]. \tag{6.8}$$

Покажем, что для всех достаточно больших n включение (6.8) не может реализоваться. Действительно, допустив противное, найдем подпоследовательность n_k, для которой при всех k выполняется включение $f(S_{n_k}) \subset G_{n_k} \cup \lambda\bigl[a_i, a_j^{(n_k)}\bigr]$. При $k \to \infty$ имеем топологическую сходимость $\overline{G}_{n_k} \to \lambda[f(a_i, a_j)] = f(\gamma)$, поэтому из включения (6.8) следует топологическая сходимость $f(S_{n_k}) \to \lambda[f(a_i, a_j)] = f(\gamma)$. Но из отмеченной выше сходимости $S_{n_k} \to S$ следует топологическая сходимость $f(S_{n_k}) \to f(S)$. В силу единственности топологического предела $f(S) = f(\gamma)$, а это невозможно, так как $S \neq \gamma$ и отображение f биективно. Таким образом, доказано, что для всех достаточно больших n справедливо включение (6.7).

Для всех достаточно больших n область D_n, ограниченная круговыми дугами S_n и γ_n, содержится в B_0, а ее образ, т. е. жорданова область $f(D_n)$ с границей $\partial D_n = f(S_n) \cup f(\gamma_n)$, лежит в Q_n^+ и не пересекается с G_n, т. е. при достаточно больших n

$$f(D_n) \cap G_n = \varnothing. \tag{6.9}$$

Утверждаем, что, положив $t^* = a_j$, получим требуемую точку $f(t^*) = f(a_j)$ — точку вогнутости относительно области $f(B_0)$.

Пусть произвольно задана открытая окрестность U точки $f(a_j)$. Нам нужно построить дугу $\tau \subset \partial f(B_0) \cap U$, удовлетворяющую требованиям (Ф1)–(Ф3).

Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано настолько малым, чтобы образ круга $f(\overline{B}(a_j,\varepsilon))$ содержался в U и не пересекался с $f(S_n) \cup \lambda\big[f(a_i), f\big(a_j^{(n)}\big)\big]$. Открытый круг $B(a_j,\varepsilon)$ разрезается круговой дугой γ_n на две области: $B^+ := B(a_j,\varepsilon) \cap B_0$ и $B^- := B(a_j,\varepsilon) \setminus \overline{B}_0$. Так как $B^+ \subset D_n$, то $f(B^+) \subset f(D_n)$ и $f(B^-) \subset G_n$. Следовательно,

$$(G_n \cap f(B^-)) \cap f(B_0) = \varnothing. \tag{6.10}$$

Построим круговую дугу $J[t_1,t_2] \subset \gamma_n$, выбрав точки t_1 и t_2 настолько близкими к a_j, чтобы выполнялись соотношения $a_j \in J(t_1,t_2)$, $J[t_1,t_2] \subset B(a_j,\varepsilon)$ и $\lambda[f(t_1), f(t_2)] \subset f(B(a_j,\varepsilon))$. Следовательно, для дуги $\tau := f(J[t_1,t_2]) \subset f(B(a_j,\varepsilon)) \subset U$ выполнено требование (Ф1). Лемма 5 о малых хордах гарантирует, что $\tau \cap \lambda(f(t_1), f(t_2)) = \varnothing$, т. е. выполнено требование (Ф2). По той же лемме 5 жорданов сегмент $\omega := \operatorname{segm}(\tau)$ содержится в G_n. Поэтому $\omega \subset G_n \cap f(B(a_j,\varepsilon)) \subset U$. Так как $f(\overline{B}^+) \cap G_n = \varnothing$, то $g_n \cap f(B(a_j,\varepsilon)) = G_n \cap f(B^-)$. Следовательно, $\omega \subset G_n \cap f(B^-)$ и $\omega \cap f(B_0) = \varnothing$ в силу (6.10). Это означает, что для τ выполнено требование (Ф3) (где в качестве открытой окрестности $V(f(a_j))$ можно взять, например, всю плоскость $\mathbf{C}$).

Итак, точка $f(a_j)$ является точкой вогнутости относительно $f(B_0)$, и, следовательно, имеет место случай 1, в котором утверждение леммы уже доказано.

Лемма 7. *В ситуации* (У1) *для любого круга $B_0 \subset B$ с границей $\Sigma = \partial B_0 \subset B$ на жордановой кривой $f(\Sigma)$ нет ни одной точки невыпуклости относительно $f(B_0)$.*

Доказательство. Построим на Σ точку, которая не является точкой невыпуклости относительно $f(B_0)$. Положим $R_0 = \min\{r : f(\overline{B}_0) \subset \overline{B}(0,r)\}$. Тогда в силу минимальности радиуса R_0 на окружности $\partial B(0,R_0)$ имеется по крайней мере одна точка жордановой кривой $f(\Sigma)$, т. е. существует точка $t_0 \in \Sigma$, для которой $f(t_0) \in f(\Sigma) \cap \partial B(0,R_0)$. Докажем, что $f(t_0)$ не может быть точкой невыпуклости относительно $f(B_0)$.

Допустим, что $f(t_0)$ — точка невыпуклости. В силу строгой выпуклости замкнутого круга не существует прямолинейного отрезка, содержащего $f(t_0)$, с концами в $\overline{B}(0,R_0)$, отличными от $f(t_0)$. Значит, $f(t_0)$ не может быть точкой распрямления и, следовательно, является точкой вогнутости относительно $f(B_0)$.

Выполним вспомогательные построения. Фиксируем точку $p \in \Sigma \setminus \{t_0\}$ и построим дугу $\Gamma = \Gamma[f(t_0), f(p)]$ такую, что $\Gamma(f(t_0), f(p)) \subset \mathbf{C} \setminus f(\overline{B}_0)$ и в некотором открытом круге $V_1 = B(f(t_0),\delta)$ пересечение $\Gamma(f(t_0), f(p)) \cap V_1$ является прямолинейным отрезком, лежащим вне круга $\overline{B}(0,R_0)$, т. е.

$$(\Gamma(f(t_0), f(p)) \cap V_1) \cap \overline{B}(0,R_0) = \varnothing. \tag{7.1}$$

По одной из эквивалентных формулировок теоремы Жордана (см., например, [25, теорема 1, с. 149]) в применении к жордановой области $\overline{\mathbf{C}} \setminus f(\overline{B}_0)$ имеем следующее утверждение.

(Б1) *Если на окружности Σ пара точек b_1, b_2 разбивается парой точек t_0, p, то любая дуга $\Gamma^* = \Gamma^*(f(b_1), f(b_2)) \subset \mathbf{C} \setminus f(\overline{B}_0)$ пересекается с $\Gamma(f(t_0), f(p))$.*

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы круговая дуга $J = J[p_1,p_2] := \Sigma \cap \overline{B}(t_0,\varepsilon)$ имела вписанный угол $\theta(J) > \alpha$, $f(\overline{B}(t_0,\varepsilon)) \subset V_1$ и $p \in \Sigma \setminus J$. Используя определение точки вогнутости, в заданной открытой окрестности $f(B(t_0,\varepsilon))$

точки $f(t_0)$ находим дугу $\gamma := f(J[t_1^*, t_2^*]) \subset f(\Sigma) \cap f(B(t_0, \varepsilon))$, удовлетворяющую требованиям (Ф1)–(Ф3). Это значит, что $t_0 \in J(t_1^*, t_2^*)$, γ не пересекается с $\lambda(f(t_1^*), f(t_2^*))$ и корректно определен жорданов сегмент $\Omega^* := \operatorname{segm}(\gamma)$, лежащий в $f(B(t_0, \varepsilon))$ вместе со своим замыканием. Заметим, что $J[t_1^*, t_2^*] = f^{-1}(\gamma) \subset B(t_0, \varepsilon)$, т. е. $J[t_1^*, t_2^*] \subset J(p_1, p_2)$. Выполнение требования (Ф3) означает существование такой открытой окрестности $V(f(t_0))$ точки $f(t_0)$, что

$$V(f(t_0)) \cap \Omega^* \subset \mathbf{C} \setminus f(\overline{B}_0).$$

Возьмем открытый круг V_2 с центром $f(t_0)$, содержащийся в $V(f(t_0)) \cap f(B(t_0, \varepsilon))$ и такой, что $\overline{V}_2 \cap (f(\Sigma \setminus J(t_1^*, t_2^*))) = \varnothing$. Тогда

$$V_2 \cap \Omega^* \subset V(f(t_0)) \cap \Omega^* \subset \mathbf{C} \setminus f(\overline{B}_0). \tag{7.2}$$

Пусть круговая дуга $J[t_1, t_2] \subset J[t_1^*, t_2^*]$ такова, что $t_0 \in J(t_1, t_2)$ и $f(J[t_1, t_2]) \subset V_2$. По лемме 5 о малых хордах открытый отрезок $\lambda(f(t_1), f(t_2))$ не пересекается с $f(J[t_1, t_2])$ и содержится в круге V_2 и, следовательно, не пересекается с дугой $f(\Sigma) \setminus \gamma$. Значит, открытый отрезок $\lambda(f(t_1), f(t_2))$ не пересекается с жордановой кривой $f(\Sigma)$ и лежит в $V_2 \cap \Omega^*$. В силу включения (7.2) прямолинейный отрезок $\lambda(f(t_1), f(t_2))$ лежит в области $\mathbf{C} \setminus f(\overline{B}_0)$ и соединяет пару точек $f(t_1), f(t_2) \in f(\Sigma)$, которая разбивается парой точек $f(p), f(t_0) \in f(\Sigma)$. По утверждению (Б2) на этом отрезке должна быть точка $q \in \lambda(f(t_1), f(t_2)) \cap \Gamma(f(t_0), f(p))$. Так как $\lambda[f(t_1), f(t_2)] \subset V_2 \subset V_1$, то

$$q \in V_1 \cap \Gamma(f(t_0), f(p)) \subset \mathbf{C} \setminus \overline{B}(0, R_0). \tag{7.3}$$

Но в силу выпуклости замкнутого круга $\overline{B}(0, R_0)$ все точки отрезка, концы которого $f(t_1), f(t_2) \in f(\Sigma) \subset \overline{B}(0, R_0)$ лежат к этом круге, также должны лежать в $\overline{B}(0, R_0)$. Тем самым $q \in \overline{B}(0, R_0)$, что противоречит (7.3). Полученное противоречие доказывает, что $f(t_0)$ не может быть точкой невыпуклости относительно $f(B_0)$.

Рассмотрим множество M точек $t \in \Sigma$, образы которых $f(t)$ являются точками невыпуклости относительно области $f(B_0)$. Из леммы 6 вытекает, что множество M является открыто-замкнутым подмножеством в Σ (с топологией, индуцированной из $\mathbf{C}$). В силу связности Σ либо $M = \Sigma$, либо $M = \varnothing$. Так как $t_0 \in \Sigma \setminus M$, то $M = \varnothing$, и это означает, что на $f(\Sigma)$ нет ни одной точки невыпуклости относительно $f(B_0)$. Лемма доказана.

Замечание. Фактически при наших предположениях из леммы 7 вытекает локальная выпуклость замыкания области $f(B_0)$ в смысле обычного определения [26, 2.1]. Отсюда в силу теоремы Титце — Накаяма (см. [26, § 2, теорема 1]) следует выпуклость замыкания области $f(B_0)$.

Лемма 8. *Пусть в предположении* (У1) $B = B(z_0, R)$. *Тогда для любой окружности* $\Sigma \subset B(z_0, R/4)$ *ее образ* $f(\Sigma)$ *является окружностью.*

Доказательство. Положим $\alpha' := \max\{\alpha, (\pi + \alpha)/2\}$ и рассмотрим произвольную окружность $\Sigma \subset B(z_0, R/4)$. Заметим, что если образы пересекающихся открытых круговых дуг $\gamma_1 \subset \Sigma$ и $\gamma_2 \subset \Sigma$ являются круговыми дугами, то $f(\gamma_1)$ и $f(\gamma_2)$ лежат на одной и той же окружности. Поэтому если имеется конечное покрытие окружности Σ открытыми круговыми дугами $\gamma(a_j, b_j)$ ($j = 1, \ldots, N$), образы которых — круговые дуги, то все $f(\gamma[a_j, b_j])$ лежат на одной и той же окружности Σ^*. Значит, жорданова кривая $f(\Sigma)$ лежит на окружности Σ^* и, следовательно, совпадает с ней. Таким образом, для доказательства леммы достаточно обосновать следующее утверждение.

(Б2) *Образ $f(\gamma)$ любой круговой дуги $\gamma \subset \Sigma$ с вписанным углом $\theta(\gamma) > \alpha'$ является круговой дугой.*

Итак, пусть на окружности Σ, ограничивающей круг B_0, задана круговая дуга $\gamma = \gamma[z_1, z_2] \subset \Sigma$ с $\theta(\gamma) > \alpha'$. Пусть $L := \Lambda\{z_1, z_2\}$ и $\gamma(z_1, z_2) \subset L^+$. По лемме 7 на $f(\Sigma)$ нет точек невыпуклости относительно $f(B_0)$, поэтому дуга $f(\gamma)$ не может совпадать с $\lambda[f(z_1), f(z_2)]$. Тогда по лемме 4 $f(\gamma(z_1, z_2))$ не пересекается с прямой $P := \Lambda\{f(z_1), f(z_2)\}$ и, следовательно, лежит в открытой полуплоскости P^+.

Построим круговую дугу $\tau = \tau[z_1, z_2] \subset L^- \cup L$ с вписанным углом $\theta(\tau) = \alpha^* - \theta(\gamma) = \pi + \alpha - \theta(\gamma) \in (\alpha, \pi)$. Так как $\theta(\tau) + \theta(\gamma) = \alpha^* > \pi$, то $\tau(z_1, z_2) \subset B_0$, т. е. $\tau(z_1, z_2) \subset B_0 \cap L^-$.

Круг $\overline{B}_0'$, симметричный кругу $\overline{B}_0$ относительно прямой L, содержится в $B(z_0, R)$. Действительно, так как $\operatorname{diam} B_0' = \operatorname{diam} B_0 < R/2$ и $z_1 \in \overline{B}_0'$, то $\overline{B}_0' \subset B(z_0, R/4 + R/2) \subset B(z_0, R)$.

Пусть T — окружность, содержащая круговую дугу τ. Тогда дополнительная круговая дуга $\tilde\tau := T \setminus \tau(z_1, z_2)$ имеет вписанный угол $\theta(\tilde\tau) = \pi - \theta(\tau) = \theta(\gamma) - \alpha$. Так как $\theta(\gamma) > \alpha' \geq (\pi + \alpha)/2$, то $\pi - \theta(\gamma) < \theta(\gamma) - \alpha = \theta(\tilde\tau)$ и, следовательно, $\theta(\tilde\tau) > \theta(\Sigma \setminus \gamma(z_1, z_2))$. Это означает, что $\tilde\tau \subset \overline{B}_0'$. Следовательно, для окружности $T = \tau \cup \tilde\tau$ имеем включение $T \subset \overline{B}_0 \cup \overline{B}_0' \subset B(z_0, R)$. Поэтому к окружности T так же, как и к S, применима лемма 7. Обозначим через B_1 открытый круг с границей T. По лемме 7 дуга $f(\tau)$ не содержит точек распрямления, поэтому не является прямолинейным отрезком. Тогда по лемме 4 либо $f(\tau(z_1, z_2)) \subset P^+$, либо $f(\tau(z_1, z_2)) \subset P^-$. Если $f(\tau(z_1, z_2)) \subset P^-$, то по лемме 1 дуга $f(\gamma)$ является круговой дугой, что и требуется в (Б2).

Остается изучить случай, когда $f(\tau(z_1, z_2)) \subset P^+$, т. е. дуги $f(\tau)$ и $f(\gamma)$ лежат по одну сторону от прямой P. В этом случае для области $G := B_0 \cap B_1$ ее образ $f(G)$ (жорданова область, ограниченная дугами $f(\tau)$ и $f(\gamma)$) содержится в P^+.

Положим $\Omega := \operatorname{segm}(f(\gamma))$ и возьмем какую-нибудь точку $t_0 \in \gamma(z_1, z_2)$. Известно (лемма 7), что $f(t_0)$ не является точкой вогнутости относительно $f(B_0)$. Это означает, что имеется открытая окрестность U точки $f(t_0)$, в которой не существует поддуги $f(\gamma[t_1, t_2]) \subset f(\gamma)$, удовлетворяющей требованиям (Ф1)–(Ф3). Возьмем точки $t_1, t_2 \in \gamma$ так, чтобы $t_0 \in \gamma(t_1, t_2)$ и $f(\gamma[t_1, t_2]) \subset U$. По лемме 5 $f(\gamma[t_1, t_2])$ не пересекается с $\lambda(f(t_1), f(t_2))$ и жорданов сегмент $\omega := \operatorname{segm}(f(\gamma[t_1, t_2]))$ содержится в Ω. Для дуги $f(\gamma[t_1, t_2])$ выполнены требования (Ф1), (Ф2). Значит, требование (Ф3) не должно выполняться для этой дуги. Это означает, что для любой открытой окрестности V точки $f(t_0)$ множество $V \cap \omega$ пересекается с областью $f(B_0)$. Так как при этом $\omega \subset \Omega$, то

$$(V \cap \Omega) \cap f(B_0) \neq \varnothing. \tag{8.1}$$

Поскольку $t_0 \in B_1$, то $B((t_0, \delta)) \subset B_1$ при достаточно малом $\delta > 0$, поэтому $B(t_0, \delta) \cap B_0 = B(t_0, \delta) \cap (B_0 \cap B_1) = B(t_0, \delta) \cap G$. Положив $V = f(B(t_0, \delta))$, получаем из (8.1) соотношение $f(B(t_0, \delta)) \cap \Omega \cap f(G) \neq \varnothing$. Но область $f(G)$ содержится либо в Ω, либо в $P^+ \setminus \overline{\Omega}$. Полученное соотношение показывает, что $f(G) \cap \Omega \neq \varnothing$, т. е. $f(G) \subset \Omega$. Следовательно, $f(\tau(z_1, z_2)) \subset \Omega$.

Теперь возьмем на дуге $f(\tau(z_1, z_2))$ какую-нибудь точку $f(t_0')$, $t_0' \in \tau(z_1, z_2)$. По лемме 7 (в применении к окружности T) $f(t_0')$ не может быть точкой распрямления. Обозначим $\Omega' := \operatorname{segm}(f(\tau))$ и заметим, что $\Omega' \subset \Omega$ и $\Omega' \cap f(G) = \varnothing$. По лемме 5 о малых хордах для любой круговой дуги $\tau[t_1', t_2'] \subset \tau$ ее образ $f(\tau[t_1', t_2'])$ не пересекается с $\lambda(f(t_1'), f(t_2'))$, т. е. корректно определен жорданов сегмент $\omega' := \operatorname{segm}(f(\tau[t_1', t_2']))$, при этом $\omega' \subset \Omega'$. Таким образом, для произвольно заданной открытой окрестности U' точки $f(t_0')$ можно построить дугу $f(\tau[t_0', t_1']) \subset U'$, удовлетворяющую требованиям (Ф1), (Ф2). Покажем, что для этой дуги выполнено также и требование (Ф3). Построим круг $B(t_0', \delta')$ столь малого радиуса $\delta' > 0$, чтобы выполнялись равенство $B(t_0', \delta') \cap B_1 = B(t_0', \delta') \cap G$ и включение $V' := f(B(t_0', \delta')) \subset \Omega$. Тогда для ω' имеем соотношение

$$(\omega' \cap V') \cap f(B_1) = \omega' \cap (f(B(t_0', \delta') \cap B_1)) = \omega' \cap f(B(t_0') \cap G)$$
$$= \omega' \cap V' \cap f(G) \subset \Omega' \cap f(G) = \varnothing.$$

Это означает, что для дуги $f(\tau[t_1', t_2']) \subset U'$ выполнены все требования (Ф1)–(Ф3), и, следовательно, $f(t_0')$ — точка вогнутости относительно $f(B_1)$. Но это противоречит лемме 7 для окружности T.

Таким образом, изучаемый случай $f(\tau(z_1, z_2)) \subset P^+$ невозможен. Следовательно, утверждение (Б2), а вместе с ним и лемма 8 полностью доказаны.

Доказательство теоремы. Необходимость выполнения условия $\mathscr{P}(\alpha)$ хорошо известна (см. [16, свойство B]). Доказываем достаточность локального свойства $\mathscr{P}(\alpha)$ при фиксированном $\alpha \in (0, 2\pi)$. Для любой точки $z_0 \in D_0 := D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$ построим открытый круг $W \subset D_0$, на котором ограничение гомеоморфизма f удовлетворяет условию $\mathscr{P}(\alpha)$. Применив лемму 3 (если $\alpha \in (0, \pi]$) или лемму 8 (если $\alpha \in (\pi, 2\pi)$), находим открытый круг $W_0 \subset W$ с центром в точке z_0 такой, что образ любой окружности $\Sigma \subset W_0$ при отображении f является окружностью. Тогда по теореме Каратеодори [2, теорема 2]) отображение $f|W_0$ мёбиусово. Тем самым доказана локальная мёбиусовость гомеоморфизма f в области D'. Так как мёбиусовы преобразования, совпадающие на непустом открытом множестве, совпадают на $\overline{C}$ (см., например, [5, упражнение 3.6.2]), из локальной мёбиусовости отображения f следует существование мёбиусова автоморфизма $\mu : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$, ограничение которого на области D совпадает с f. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Альфорс Л.* Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве. М.: Мир, 1986.
2. *Carathéodory C.* The most general transformations of plane regions which transform circles into circles // Bull. Amer. Math. Soc. 1937. V. 43. P. 537–579.
3. *Höfer R.* A characterization of Möbius transformations // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 128, N 4. P. 1197–1201.
4. *Зелинский Ю. Б.* Об инвариантных на подмножествах отображениях // Теория приближений и смежные вопросы анализа и топологии. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. С. 25–35.
5. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986.
6. *Benz W.* Characterization of geometrical mappings under mild hypothesis: Über ein modernes Forschungsgebiet der Geometrie // Hamb. Beitr. Wiss. Gesch. 1994. V. 15. P. 393–409.
7. *Кузьминых А. В.* О единичных базах евклидовой метрики // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 4. С. 843–846.
8. *Lester J. A.* Euclidean plane point-transformations preserving unit perimeter // Arch. Math. 1985. V. 45. P. 561–564.

9. *Rassias Th. M.* Some remarks on isometric mappings // Facta Univ. Ser. Math. Inform. 1987. V. 2. P. 49–52.
10. *Khamsemanan N., Connelly R.* Two-distance preserving functions // Beitr. Algebra Geom. 2002. V. 43, N 2. P. 557–564.
11. *Богатая С. И., Богатый С. А., Фролкина О. Д.* Аффинность отображений, сохраняющих объем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2001. № 6. С. 10–14.
12. *Фролкина О. Д.* Аффинность отображений, сохраняющих угол // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2002. № 2. С. 60–63.
13. *Chubarev A., Pinelis I.* Fundamental theorem of geometry without the 1-to-1 assumption // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 127. P. 2735–2744.
14. *Yang Sh., Fang A.* A new characteristic of Möbius transformations in hyperbolic geometry // J. Math. Anal. Appl. 2006. V. 319. P. 660–664.
15. *Li B., Wang Y.* A new characterization for isometries by triangles // New York J. Math. 2009. V. 15. P. 423–429.
16. *Haruki H., Rassias Th.* A new invariant characteristic property of Möbius transformations from standpoint of conformal mapping // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 181. P. 320–327.
17. *Haruki H., Rassias Th.* A new characteristic of Möbius transformations by use of Apollonius points of triangles // J. Math. Anal. Appl. 1996. V. 197. P. 14–22.
18. *Haruki H., Rassias Th.* A new characteristic of Möbius transformations by use of Apollonius quadrilaterals // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. P. 2857–2861.
19. *Haruki H., Rassias Th.* A new characteristic of Möbius transformations by use of Apollonius hexagons // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. P. 2105–2109.
20. *Bulut S., Özgür N. Y.* A new characterization of Möbius transformations by use of Apollonius point of pentagons // Turk. J. Math. 2004. V. 28. P. 299–305.
21. *Beardon A. F., Minda D.* Sphere-preserving maps in inversive geometry // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 130, N 4. P. 987–998.
22. *Kobayashi O.* Apollonius points and anharmonic ratios // Tokyo Math. J. 2007. V. 30. P. 117–119.
23. *Aseev V., Kergilova T.* On transformations that preserve fixed anharmonic ratio // Tokyo Math. J. 2010. V. 33, N 2. P. 365–371.
24. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1966. Т. 1.
25. *Moreno J. P.* An invitation to plane topology // Austral. Math. Soc. Gaz. 2002. V. 29, N 3. P. 149–154.
26. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Достаточные признаки выпуклости // Вопросы глобальной геометрии. Л.: Наука, 1974. С. 3–52. (Зап. науч. семинаров ЛОМИ; Т. 45).

Статья поступила 1 сентября 2010 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
btp@math.nsc.ru

Кергилова Татьяна Александровна
Горно-Алтайский гос. университет, кафедра математического анализа,
ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 649000
kergyl@gmail.com