Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 517.518.23+517.956.22+517.956.226

ОБ ОЦЕНКАХ НОРМ БЕСОВА РЕШЕНИЙ СУБЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Н. Н. Романовский

Аннотация. Рассмотрен один класс линейных субэллиптических уравнений для функций трех переменных. Получены оценки, сходные с оценками Шаудера, норм Бесова производных слабых решений рассматриваемых уравнений с коэффициентами, принадлежащими подходящим пространствам Бесова.

Ключевые слова: субэллиптическое уравнение, группа Гейзенберга, пространство Бесова, оценки Шаудера, сингулярный интегральный оператор, теоремы вложения.

В течение последних десятилетий интенсивно развивается теория субэллиптических уравнений второго порядка (см., например, [1–10]). Несмотря на то, что квадратичная форма при производных второго порядка в таких уравнениях вырожденна в каждой точке, многие свойства решений субэллиптических уравнений аналогичны свойствам решений эллиптических уравнений. Основы теории ультрапараболических и субэллиптических уравнений были заложены в работах А. Н. Колмогорова, Л. Хермандера, О. А. Олейник [11–14].

Линейные субэллиптические уравнения второго порядка обычно записывают в виде

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)X_iX_ju(x) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x)X_iu(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $X_1, \dots, X_m$ — система гладких векторных полей (мы отождествляем операцию дифференцирования вдоль векторного поля с самим векторным полем), удовлетворяющая условию Хермандера ($m < n$). Тем самым если обозначить $V_1 = \operatorname{span}\{X_i \mid i = 1, \dots, m\}$, $V_2 = V_1 + \operatorname{span}\{[X_i, X_j] \mid i, j = 1, \dots, m\}$, $V_3 = V_2 + \operatorname{span}\{[[X_i, X_j], X_k] \mid i, j, k = 1, \dots, m\}$ и т. д., то для некоторого достаточно большого k размерность $V_k(x)$ равняется n для всех x. Матрица $a_{ij}(x)$ должна быть равномерно положительно определена.

Известно, что оценки Шаудера (см., например, [15]) играют важную роль в теории линейных и квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка. В силу некоторых геометрических аспектов пока не удалось доказать прямого аналога глобальных оценок Шаудера для решений субэллиптических уравнений

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (грант № П2224, гос. контракт № 02.740.11.0457) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00662–а).

(см. [16, 17]). Наш подход состоит в том, что мы доказываем оценки, сходные с оценками Шаудера, но сформулированные в терминах норм пространств Бесова, а не пространств Гёльдера. Это позволяет применить некоторые методы и идеи теории пространств Соболева и Бесова (см. [18–20]), легко адаптируемые к субэллиптическому случаю. Кроме того, это позволяет рассмотреть более широкий класс линейных субэллиптических уравнений с более слабыми требованиями регулярности на коэффициенты.

Мы рассматриваем наиболее простой, модельный случай субэллиптических уравнений, часто возникающий в приложениях: $n = 3$, $m = 2$, $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$. Легко видеть, что $[X_1, X_2] = -4\frac{\partial}{\partial x_3}$. Очевидно, что система векторных полей X_1, X_2 удовлетворяет условиям Хермандера. Известно, что поля X_1, X_2 и $\frac{\partial}{\partial x_3}$ образуют стандартный базис алгебры Ли левоинвариантных векторных полей группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1$.

Мы изучаем слабые решения, соответственно записываем уравнение в дивергентном виде:

$$\sum_{i=1}^{2}\left(X_i\sum_{j=1}^{2}a_{ij}(x)X_ju(x) + X_i(b_i(x)u(x))\right) = \sum_{i=1}^{2}X_if_i(x), \quad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^3. \qquad (1)$$

Из равенства $\operatorname{div}(1, 0, 2x_2) = \operatorname{div}(0, 1, -2x_1) = 0$ следует, что $X_i^* = -X_i$, $i = 1, 2$.

Наряду с векторными полями X_1, X_2 рассмотрим поля $\widehat{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$, $\widehat{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$. Векторные поля $\widehat{X}_1$ и $\widehat{X}_2$ правоинвариантны относительно группового умножения на $\mathbb{H}^1$, кроме того, перестановочны с полями X_1, X_2.

Напомним, что групповая операция на $\mathbb{H}^1$ определяется формулой

$$(x_1, x_2, x_3)\bullet(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 - 2x_1y_2 + 2x_2y_1).$$

Единичным элементом e группы $\mathbb{H}^1$ является вектор $(0, 0, 0)$, и $(x_1, x_2, x_3)^{-1} = (-x_1, -x_2, -x_3)$. Операция на $\mathbb{H}^1$ некоммутативна.

Рассмотрим анизотропную метрику на $\mathbb{H}^1$ (или на $\mathbb{R}^3$), заданную формулой $\rho(x, y) = |x^{-1}\bullet y|_a$, где $|(x_1, x_2, x_3)|_a = \left(\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 + x_3^2\right)^{1/4}$.

Известно (см. [1]), что функция $\chi(x) = |x|_a^{-2}$ является фундаментальным решением для оператора $\Delta_{\mathscr{L}}u = X_1^2u + X_2^2u$, т. е. для любой гладкой финитной функции u выполняется равенство

$$u(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\Delta_{\mathscr{L}}u(x)\frac{1}{|x|_a^2}\,dx.$$

В силу левоинвариантности векторных полей X_1, X_2 из последнего равенства вытекает (см. [1]), что

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\Delta_{\mathscr{L}}u(x\bullet y)\frac{1}{|y|_a^2}\,dy.$$

Выполнив замену переменных $z = x\bullet y$ и учтя, что якобиан отображения $y\mapsto x\bullet y$ тождественно равен единице, имеем эквивалентное равенство

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\Delta_{\mathscr{L}}u(z)\frac{1}{\rho(x, z)^2}\,dz.$$

Оператор
$$If(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Delta_{\mathscr{L}} f(x \bullet y) K(y)\, dy$$
называется *оператором левой свертки* с ядром K на $\mathbb{H}^1$. Для сингулярных ядер, т. е. ядер, удовлетворяющих соотношениям
$$K(tx_1, tx_2, t^2x_3) = t^{-4}K(x_1, x_2, x_3),\ t > 0, \quad \int\limits_{r<|x|_a<R} K(x)\, dx = 0,\ 0 < r < R < \infty,$$
доказана ограниченность в L_p, $1 < p < \infty$, оператора левой свертки (см. [21, 22]).

Фундаментальное решение для оператора $\Delta_{\mathscr{L}}$ имеет интегрируемую особенность. Нетрудно показать, что при двукратном дифференцировании ядра χ вдоль векторных полей X_1, X_2 получается сингулярное ядро (см. [23–25]).

Пусть U — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, $1 \le p \le \infty$. Определим пространство Соболева $WX_p^1(U)$ как пополнение $C^\infty(\overline{\Omega})$ по норме
$$\|f\|_{WX_p^1(U)} = \|f\|_{L_p(U)} + \sum_{i=1}^{2} \|X_i f\|_{L_p(U)}.$$

Обозначим через $\delta_{Y,h} f(x)$ h-разность функции f в точке x вдоль траектории некоторого гладкого векторного поля Y, т. е. выражение $f(\exp_{Y,h}(x)) - f(x)$, где функция $w(h) = \exp_{Y,h}(x)$ представляет собой единственное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{d}{dh} w(h) = Y(w(h))$, удовлетворяющее условию Коши $w(0) = x$.

Для векторных полей X_1, X_2, $\widehat{X}_1$, $\widehat{X}_2$ выполняются равенства
$$\delta_{X_1,h} f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1 + h, x_2, x_3 + 2hx_2) - f(x_1, x_2, x_3),$$
$$\delta_{X_2,h} f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2 + h, x_3 - 2hx_1) - f(x_1, x_2, x_3),$$
$$\delta_{\widehat{X}_1,h} f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1 + h, x_2, x_3 - 2hx_2) - f(x_1, x_2, x_3),$$
$$\delta_{\widehat{X}_2,h} f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2 + h, x_3 + 2hx_1) - f(x_1, x_2, x_3).$$
Отметим, что операторы $\delta_{X_i,h}$ перестановочны с операторами $\delta_{\widehat{X}_j,h}$, $i, j = 1, 2$, так же, как операторы дифференцирования вдоль векторных полей X_i перестановочны с операторами дифференцирования вдоль векторных полей $\widehat{X}_j$. Кроме того, перестановочны операторы $\delta_{X_i,h}$ и $\widehat{X}_j$, $\delta_{\widehat{X}_i,h}$ и X_j, $i, j = 1, 2$. Естественно, что операторы $\delta_{X_1,h}$ и $\delta_{X_2,h}$, а также $\delta_{\widehat{X}_1,h}$ и $\delta_{\widehat{X}_2,h}$ не перестановочны.

Фиксируем $0 < r \le 1$, $0 < s \le 1$, $1 \le p \le \infty$. Рассмотрим полунормы
$$[f]_{BX_p^{0,s}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_0^1 \biggl(\frac{\|\delta_{\widehat{X}_i,h} f\|_{L_p(\Omega_h^i)}}{h^s} \biggr) \frac{1}{h}\, dh,$$
$$[f]_{BX_p^{1,s}(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_0^1 \biggl(\frac{\|\delta_{\widehat{X}_j,h} X_i f\|_{L_p(\Omega_h^j)}}{h^s} \biggr) \frac{1}{h}\, dh,$$
$$[f]_{BX_p^{r,s}(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \biggl(\frac{\|\delta_{X_i,h_1} \delta_{\widehat{X}_j,h_2} f\|_{L_p(\Omega^{i,j}_{h_1,h_2})}}{h_1^r h_2^s} \biggr) \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_2}\, dh_1 dh_2,$$

где

$$\Omega_h^j = \{x \in \Omega \mid \exp_{\widehat{X}_j,s}(x) \in \Omega,\ s \in [0,h]\},$$

$$\Omega_{h_1,h_2}^{i,j} = \{x \in \Omega \mid \exp_{X_i,s_1}(\exp_{\widehat{X}_j,s_2}(x)) \in \Omega,\ s_1 \in [0,h], s_2 \in [0,h]\}.$$

Определим пространство $BX_p^{r,s}(\Omega)$ $(1 \le p \le \infty,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le s \le 1)$ как пополнение пространства $C^\infty(\overline{\Omega})$ по норме $\|u\|_{BX_p^{r,s}(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)} + [u]_{BX_p^{r,s}(\Omega)}$.

Определим несколько эквивалентных выписанным выше полунорм. Отметим, что

$$\exp_{X_2,-h}(\exp_{X_1,-h}(\exp_{X_2,h}(\exp_{X_1,h}(x_1,x_2,x_3)))) = (x_1,x_2,x_3 - 4h^2).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f(&\exp_{X_2,-h}(\exp_{X_1,-h}(\exp_{X_2,h}(\exp_{X_1,h}(x_1,x_2,x_3))))) \\ &\qquad - f(\exp_{X_1,-h}(\exp_{X_2,h}(\exp_{X_1,h}(x_1,x_2,x_3)))) \\ &+ f(\exp_{X_1,-h}(\exp_{X_2,h}(\exp_{X_1,h}(x_1,x_2,x_3)))) - f(\exp_{X_2,h}(\exp_{X_1,h}(x_1,x_2,x_3))) \\ &\quad + f(\exp_{X_2,h}(\exp_{X_1,h}(x_1,x_2,x_3))) - f(\exp_{X_1,h}(x_1,x_2,x_3)) \\ &\quad + f(\exp_{X_1,h}(x_1,x_2,x_3)) - f(x_1,x_2,x_3) = f(\exp_{e_3,-4h^2}(x)) - f(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Аналогично

$$\exp_{\widehat{X}_2,-h}(\exp_{\widehat{X}_1,-h}(\exp_{\widehat{X}_2,h}(\exp_{\widehat{X}_1,h}(x_1,x_2,x_3)))) = (x_1,x_2,x_3 + 4h^2).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f(&\exp_{\widehat{X}_2,-h}(\exp_{\widehat{X}_1,-h}(\exp_{\widehat{X}_2,h}(\exp_{\widehat{X}_1,h}(x_1,x_2,x_3))))) \\ &\qquad - f(\exp_{\widehat{X}_1,-h}(\exp_{\widehat{X}_2,h}(\exp_{\widehat{X}_1,h}(x_1,x_2,x_3)))) \\ &+ f(\exp_{\widehat{X}_1,-h}(\exp_{\widehat{X}_2,h}(\exp_{\widehat{X}_1,h}(x_1,x_2,x_3)))) - f(\exp_{\widehat{X}_2,h}(\exp_{\widehat{X}_1,h}(x_1,x_2,x_3))) \\ &\quad + f(\exp_{\widehat{X}_2,h}(\exp_{\widehat{X}_1,h}(x_1,x_2,x_3))) - f(\exp_{\widehat{X}_1,h}(x_1,x_2,x_3)) \\ &\quad + f(\exp_{\widehat{X}_1,h}(x_1,x_2,x_3)) - f(x_1,x_2,x_3) = f(\exp_{e_3,4h^2}(x)) - f(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Из этих вычислений следует, что

$$\int_0^1 \left(\frac{\|\delta_{e_3,h^2} f\|_{L_p(\Omega_h^{1,2})}}{h^s}\right) \frac{1}{h}\, dh \le C[f]_{BX_p^{0,s}(\Omega)}.$$

Таким образом, полунорма

$$\int_0^1 \left(\frac{\|\delta_{e_3,h^2} f\|_{L_p(\Omega_h^{1,2})}}{h^s}\right) \frac{1}{h}\, dh + [f]_{BX_p^{0,s}(\Omega)}$$

эквивалентна полунорме $[f]_{BX_p^{0,s}(\Omega)}$.

Далее, определим

$$\delta_{\varphi,\theta;h} f(x) = f(\exp_{\cos(\varphi)\cos(\theta)X_1,h}(\exp_{\sin(\varphi)\cos(\theta)X_2,h}(\exp_{\sin(\theta)e_3,h^2}(x)))) - f(x).$$

Аналогично

$$\hat{\delta}_{\varphi,\theta;h} f(x) = f(\exp_{\cos(\varphi)\cos(\theta)\widehat{X}_1,h}(\exp_{\sin(\varphi)\cos(\theta)\widehat{X}_2,h}(\exp_{\sin(\theta)e_3,h^2}(x)))) - f(x).$$

Положим
$$[f]_{BX_p^{0,s}(\Omega),1}=\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\Big(\frac{\|\delta_{\varphi,\theta;h}f\|_{L_p(\Omega^{1,2}_{h,h})}}{h^s}\Big)\frac{1}{h}\,dhd\varphi d\theta.$$
Аналогично определим $[f]_{BX_p^{1,s}(\Omega),1}$, $[f]_{BX_p^{r,s}(\Omega),1}$, где $0<r<1$.

Несложно показать, что полунормы $[f]_{BX_p^{0,s}(\Omega)}$ и $[f]_{BX_p^{0,s}(\Omega),1}$ эквивалентны. Действительно, учитывая, что якобиан отображения $x\mapsto \exp_{\widehat{X}_i,h}(x)$ тождественно равен единице, где h произвольно, $i=1,2$, получаем, что для любых φ, θ
$$\int\limits_0^1\Big(\frac{\|\delta_{\varphi,\theta;h}f\|_{L_p(\Omega^{1,2}_h)}}{h^s}\Big)\frac{1}{h}\,dh\le C[f]_{BX_p^{1,s}(\Omega)}.$$
Интегрируя последнее неравенство, выводим $[f]_{BX_p^{1,s}(\Omega),1}\le C[f]_{BX_p^{1,s}(\Omega)}$. Для того чтобы вывести обратное соотношение $[f]_{BX_p^{1,s}(\Omega)}\le C[f]_{BX_p^{1,s}(\Omega),1}$, достаточно еще раз использовать равенство единице якобиана отображения $x\mapsto \exp_{\widehat{X}_i,h}(x)$, тривиальное равенство
$$\delta_{\widehat{X}_i,h}f(x)=-\delta_{\widehat{X}_i,-h}f(\exp_{\widehat{X}_i,h}(x)),$$
а также неравенство $\|f\|_{L_p(U)}\le\frac{1}{2}(\|f-g\|_{L_p(U)}+\|f+g\|_{L_p(U)})$.

Те же вычисления помогают доказать для $0<r\le 1$ эквивалентность полунорм $[f]_{BX_p^{r,s}(\Omega)}$ полунормам $[f]_{BX_p^{r,s}(\Omega),1}$.

Как и ранее, рассмотрим $\rho(x,y)=|x^{-1}\bullet y|_a$, где $|(x_1,x_2,x_3)|_a=\big((x_1^2+x_2^2)^2+x_3^2\big)^{1/4}$, $\bullet$ обозначает операцию на $\mathbb{H}^1$. Также рассмотрим
$$\hat\rho(x,y)=|x^{-1}*y|_a,$$
где $x^{-1}=(-x_1,-x_2,-x_3)$, $x*y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3+2x_1y_2-2x_2y_1)$. Относительно групповой операции $*$ векторные поля $\widehat{X}_i$, $i=1,2$, будут левоинвариантны. Напомним, что векторные поля $\widehat{X}_i$ являются правоинвариантными относительно операции на $\mathbb{H}^1$. Будем называть группу $\widehat{\mathbb{H}}^1=(\mathbb{R}^3,*)$ и соответствующую метрику $\hat\rho(x,y)$ *сопряженными группе* $\mathbb{H}^1$ *и метрике* $\rho(x,y)$.

Рассмотрим полунорму
$$[f]_{BX_p^{0,s}(\Omega),2}=\int\limits_0^1\bigg(\int\limits_{\Omega_h}\bigg(\frac{1}{|\widehat{B}(x,h)|}\int\limits_{\widehat{B}(x,h)}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{h^{sp}}\,dy\bigg)^{\frac{1}{p}}dx\bigg)\frac{1}{h}\,dh,$$
где $\widehat{B}(x,h)=\{y\in\mathbb{R}^3\mid\hat\rho(x,y)<h\}$, $\Omega_h=\{x\in\Omega\mid\hat\rho(x,\partial\Omega)>h\}$. Легко видеть, что полунормы $[f]_{BX_p^{r,s}(\Omega),1}$ и $[f]_{BX_p^{r,s}(\Omega),2}$ эквивалентны. Для этого достаточно выполнить замену переменных в интеграле $\int\limits_{\widehat{B}(x,h)}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{h^{sp}}\,dy$ и перейти к аналогу сферической системы координат на группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ (см. [25]).

Определение полунормы $[f]_{BX_p^{r,s}(\Omega),2}$ может быть адаптировано для функций, заданных на двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$. Более того, оно может быть адаптировано для функций, заданных на некотором замкнутом подмножестве

$\mathbb{R}^3$. Пусть M — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^3$, μ — борелевская мера на M. Рассмотрим

$$[f]_{BX_p^{0,s}(M,\mu)} = \int_0^1 \Bigg(\int_M \bigg(\frac{1}{\mu(\widehat{B}(x,h)\cap M)} \int_{\widehat{B}(x,h)\cap M} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{h^{sp}}\,d\mu(y)\bigg)^{\frac{1}{p}} d\mu(x)\Bigg)\frac{1}{h}\,dh.$$

Если мера μ удовлетворяет условию $C_1r^d \le \mu(B(x,r)\cap M) \le C_2r^d$, $C_1 > 0$, то говорят, что (M,μ) *удовлетворяет d-условию Альфорса.* В работах Йонсона и Валлина [26, 27] доказаны теоремы о следах и о продолжении функций классов Соболева и Бесова для (M,μ), удовлетворяющих d-условию Альфорса, обобщающие теоремы о следах и о продолжении для d-мерных многообразий (как в отношении того, что рассматривается более широкий класс множеств, так и того, что размерность по Альфорсу может быть дробной). Такой подход удачен во многих отношениях. Для обобщенных пространств Бесова, характеризующихся через разности вдоль траекторий векторных полей, он наиболее приемлем и был использован в работах [28–35]. В этих работах впервые даны аналогичные сформулированным выше определения, а также доказаны теоремы о продолжении функций класса Бесова, заданных на множестве, удовлетворяющем d-условию Альфорса (в частности, на кусочно гладкой гиперповерхности) [36].

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — кусочно гладкая поверхность. Будем говорить, что $x \in S$ является *характеристической точкой*, если касательная плоскость к S в точке x совпадает с «горизонтальной» плоскостью в точке x, т. е. с $\operatorname{span}\{X_1(x), X_2(x)\}$. Нетрудно заметить, что если кусочно гладкая поверхность не имеет характеристических точек (в тех местах, где поверхность не является гладкой, одновременно рассматриваются касательные плоскости ко всем примыкающим частям), то она вместе со стандартной плоской лебеговой мерой удовлетворяет 3-условию Альфорса (мера гейзенбергова шара равна Cr^4). При этом для любой ограниченной кусочно гладкой поверхности S выполняется $C_1r^3 \le |B(x,r)\cap S| \le C_2r^2$.

Если рассмотреть вместе с S меру, которая задается весовой функцией $g(x)$, равной длине проекции единичной нормали в точке x к поверхности S на «горизонтальную» плоскость или (для ограниченной S) расстоянию от x до замкнутого множества характеристических точек, то получим $(S, g(x)d\sigma)$, удовлетворяющую 3-условию Альфорса. Доказательство этих утверждений можно найти в работах [28–31].

Пусть S — кусочно гладкая поверхность, лежащая внутри области Ω, положим

$$[f]_{BX_p^{0,s}(S)} = \int_0^1 \Bigg(\int_S \bigg(\frac{1}{|\widehat{B}(x,h)\cap S|} \int_{\widehat{B}(x,h)\cap S} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{h^{sp}}\hat{g}(y)\,dy\bigg)^{\frac{1}{p}} \hat{g}(x)\,dx\Bigg)\frac{1}{h}\,dh,$$

где $|\widehat{B}(x,h)\cap S|$ — весовая мера пересечения шара $\widehat{B}(x,h)$ по метрике $\hat{\rho}$ с поверхностью S, $\hat{g}$ — упомянутая весовая функция, соответствующая S и подрасслоению $\operatorname{span}\{\widehat{X}_1(x), \widehat{X}_2(x)\}$. Аналогично определим

$$[f]_{BX_p^{r,0}(S)} = \int_0^1 \Bigg(\int_S \bigg(\frac{1}{|B(x,h)\cap S|} \int_{B(x,h)\cap S} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{h^{rp}}g(y)\,dy\bigg)^{\frac{1}{p}} g(x)\,dx\Bigg)\frac{1}{h}\,dh,$$

где $B(x,h) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \rho(x,y) < h\}$ — шар в метрике Гейзенберга.

Предложение 1 [28, 31]. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — кусочно гладкая поверхность (естественно, S — замкнутое множество), U — ограниченная область с гладкой границей и S содержится в U. Тогда существуют ограниченный оператор продолжения E из $BX_2^{1/2,0}(S)$ в $WX_2^1(U)$, а также ограниченный оператор следа Tr из $WX_2^1(U)$ в $BX_2^{1/2,0}(S)$.*

Отметим, что при доказательстве теоремы о продолжении нужна только оценка $C_1 r^3 \le |B(x,r)|$, поэтому если требуется только теорема о продолжении, то любую кусочно гладкую поверхность можно рассматривать со стандартной плоской мерой без веса. Несмотря на то, что теоремы о следах доказываются обычно в предположении задания рассматриваемых функций во всем $\mathbb{R}^3$, в нашем случае можно воспользоваться результатом о продолжении функций классов WX_p^1, заданных в области, удовлетворяющей (ϵ,δ)-условию [37, 38]. Действительно, в силу двухступенчатости группы Гейзенберга всякая C^2-гладкая область $\mathbb{R}^3$ удовлетворяет (ϵ,δ)-условию относительно метрики Гейзенберга.

Рассмотрим полунорму, характеризующую поведение функции f вблизи границы:

$$[f]_{BGX_p^{r,s}(\Omega)} = \sum_i^2 \int_0^1 \left(\frac{[\delta_{\widehat{X}_i,h} f]_{BX_p^{r,0}(\partial\Omega_h^i)}}{h^s}\right)\frac{1}{h}\,dh.$$

Определим теперь соответствующую норму:

$$\|u\|_{BGX_p^{r,s}(\Omega)} = [f]_{BGX_p^{r,s}(\Omega)} + \|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть $a_{ij} \in BX_{p_1}^{0,s}(\Omega)$, $b_i \in BX_{p_2}^{0,s}(\Omega)$, $f_i \in BX_2^{0,s}(\Omega)$, где $i,j = 1,2$, $0 < s < 1$, $p_1 > \frac{4}{s}$, $p_2 > \frac{4}{1+s}$, Ω — ограниченная область с гладкой границей. Предположим, что квадратичная форма a_{ij} симметрична и равномерно положительно определена, λ — постоянная эллиптичности квадратичной формы a_{ij}. Тогда любое слабое решение уравнения (1) удовлетворяет неравенству*

$$[u]_{BX_2^{1,s}(\Omega)} \le C(\lambda, \max_{i,j}\|a_{ij}\|_{BX_{p_1}^{0,s}(\Omega)}, \max_i \|b_i\|_{BX_{p_2}^{0,s}(\Omega)}, s) \\ \times (\max_i \|f_i\|_{BX_2^{0,s}(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{BGX_2^{1/2,s}(\Omega)}).$$

Сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

Для пространств $BX_p^{s,r}(\Omega)$ так же, как и для пространств Соболева, имеем важные в дальнейшем теоремы вложения. Эти теоремы могут, в частности, быть получены с помощью интегральных представлений через разности вдоль векторных полей X_i, $i = 1,2$, и $\widehat{X}_j$, $j = 1,2$.

Лемма 1. *Пусть $0 \le r \le 1$, $0 \le s \le 1$, $1 < p < \infty$. Пусть $U \subset \mathbb{H}^1$ ограничена и удовлетворяет условию гейзенбергова конуса (см. [25]). Предположим, что $4 > rp$. Тогда имеет место следующее вложение функциональных пространств:*

$$BX_p^{r,s}(U) \hookrightarrow BX^{0,s}_{\frac{4p}{4-rp}}(U).$$

Предположим, что $4 > sp$. Тогда имеет место следующее вложение функциональных пространств:

$$BX_p^{r,s}(U) \hookrightarrow BX^{r,0}_{\frac{4p}{4-sp}}(U).$$

Пусть $4 < sp$. *Тогда*

$$BX_p^{0,s}(U) \hookrightarrow CX^{s-\frac{4}{p}}(U),$$

где $CX^\alpha(U)$ — *пространство функций, непрерывных по Гёльдеру с показателем* α *в смысле метрики* $\hat\rho(x,y)$.

Также нам в дальнейшем понадобятся интерполяционные неравенства для пространств $BX_p^{r,s}(\Omega)$, аналогичные интерполяционным неравенствам для пространств Гёльдера, используемым при доказательстве оценок Шаудера.

Лемма 2. *Пусть пара* (r_1, s_1) *строго меньше пары* (r_2, s_2), *т. е.* $0 \le r_1 < r_2 \le 1$, $0 \le s_1 \le s_2 \le 1$, *либо* $0 \le r_1 \le r_2 \le 1$, $0 \le s_1 < s_2 \le 1$. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{H}^1$ — *ограниченная область с гладкой границей. Фиксируем точку* $x_0 \in \Omega$, $\rho > 0$. *Обозначим* $B = B(x_0, \rho)$, $2B = B(x_0, 2\rho)$. *Фиксируем* $1 \le p < \infty$.

Тогда для любого положительного ε *найдется* $C(\varepsilon) > 0$ *такое, что для всякой функции* $u \in BX_p^{r_2,s_2}(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\|u\|_{BX_p^{r_1,s_1}(B\cap\Omega)} \le \varepsilon \|u\|_{BX_p^{r_2,s_2}(2B\cap\Omega)} + C(\varepsilon)\|u\|_{L_p(2B\cap\Omega)}.$$

Фиксируем $0 \le r \le 1$, $0 \le s \le 1$. *Пусть* $q < \frac{4p}{4-rp}$. *Тогда для любого положительного* ε *найдется* $C(\varepsilon) > 0$ *такое, что для всякой функции* $u \in BX_p^{r,s}(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\|u\|_{BX_q^{0,s}(B\cap\Omega)} \le \varepsilon \|u\|_{BX_p^{r,s}(2B\cap\Omega)} + C(\varepsilon)\|u\|_{L_p(2B\cap\Omega)}.$$

Замечание. Доказательство теорем вложения и интерполяционных оценок, сформулированных в леммах 1 и 2, полностью аналогично доказательству теорем вложения и интерполяционных оценок для обычных пространств Бесова [19, 20]. Такие оценки доказываются с помощью интегральных представлений через разности вдоль координатных линий, а также свойств интеграла типа потенциала. Интегралы типа потенциала на группах имеют необходимые свойства (см., например, [2, 4, 9]). Интегральные представления через разности можно получить, рассмотрев сначала одномерный случай, а затем использовав переход к сферической системе координат. На группах Гейзенберга имеется аналог сферической системы координат, с помощью которой выведено интегральное представление, подобное представлению Соболева (см. [25]). По поводу теорем вложения для рассматриваемых в настоящей работе функциональных пространств см. [31].

В дальнейшем нам также понадобится ограниченность операторов левой свертки с сингулярными ядрами на группе $\mathbb{H}^1$ в смысле норм пространств $BX_p^{0,s}$, $1 < p < \infty$, $0 \le s \le 1$.

В известной работе Кнаппа и Стейна [21] доказывается ограниченность в L_p, $1 < p < \infty$, операторов левой свертки с сингулярными ядрами на общих группах Карно (группа Гейзенберга содержится в этом классе конечномерных групп Ли), см. также [39].

Под оператором левой свертки на группе $\mathbb{H}^1$ понимается оператор вида

$$T : f \mapsto \int f(x \bullet y) K(y)\, dy,$$

где $\bullet$ обозначает групповую операцию $\mathbb{H}^1$.

Мы называем $K \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ (нулевой вектор в $\mathbb{R}^3$ есть единица в $\mathbb{H}^1$) *сингулярным ядром в* $\mathbb{H}^1$, если выполняются следующие условия:

(i) K положительно однородно порядка -4 относительно семейства растяжений на группе, т. е. $K(tx_1, tx_2, t^2x_3) = t^{-4}K(x_1, x_2, x_3)$ для любого $t > 0$;

(ii) K удовлетворяет условию сокращения, т. е.

$$\int\limits_{r<|x|_a<R} K(x)\,dx = 0,$$

где $R > r > 0$, $|x|_a = \left(\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 + x_3^2\right)^{\frac{1}{4}}$.

Поскольку ядро K положительно однородно, последнее неравенство выполняется для любых $R > r > 0$, если оно справедливо для некоторых $R_1 > r_1 > 0$.

Лемма 3. *Пусть ядро K сингулярно, т. е. удовлетворяет условиям* (i) *и* (ii). *Предположим, что функция f принадлежит $BX_p^{0,s}(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < \infty$, $0 \leq s \leq 1$. Обозначим через $B(0,\varepsilon)$ шар по метрике Гейзенберга радиуса ε с центром в начале координат* (*единице группы*). *Тогда существует предел*

$$T_l f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,\varepsilon)} K(y \bullet x^{-1}) f(y)\,dy,$$

также принадлежащий $BX_p^{0,s}(\mathbb{R}^3)$, причем линейный оператор T_l ограничен, т. е. выполняется неравенство $\|T_l f\|_{BX_p^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \leq \gamma_p \|f\|_{BX_p^{0,s}(\mathbb{R}^3)}$, где постоянная γ_p не зависит от f.

Доказательство. Будем использовать правоинвариантность векторных полей $\widehat{X}_1$, $\widehat{X}_2$ относительно групповой операции на $\mathbb{H}^1$ аналогично тому, как применяется левоинвариантность векторных полей X_1, X_2 при построении фундаментального решения для оператора Δ_L.

Рассмотрим функцию $g_y : x \mapsto f(x \bullet y)$. Ясно, что

$$\delta_{\widehat{X}_i,h}(T_l f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,\varepsilon)} K(y)[\delta_{\widehat{X}_i,h} g_y](x)\,dy.$$

В силу правоинвариантности векторных полей $\widehat{X}_i$ имеем

$$[\delta_{\widehat{X}_i,h} g_y](x) = [\delta_{\widehat{X}_i,h} g](x \bullet y).$$

Далее,

$$\delta_{\widehat{X}_i,h}(T_l f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,\varepsilon)} K(y)[\delta_{\widehat{X}_i,h} g](x \bullet y)\,dy.$$

Таким образом, можно воспользоваться результатом Кнаппа и Стейна [21] об ограниченности оператора T_l в L_p, $1 < p < \infty$. В итоге имеем

$$\|\delta_{\widehat{X}_i,h}(T_l f)\|_{L_p(\Omega)} \leq C(p)\|\delta_{\widehat{X}_i,h} f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Просуммировав последнее неравенство по $i = 1, 2$ и проинтегрировав по h, приходим к требуемой оценке

$$\|T_l f\|_{BX_p^{0,s}(\Omega)} \leq \gamma_p \|f\|_{BX_p^{0,s}(\Omega)}.$$

Замечание. Аналогичную оценку можно доказать для норм Никольского, определенных через разностные отношения вдоль траекторий векторных полей $\widehat{X}_i$, а также для норм Гёльдера, соответствующих метрике $\hat{\rho}$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Как и в классическом доказательстве оценок Шаудера, используем метод замораживания коэффициентов (см. [15]). Для каждого $0 < r \leq 1$ построим подходящее конечное покрытие области Ω гейзенберговыми шарами радиуса r. Обозначим эти шары через $B_k = B(x_k, r)$, $k = 1, \dots, M(r)$.

Шары $4B_k = B(x_k, 4r)$ также образуют покрытие Ω. Мы можем предполагать, что кратность покрытия Ω шарами $4B_k$ не превосходит целого положительного числа N, не зависящего от r. Позже фиксируем достаточно малое число $r > 0$.

В области $2B_k \cap \Omega$ перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{2} X_i \left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij}(x_k) X_j u(x) \right) = \sum_{i=1}^{2} X_i \left(\sum_{j=1}^{2} (a_{ij}(x_k) - a_{ij}(x)) X_j u(x) \right) - \sum_{i=1}^{2} X_i (b_i(x) u(x)) + \sum_{i=1}^{2} X_i f_i(x) \equiv \sum_{i=1}^{2} X_i F^i_{k,u}(x). \quad (4)$$

В левой части уравнения (4) стоит линейный оператор с постоянными коэффициентами при $X_i X_j u$.

В дальнейшем потребуются оценки решений следующего линейного субэллиптического уравнения, которое в дальнейшем будем называть *уравнением с постоянными коэффициентами.*

Лемма 4. *Пусть A_{ij} — постоянная симметрическая 2×2-матрица, $\det(A) > 0$. Предположим, что $F_i \in BX_2^{0,s}(\Omega)$, $i = 1, 2$, область Ω имеет гладкую границу. Пусть B — шар по метрике Гейзенберга с центром в точке $x \in \Omega$ радиуса $r > 0$ и $2B$ — шар с центром в точке x радиуса $2r > 0$.*

Тогда для любого слабого решения u уравнения

$$\sum_{i=1}^{2} \left(X_i \sum_{j=1}^{2} A_{ij} X_j u(x) \right) = \sum_{i=1}^{2} X_i F_i(x)$$

выполняется оценка

$$[u]_{BX_2^{1,s}(B\cap\Omega)} \leq C(\|A^{-1}\|, \Omega) \times \left(\|F\|_{BX_2^{0,s}(2B\cap\Omega)} + \|u\|_{BX_2^{\frac{1}{2},s}(2B\cap\Omega)} + \sum_{i}^{2} \int_0^1 \left(\frac{[\delta_{\widehat{X}_i,h} u]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(2B\cap\partial\Omega_h^i)}}{h^s} \right) \frac{1}{h}\, dh \right).$$

Доказательство. Применив несложные вычисления, с помощью линейной замены координат (x_1, x_2, x_3) можно привести рассматриваемое уравнение к виду

$$\Delta_L u = \sum_{i=1}^{2} X_i \widetilde{F}_i(x),$$

где $\Delta_L u = X_1^2 u + X_2^2 u$.

Действительно, с помощью подходящей линейной замены переменных можно перевести любые линейные комбинации $A_{11}X_1 + A_{12}X_2$ и $A_{21}X_1 + A_{22}X_2$, где $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \neq 0$, в X_1 и X_2 соответственно. Такая замена переменных строится следующим образом. Рассмотрим линейную замену переменных в $\mathbb{R}^2$, переводящую векторы (A_{11}, A_{12}) и (A_{21}, A_{22}) в e_1 и e_2 соответственно. Разложим это преобразование в композицию ортогонального преобразования Q и преобразования T растяжения вдоль координатных осей, определяемого матрицей $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Искомым преобразованием $\mathbb{R}^3$ будет композиция преобразования, определяемого матрицей $\overline{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в случае, когда $|Q| > 0$, либо матрицей $\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ в случае, когда $|Q| < 0$, и матрицей $\overline{T}$, равной $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}$. Это легко проверить непосредственными вычислениями, принимая во внимание конкретный вид векторных полей X_1 и X_2.

Используя фундаментальное решение χ для оператора L-лапласиана Δ_L, можно разложить любое решение $\tilde{u}$ последнего уравнения в сумму $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$, где

$$\tilde{u}_1 = \left(\sum_{i=1}^{2} X_i \widetilde{F}_i(x) \right) * \chi,$$

$\tilde{u}_2$ — L-гармоническая функция, т. е. функция, удовлетворяющая уравнению $\Delta_L \tilde{u}_2 = 0$. Оператор свертки (точнее говоря, левой свертки) понимаем в групповом смысле, т. е.

$$(f * \chi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x \bullet y)\chi(y)\, dy,$$

где $\bullet$ — групповая операция на $\mathbb{H}^1$.

Отметим, что в силу гладкости границы области Ω мы можем продолжить функцию $\sum\limits_{i=1}^{2} X_i \widetilde{F}_i(x)$ во внешность области Ω с сохранением соответствующего функционального класса (см., например, [28, 31, 32, 37]). Таким образом, свертка определена корректно.

Перейдем к оценке величины $[\tilde{u}_1]_{BX_2^{1,s}((QT)^{-1}(B\cap\Omega))}$. Выше явно выписано фундаментальное решение χ для оператора Δ_L. Оно имеет неизотропную особенность -2. Нетрудно видеть, что вторые производные χ вдоль векторных полей X_1, X_2 будут удовлетворять всем условиям леммы 3. Таким образом, соответствующие операторы левой свертки ограничены в $BX_2^{0,s}$. Отсюда следует, что

$$[\tilde{u}_1]_{BX_2^{1,s}((QT)^{-1}(B\cap\Omega))} \le C \sum_{i=1}^{2} [\widetilde{F}_i(x)]_{BX_2^{0,s}((QT)^{-1}(B\cap\Omega))},$$

где $C = \gamma_2 C(\|A^{-1}\|, \Omega)$, γ_2 — норма оператора свертки из леммы 3, $C\left(\|A^{-1}\|, \Omega\right)$ определяется по норме оператора продолжения из $BX_2^{1,s}((QT)^{-1}(B \cap \Omega))$ в $BX_2^{1,s}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку функция $\widetilde{F}_i(x)$ получена из $F_i(x)$ линейной заменой переменных, имеем

$$[u_1]_{BX_2^{1,s}(B\cap\Omega)} \le C(\|A^{-1}\|, \Omega) \sum_{i=1}^{2} \left[F^i_{k,u}(x)\right]_{BX_2^{1,s}(2B_k\cap\Omega)}. \tag{5}$$

Для того чтобы получить оценку нормы u_2, используем подход, основанный на применении вариационного метода решения задачи Дирихле (см. [18]), позволяющий оценить норму Соболева гармонической (L-гармонической) функции через норму ее граничных значений. Этот подход предложен в ставших классическими работах С. М. Никольского и О. В. Бесова (см., например, [19, 20]). Для L-гармонических функций этот подход был адаптирован в [28, 29] (см. также [40]).

С. М. Никольский и О. В. Бесов установили, что наиболее точно такая оценка может быть получена в терминах пространств обобщенно дробно-дифференцируемых функций, заданных на границе, т. е. в терминах пространств Никольского и Бесова.

Напомним вкратце схему получения оценки соболевской нормы гармонической функции через норму ее граничных значений.

Известно, что решение u задачи Дирихле в области Ω минимизирует функционал Дирихле, который равен полунорме $[u]_{W_2^1(\Omega)}$. Отсюда сразу следует, что для того чтобы доказать для решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ оценку $[u]_{W_2^1(\Omega)} \leq C\|u\|_{F(\partial\Omega)}$, где F — некоторое нормированное пространство функций, заданных на $\partial\Omega$, достаточно построить ограниченный по полунорме оператор продолжения $E : F(\partial\Omega) \to W_2^1(\Omega)$, т. е. оператор, для которого $E(f)|_{\partial\Omega} = f$ и $[E(f)]_{W_2^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{F(\partial\Omega)}$.

В нашем случае легко показать, что любое решение w в области V уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} X_i X_j w = 0 \tag{6}$$

минимизирует среди функций, совпадающих с w на границе V, функционал

$$\int_V \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} X_i w X_j w$$

(предполагаем, что собственные значения матрицы A больше нуля).

Действительно, пусть g принадлежит пополнению $C_0^\infty(V)$ по норме пространства $WX_2^1(V)$. Тогда

$$\int_V \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} X_i (w+g) X_j (w+g) = \int_V \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} X_i w X_j w \\ + 2\int_V \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} X_i w X_j g + \int_V \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} X_i g X_j g. \tag{7}$$

Второе слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю в силу того, что w есть решение (6), третье слагаемое неотрицательно ввиду положительной определенности A.

Следовательно, в случае достаточной регулярности области V для всякого решения w уравнения (6) в V из существования ограниченного оператора продолжения из $BX_2^{\frac{1}{2},0}(\partial V)$ в $WX_2^1(V)$ (см. предложение 1) вытекает оценка

$$\int_V \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} X_i w X_j w \leq \|A\| \|E(V)\| [w]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(\partial V)},$$

где $\|E(V)\|$ обозначает норму оператора продолжения из $BX_2^{\frac{1}{2},0}(\partial V)$ в $WX_2^1(V)$. Отсюда

$$\int\limits_V (X_i w)^2 \le \|A^{-1}\| \|E(V)\| [w]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(\partial V)}. \tag{8}$$

Рассмотрим семейство областей $V_s = B(x_0, s) \cap V$, где $x_0 \in V$, область V ограничена и имеет кусочно гладкую границу, $s \in [r, 2r]$, r достаточно мало. Граница области V_s представляет собой кусочно гладкую поверхность, следовательно, можно применить предложение 1. Метод доказательства этих оценок позволяет заключить, что в силу кусочной гладкости границы V и малости r нормы операторов продолжения $E(\partial V_s)$ могут быть оценены сверху константой C, не зависящей от s.

Используя (8), получаем

$$\sum_{i=1}^{2} \|X_i w\|_{L_2(V_1)} \le \sum_{i=1}^{2} \|X_i w\|_{L_2(V_s)} \le C(A)[w]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(\partial V_s)}. \tag{9}$$

Проинтегрируем левую и правую части неравенства (9) по s от r до $2r$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{2} \|X_i w\|_{L_2(V_1)} \le C(A)[w]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(\partial V \cap 2B)} + C(A) \int\limits_r^{2r} [w]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(V \cap \partial B_s)}\, ds.$$

Рассмотрим

$$\int\limits_r^{2r} [w]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(V \cap \partial B_s)}\, ds.$$

Повторяя рассуждения, которые мы применили для доказательства неравенства $[f]_{BX_p^{1,s}(\Omega)} \le C[f]_{BX_p^{1,s}(\Omega),1}$, т. е. используя тривиальное равенство

$$\delta_{\widehat{X}_i,h} f(x) = -\delta_{\widehat{X}_i,-h} f(\exp_{\widehat{X}_i,h}(x)),$$

а также неравенство

$$\|f\|_{L_2(U)} \le \frac{1}{2}(\|f-g\|_{L_2(U)} + \|f+g\|_{L_2(U)}),$$

и переходя к сферической системе координат на группе Гейзенберга, выводим оценку

$$\int\limits_r^{2r} [w]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(V \cap \partial B_s)}\, ds \le C[w]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(V \cap 2B)}.$$

В итоге получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{2} \|X_i w\|_{L_2(V \cap B)} \le C(A)([w]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(V \cap 2B)} + [w]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(\partial V \cap 2B)}).$$

Фиксируем $j \in \{1,2\}$, $h \in (0,1)$. В силу перестановочности операторов X_i и $\delta_{\widehat{X}_j,h}$ функция $w = \delta_{\widehat{X}_j,h} u_2$ будет удовлетворять уравнению (6). Применим последнее неравенство для $V = \Omega_{h,j}$, $w = \delta_{\widehat{X}_j,h}u_2$. Получим, что для всех $j \in \{1,2\}$, $h \in (0,1)$ выполняется оценка

$$\sum_{i=1}^{2} \|X_i\delta_{\widehat{X}_j,h}u_2\|_{L_2(\Omega_{h,j}\cap B)} \\ \le C(A)([\delta_{\widehat{X}_j,h}u_2]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(\Omega_{h,j}\cap 2B)} + [\delta_{\widehat{X}_j,h}u_2]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(\partial\Omega_{h,j}\cap 2B)}).$$

Разделив левую и правую части последнего равенства на h^s и проинтегрировав по h от 0 до 1, имеем

$$[u_2]_{BX_2^{1,s}(\Omega\cap B)} \le C(A)\left([u_2]_{BX_2^{\frac{1}{2},s}(\Omega\cap 2B)} + \sum_i^2 \int_0^1 \left(\frac{[\delta_{\widehat{X}_i,h}u_2]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(2B\cap\partial\Omega_h^i)}}{h^s}\right)\frac{1}{h}\,dh\right).$$

Суммируя оценки для u_1 и u_2, выводим следующую оценку для u:

$$[u]_{BX_2^{1,s}(\Omega\cap B)} \le [u_1]_{BX_2^{1,s}(\Omega\cap B)} + [u_2]_{BX_2^{1,s}(\Omega\cap B)} \le C(A)\Bigg([F]_{BX_2^{0,s}(\Omega\cap B)} \\ + [u_2]_{BX_2^{\frac{1}{2},s}(\Omega\cap 2B)} + \sum_i^2 \int_0^1 \left(\frac{[\delta_{\widehat{X}_i,h}u_2]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(2B\cap\partial\Omega_h^i)}}{h^s}\right)\frac{1}{h}\,dh\Bigg) = C(A)\Bigg([F]_{BX_2^{0,s}(\Omega\cap B)} \\ + [u-u_1]_{BX_2^{\frac{1}{2},s}(\Omega\cap 2B)} + \sum_i^2 \int_0^1 \left(\frac{[\delta_{\widehat{X}_i,h}(u-u_1)]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(2B\cap\partial\Omega_h^i)}}{h^s}\right)\frac{1}{h}\,dh\Bigg) \\ \le C(A)\Bigg(\|F\|_{BX_2^{0,s}(\Omega\cap B)} + [u]_{BX_2^{\frac{1}{2},s}(\Omega\cap 2B)} + \sum_i^2 \int_0^1 \left(\frac{[\delta_{\widehat{X}_i,h}u]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(2B\cap\partial\Omega_h^i)}}{h^s}\right)\frac{1}{h}\,dh \\ + \sum_i^2 \int_0^1 \left(\frac{[\delta_{\widehat{X}_i,h}u_1]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(2B\cap\partial\Omega_h^i)}}{h^s}\right)\frac{1}{h}\,dh\Bigg). \quad (10)$$

Оценим последнее слагаемое в правой части неравенства (10):

$$\sum_i^2 \int_0^1 \left(\frac{[\delta_{\widehat{X}_i,h}u_1]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(2B\cap\partial\Omega_h^i)}}{h^s}\right)\frac{1}{h}\,dh \le [u_1]_{BGX_2^{\frac{1}{2},s}(\partial(\Omega\cap 2B))} \\ \le C[u_1]_{BX_2^{1,s}(\Omega\cap 2B)} \le \widetilde{C}[F]_{BX_2^{0,s}(\Omega\cap 2B)}. \quad (11)$$

Здесь использована ограниченность оператора следа $\mathrm{Tr} : BX_2^{1,s}(\Omega\cap 2B) \to BGX_2^{\frac{1}{2},s}(\Omega\cap 2B)$, легко вытекающая из равномерной по $h \in [0,1]$ ограниченности операторов следа $\mathrm{Tr} : WX_2^1(\Omega_h^i \cap 2B) \to BX_2^{\frac{1}{2},0}(\partial(\Omega_h^i\cap 2B))$, которая имеет место в силу предложения 1. Объединяя оценки (10) и (11), завершаем доказательство леммы 4.

Для того чтобы использовать лемму 4 в доказательстве теоремы, необходимо оценить $\|F_{k,u}^i(x)\|_{BX_2^{1,s}(2B_k\cap\Omega)}$ (см. (4)). Фиксируем $l \in \{1,2\}$. Имеем

$$F_{k,u}^l(x) = \sum_{j=1}^{2}(a_{lj}(x_k) - a_{lj}(x))X_ju(x) - b_l(x)u(x) + f_l(x). \quad (12)$$

Рассмотрим $i \in \{1, 2\}$. В силу неравенства треугольника

$$\|\delta_{\widehat{X}_i,h} F^l_{k,u}\|_{L_2} \le \left\| \sum_{j=1}^{2} \delta_{\widehat{X}_i,h}(a_{lj}(x_k) - a_{lj}(x)) X_j u \right\|_{L_2} + \|\delta_{\widehat{X}_i,h}(b_l u)\|_{L_2} + \|f_l\|_{L_2}.$$

Используем формулу, представляющую аналог формулы Лейбница для разностей вдоль траекторий векторных полей:

$$\delta_{\widehat{X}_i,h}(fg)(x) = f(\exp_{\widehat{X}_i,h}(x))\delta_{\widehat{X}_i,h} g(x) + g(x)\delta_{\widehat{X}_i,h} f(x).$$

В дальнейшем также будем использовать тождественное равенство единице якобиана отображения $x \mapsto \exp_{\widehat{X}_i,h}(x)$.

Имеем

$$\begin{aligned}\|\delta_{\widehat{X}_i,h} F^l_{k,u}\|_{L_2(2B_k\cap\Omega^i_h)} &\le \left\| \sum_{j=1}^{2}(a_{lj}(x_k) - a_{lj}(x))\delta_{\widehat{X}_i,h} X_i u(\exp_{\widehat{X}_i,h}(x)) \right\|_{L_2(2B_k\cap\Omega^i_h)} \\ &+ \|\delta_{\widehat{X}_i,h} a X_j u\|_{L_2(2B_k\cap\Omega^i_h)} + \|b_l(\exp_{\widehat{X}_i,h}(x))\delta_{\widehat{X}_i,h} u\|_{L_2(2B_k\cap\Omega^i_h)} \\ &+ \|u\delta_{\widehat{X}_i,h} b\|_{L_2(2B_k\cap\Omega^i_h)} + \|\delta_{\widehat{X}_i,h} f\|_{L_2(2B_k\cap\Omega^i_h)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Для оценки величины слагаемых в правой части последнего неравенства применим следующую схему. В силу неравенства Гёльдера

$$\int f^2 g^2 \le \left(\int f^{2p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^{2q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

где p, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Также

$$\int f^2 g^2 \le \operatorname{ess\,sup}\ g^2 \int f^2.$$

Если известно, что $f \in L_{2p}$, $p > 1$, то для оценки $\int f^2 g^2$ необходимо, чтобы g принадлежала L_{2q}, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Если f принадлежит только L_2, то g должна принадлежать L_∞.

Кроме того, используем теоремы вложения и интерполяционные неравенства, т. е. леммы 1 и 2.

Оценим первое слагаемое в правой части (12). Для краткости обозначим через a матричнозначную функцию a_{lj}. Имеем $a \in BX^{0,s}_{p_1}$. Поскольку по условию теоремы $p_1 s > 4$, из теорем вложения следует, что a непрерывна по Гёльдеру с показателем $s - \frac{4}{p_1}$ в смысле метрики $\hat{d}$.

Таким образом, уменьшая радиус r шаров B_k, можно сделать величину $\left\| \sum\limits_{j=1}^{2}(a_{lj}(x_k) - a_{lj}(x)) \right\|_{L_\infty(2B_k\cap\Omega)}$ сколь угодно малой. Тем самым для любого ε можно подобрать такое r, что

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j=1}^{2}(a_{lj}(x_k) - a_{lj}(x))\delta_{\widehat{X}_i,h} X_j u(\exp_{\widehat{X}_i,h}(x)) \right\|_{L_2(2B_k\cap\Omega^i_{2h})} \\ \le \varepsilon \|a\|_{BX^{0,s}_{p_1}(4B_k\cap\Omega)} \|\delta_{\widehat{X}_i,h} X_j u\|_{L_2}\big(2B_k \cap \Omega^i_h\big).\end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (12). В силу теорем вложения $BX^{1,s}_2 \hookrightarrow BX^{1,0}_{\frac{4}{2-s}}$. Следовательно, $X_j u \in L_{\frac{4}{2-s}}$. Более того, из интерполяционных неравенств вытекает, что для любых $p < \frac{4}{2-s}$ и $\varepsilon > 0$ найдется $C(\varepsilon) > 0$ такая, что

$$\|X_j u\|_{L_p(2B_k\cap\Omega^i_h)} \le \varepsilon [u]_{BX^{1,s}_2(4B_k\cap\Omega^i_h)} + C(\varepsilon)\|u\|_{L_2(2B_k\cap\Omega^i_h)}.$$

Имеем

$$\|\delta_{\widehat{X}_i,h} a X_j u\|_{L_2(2B_k\cap\Omega_h^i)} \le \Bigg(\int\limits_{2B_k\cap\Omega_h^i} |X_j u|^{2q}\Bigg)^{\frac{1}{q}} \Bigg(\int\limits_{2B_k\cap\Omega_h^i} |\delta_{\widehat{X}_i,h} a|^{2q'}\Bigg)^{\frac{1}{q'}},$$

где $q, q' > 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Пусть $2q' > \frac{4}{s}$, тогда $q' > \frac{2}{s}$, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{q'} > 1 - \frac{s}{2}$, $q < \frac{1}{1-\frac{s}{2}} = \frac{2}{2-s}$.

Отсюда если $\delta_{\widehat{X}_i,h} a \in L_{p_1}\big(2B_k\cap\Omega_h^i\big)$ и $p_1 > \frac{4}{s}$, то в силу леммы 2 для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\begin{aligned}\|\delta_{\widehat{X}_i,h} a X_j u\|_{L_2(2B_k\cap\Omega_h^i)} \le \varepsilon \|\delta_{\widehat{X}_i,h} a\|_{L_{p_1}(4B_k\cap\Omega_h^i)} [u]_{BX_2^{1,s}(4B_k\cap\Omega_h^i)} \\ + C(\varepsilon)\|\delta_{\widehat{X}_i,h} a\|_{L_{p_1}(4B_k\cap\Omega_h^i)} \|u\|_{L_2(2B_k\cap\Omega_h^i)}.\end{aligned}$$

Рассмотрим третье слагаемое $\|b_l(\exp_{\widehat{X}_i,h}(x))\delta_{\widehat{X}_i,h} u\|_{L_2(2B_k\cap\Omega_h^i)}$. Имеем $b \in BX_{p_2}^{0,s} \hookrightarrow L_{\frac{4p_2}{4-p_2 s}}$, $\delta_{\widehat{X}_i,h} u \in BX_2^{1,0} \hookrightarrow L_4$. Мы можем повторить предыдущие выкладки, используя интерполяционные неравенства (лемму 2) и неравенство Гёльдера в том случае, если $\frac{4p_2}{4-p_2 s} > 4$. Последнее неравенство эквивалентно $\frac{p_2}{4-p_2 s} > 1$, $p_2 > 4 - p_2 s$, $p_2(s+1) > 4$, $p_2 > \frac{4}{s+1}$ $(0 < s < 1)$, что в точности содержится в условии теоремы.

Рассмотрим, наконец, четвертое слагаемое $\|u\delta_{\widehat{X}_i,h} b\|_{L_2(2B_k\cap\Omega_h^i)}$. Повторяя предыдущие рассуждения, приходим к оценке

$$\begin{aligned}\|u\delta_{\widehat{X}_i,h} b\|_{L_2(2B_k\cap\Omega_h^i)} \le \varepsilon \|\delta_{\widehat{X}_i,h} b\|_{L_{p_2}(4B_k\cap\Omega_h^i)} [u]_{BX_2^{1,s}(4B_k\cap\Omega_h^i)} \\ + C(\varepsilon)\|\delta_{\widehat{X}_i,h} b\|_{L_{p_2}(4B_k\cap\Omega_h^i)} \|u\|_{L_2(2B_k\cap\Omega_h^i)}\end{aligned}$$

при условии, что $p_2 > p$, где p определяется из равенства $\frac{1}{\frac{p}{2}} + \frac{1}{\frac{2}{1-s}} = 1$, эквивалентного $\frac{2}{p} + \frac{1-s}{2} = 1$, $4 + (1-s)p = 2p$, $4 = p(1+s)$, $p = \frac{4}{1+s}$. Тем самым имеем $p_2 > \frac{4}{1+s}$, что совпадает с условием теоремы.

Окончательно, объединяя доказанные неравенства, получаем оценку для полунормы $F_{k,u}^i$:

$$\begin{aligned}\big[F_{k,u}^i\big]_{BX_2^{1,s}(2B_k\cap\Omega)} \le (\|a\|_{BX_{p_1}^{0,s}(4B_k\cap\Omega)} + \|b\|_{BX_{p_2}^{0,s}(4B_k\cap\Omega)})(\gamma(r)[u]_{BX_2^{1,s}(4B_k\cap\Omega)} \\ + \varepsilon[u]_{BX_2^{1,s}(4B_k\cap\Omega)} + C(\varepsilon)\|u\|_{L_2(2B_k\cap\Omega)}) + [f]_{BX_2^{0,s}(2B_k\cap\Omega)}, \quad (14)\end{aligned}$$

где $\gamma(r) \to 0$ при $r \to 0$, ε — произвольное положительное число.

Последнее неравенство вместе с равенством (4) и леммой 4 влекут следующую оценку решения уравнения (1):

$$\begin{aligned}\|u\|_{BX_2^{1,s}(B_k\cap\Omega)} \le C(\|a(x_k)^{-1}\|, \Omega, \|a\|_{BX_{p_1}^{0,s}(4B_k\cap\Omega)}, \|b\|_{BX_{p_2}^{0,s}(4B_k\cap\Omega)}) \\ \times \Bigg(\|f\|_{BX_2^{0,s}(2B_k\cap\Omega)} + \|u\|_{BX_2^{\frac{1}{2},s}(2B_k\cap\Omega)} + (\varepsilon+\gamma(r))[u]_{BX_2^{1,s}(4B_k\cap\Omega)} \\ + C(\varepsilon)\|u\|_{L_2(2B_k\cap\Omega)} + \sum_i^2 \int\limits_0^1 \Bigg(\frac{[\delta_{\widehat{X}_i,h} u]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(2B_k\cap\partial\Omega_h^i)}}{h^s}\Bigg)\frac{1}{h}\,dh\Bigg). \quad (15)\end{aligned}$$

Просуммируем равенство (15) по k. С учетом того, что шары B_k покрывают область Ω, покрытие замыкания области Ω шарами $4B_k$ конечнократно и его кратность не зависит от радиуса шаров r, имеем

$$\|u\|_{BX_2^{1,s}(\Omega)} \le C(\max_k \|a(x_k)^{-1}\|, \Omega, \|a\|_{BX_{p_1}^{0,s}(\Omega)}, \|b\|_{BX_{p_2}^{0,s}(\Omega)})(\|f\|_{BX_2^{0,s}(\Omega)} + \|u\|_{BX_2^{\frac{1}{2},s}(\Omega)} + (\varepsilon+\gamma(r))[u]_{BX_2^{1,s}(\Omega)} + C(\varepsilon)\|u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{BGX_2^{\frac{1}{2},s}(\Omega)}). \quad (16)$$

Заметим, что слагаемое $\|u\|_{BX_2^{\frac{1}{2},s}(\Omega)}$ может быть оценено с помощью интерполяционного неравенства (см. лемму 2). Следовательно,

$$\|u\|_{BX_2^{1,s}(\Omega)} \le C(\max_k \|a(x_k)^{-1}\|, \Omega, \|a\|_{BX_{p_1}^{0,s}(\Omega)}, \|b\|_{BX_{p_2}^{0,s}(\Omega)}) \times (\|f\|_{BX_2^{0,s}(\Omega)} + (\varepsilon+\varepsilon'+\gamma(r))[u]_{BX_2^{1,s}(\Omega)} + C(\varepsilon,\varepsilon')\|u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{BGX_2^{\frac{1}{2},s}(\Omega)}). \quad (17)$$

Наконец, выбрав r, ε, ε' достаточно малыми для того, чтобы выполнялось

$$C(\lambda, \Omega, \|a\|_{BX_{p_1}^{0,s}(\Omega)}, \|b\|_{BX_{p_2}^{0,s}(\Omega)})(\varepsilon+\varepsilon'+\gamma(r)) < 1,$$

получаем требуемое неравенство

$$\|u\|_{BX_2^{1,s}(\Omega)} \le C(\lambda, \Omega, \|a\|_{BX_{p_1}^{0,s}}, \|b\|_{BX_{p_2}^{0,s}}, s) \times (\|f\|_{BX_2^{0,s}(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{BGX_2^{\frac{1}{2},s}(\Omega)}). \quad (18)$$

Теорема доказана.

Замечание. Как и классическая оценка Шаудера, неравенство (18) помогает построить метод нахождения решения краевой задачи для уравнения (1). Классическая оценка Шаудера позволяет воспользоваться методом продолжения по параметру для нахождения решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения. Неравенство (18) помогает решить задачу Неймана для уравнения (1). Действительно, если известно, что значения нормальной производной на границе области Ω равны нулю, то можно утверждать, что $[\delta_{\widehat{X}_i,h}u]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(\partial\Omega_h^i)}$ убывает достаточно быстро при $h\to 0$. Отсюда $[u]_{BGX_2^{\frac{1}{2},s}(\Omega)}$ не превосходит

$$\sum_i^2 \left(\int_{h_\varepsilon}^1 \left(\left[\frac{\delta_{\widehat{X}_i,h}f}{h^s} \right]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(\partial\Omega_h^i)} \right) \frac{1}{h}\,dh + \varepsilon \int_0^1 \left(\left[\frac{\delta_{\widehat{X}_i,h}f}{h^s} \right]_{BX_2^{\frac{1}{2},0}(\partial\Omega_h^i)} \right) dh \right) \le C(\varepsilon)\|u\|_{WX_2^1(\Omega)} + \varepsilon[u]_{BX_2^{1,s}}, \quad (19)$$

где h_ε не зависит от u. Последнее неравенство вытекает из ограниченности оператора продолжения. Воспользовавшись интерполяционным неравенством и подставив результаты в оценку (18), получим

$$\|u\|_{BX_2^{1,s}(\Omega)} \le C(\lambda, \Omega, \|a\|_{BX_{p_1}^{0,s}}, \|b\|_{BX_{p_2}^{0,s}}, s)(\|f\|_{BX_2^{0,s}(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}).$$

Последняя оценка позволяет применить стандартные методы функционального анализа для построения решения задачи Неймана для уравнения (1).

Автор выражает благодарность рецензенту за ряд полезных замечаний и предложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Folland G. B.* A fundamental solution for a subelliptic operator // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. V. 79, N 2. P. 373–376.
2. *Stein E. M.* Harmonic analysis: real-variables methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
3. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes; V. 28).
4. *Coifman R., Weiss G.* Analyse harmonique noncommutative sur certains espaces homogenes. Berlin: Springer-Verl., 1971.
5. *Folland G. B.* Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups // Ark. Math. 1975. V. 13. P. 161–207.
6. *Gaveau B., Greiner P., Vauthier J.* Intégrales de Fourier quadratiques et calcul symbolique exact sur le groupe d'Heisenberg // J. Funct. Anal. 1986. V. 68, N 2. P. 248–272.
7. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian Geometry. Boston, MA: Birkhäuser, 1996. P. 79–323. (Birkhäuser Progr. Math.; V. 144).
8. *Hueber H., Müller D.* Asymptotics for some Green kernels on the Heisenberg group and the Martin boundary // Math. Ann. 1989. V. 283, N 1. P. 97–119.
9. *Jerison D.* The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition // Duke Math. J. 1986. V. 53, N 2. P. 503–523.
10. *Müller D., Stein E. M.* L_p-estimates for the wave equation on the Heisenberg group // Rev. Mat. Iberoamericana. 1999. V. 15, N 2. P. 297–334.
11. *Hörmander L.* Hypoelliptic second-order differential equations // Acta Math. 1967. V. 119. P. 147–171.
12. *Колмогоров А. Н.* Zufällige Bewegungen // Ann. Math. 1934. Bd 35, Heft 2. S. 116–117.
13. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Математический анализ. 1969. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 3–252. (Итоги науки. Сер. Математика).
14. *Олейник О. А.* О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Мат. сб. 1966. Т. 69, № 1. С. 111–140.
15. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
16. *Xu C.-J.* Regularity for quasilinear second-order subelliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1992. V. 45, N 1. P. 77–96.
17. *Capogna L., Han Q.* Pointwise Schauder estimates for second order linear equations in Carnot groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2010. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 961).
18. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
19. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
20. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
21. *Knapp, A. W., Stein, E. M.* Intertwining operators for semi-simple groups // Ann. Math. 1971. V. 93. P. 489–578.
22. *Романовский Н. Н.* О проблеме Михлина на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 193–206.
23. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
24. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1996.
25. *Романовский Н. Н.* Интегральные представления и теоремы вложения для функций, заданных на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16, № 2. С. 82–120.
26. *Johnsson A., Wallin H. A.* Whitney extension theorem in L_p and Besov spaces // Ann. Inst. Fourier. 1978. V. 28. P. 139–192.
27. *Johnsson A.* Besov spaces on submanifolds of $\mathbb{R}^n$ // Analysis. 1988. V. 8. P. 225–269.
28. *Danielli D., Garofalo N., Nhieu D.-M.* Non-doubling Ahlfors measures, perimeter measures, and the characterization of the trace spaces of Sobolev functions in Carnot-Carathéodory spaces. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2006. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 182).
29. *Danielli D., Garofalo N., Nhieu D.-M.* Sub-elliptic Besov spaces and the characterization of traces on lower dimensional manifolds // Harmonic analysis and boundary value problems

(Fayetteville, AR, 2000). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001. P. 19–37. (Contemp. Math.; V. 277).

30. *Capogna L., Garofalo N.* Ahlfors type estimates for the perimeter measure in Carnot–Carathedory spaces // J. Geom. Anal. 2006. V. 16, N 3. P. 455–497.

31. *Morbidelli D.* Fractional Sobolev norms and structure of Carnot–Carathéodory balls for Hörmander vector fields // Studia Math. 2000. V. 139. P. 213–244.

32. *Monti R., Morbidelli D.* Some trace theorems for vector fields // Math. Z. 2002. Bd 239. S. 747–776.

33. *Montanari A., Morbidelli D.* Sobolev and Morrey inequalities for vector fields of step two // Z. Anal. Anwend. 2002. Bd 21. S. 135–157.

34. *Водопьянов С. К., Пупышев И. М.* Следы функций из пространства Соболева на множествах Альфорса групп Карно // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1201–1221.

35. *Водопьянов С. К., Пупышев И. М.* Теоремы типа Уитни о продолжении функций на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 731–752.

36. *Ambrosio L.* Some fine properties of sets of finite perimeter in Ahlfors regular metric measure spaces // Adv. Math. 2001. V. 159. P. 51–67.

37. *Garofalo N., Nhieu D. M.* Lipschitz continuity, global smooth approximations and extension theorems for Sobolev functions in Carnot–Carathéodory spaces // J. Anal. Math. 1998. V. 74. P. 67–97.

38. *Грешнов А. В.* Продолжение дифференцируемых функций за границу области на группах Карно // Тр. Ин-та математики РАН. Сиб. отд-ние. 1996. Т. 31. С. 161–186.

39. *Sanchez-Calle A.* Fundamental solutions and geometry of sum of squares of vector fields // Inv. Math. 1984. V. 78. P. 143–160.

40. *Водопьянов С. К., Романовский Н. Н.* Классы отображений Соболева на пространствах Карно — Каратеодори. Различные нормировки и вариационные задачи // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1028–1045.

Статья поступила 21 мая 2010 г.

Романовский Николай Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`nnrom@math.nsc.ru`