Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 512.542

О СВЯЗИ МЕЖДУ ТЕОРЕМАМИ СИЛОВА И БЭРА — СУДЗУКИ

Д. О. Ревин

Аннотация. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Будем говорить, что для конечной группы G *имеет место π-теорема Силова*, если любые две максимальные π-подгруппы группы G сопряжены (эквивалентно, имеет место полный аналог теоремы Силова для π-подгрупп). Будем говорить также, что для конечной группы G *справедлива π-теорема Бэра — Судзуки*, если в этой группе всякий класс сопряженности, в котором любые два элемента порождают π-подгруппу, сам порождает π-подгруппу. В работе с помощью классификации конечных простых групп доказано, что если для конечной группы справедлива π-теорема Силова, то для нее справедлива и π-теорема Бэра — Судзуки.

Ключевые слова: теорема Бэра — Судзуки, π-теорема Бэра — Судзуки, теорема Силова, π-теорема Силова, свойство D_π.

Введение

В работе всюду через π обозначается некоторое множество простых чисел. Через $\mathscr{G}$ обозначается класс всех конечных групп.

В соответствии с [1] будем писать $G \in \mathscr{E}_\pi$, если в G имеется π-холлова подгруппа (т. е. π-подгруппа, индекс которой не делится на числа из π). Если при этом любые две π-холловы подгруппы сопряжены, то будем писать $G \in \mathscr{C}_\pi$. Если к тому же любая π-подгруппа группы G содержится в некоторой π-холловой подгруппе, то будем писать $G \in \mathscr{D}_\pi$. Таким образом, класс $\mathscr{D}_\pi$ состоит из всех конечных групп, для которых выполнен полный аналог теоремы Силова для π-подгрупп. Следуя [2], будем говорить также, что для конечной группы G *справедлива π-теорема Силова*, если $G \in \mathscr{D}_\pi$. В этих обозначениях классическая теорема Силова [3] равносильна утверждению: $\mathscr{D}_p = \mathscr{G}$ для любого простого числа p. Хорошо известно [4, гл. 5, § 3], что для произвольного множества π простых чисел все включения в цепочке

$$\mathscr{D}_\pi \subseteq \mathscr{C}_\pi \subseteq \mathscr{E}_\pi \subseteq \mathscr{G}$$

могут оказаться строгими.

По аналогии с теоремой Силова будем говорить, что для конечной группы G *справедлива π-теорема Бэра — Судзуки*, и писать $G \in \mathscr{BS}_\pi$, если всякий

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10–01–00391, 11–01–00456 и 10–01–90007), АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракты № 02.740.11.5191 и № 14.740.11.0346), Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ–3669.2010.1).

класс сопряженности группы G, в котором любые два элемента порождают π-подгруппу, сам порождает π-подгруппу. Теорема Бэра — Судзуки [5–7] равносильна утверждению: $\mathscr{BS}_p = \mathscr{G}$ для любого простого числа p.

В [8] в качестве основного результата с помощью классификации конечных простых групп доказано, что $\mathscr{BS}_\pi = \mathscr{G}$ для любого множества π, не содержащего 2. Вместе с тем для произвольного множества π классы $\mathscr{BS}_\pi$ и $\mathscr{G}$, вообще говоря, не совпадают. Более того, класс $\mathscr{BS}_\pi$ может даже не содержать класс $\mathscr{C}_\pi$, как показывает [8, пример 1].

В настоящей работе с помощью классификации конечных простых групп, характеризации групп класса $\mathscr{D}_\pi$ [9] и результатов статьи [8] мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого множества π простых чисел имеет место включение $\mathscr{D}_\pi \subseteq \mathscr{BS}_\pi$.*

Другими словами, *если для конечной группы верна π-теорема Силова, то для нее верна и π-теорема Бэра — Судзуки.* Тем самым подтверждена гипотеза, высказанная автором в [8], и по модулю теоремы Силова получено обобщение теоремы Бэра — Судзуки.

Ранее [8, теорема 5] доказан более слабый результат, а именно $\mathscr{B}_\pi \subseteq \mathscr{BS}_\pi$, где $\mathscr{B}_\pi$ — класс конечных групп, обладающих (суб)нормальным рядом, каждый фактор которого либо является π-группой, либо имеет порядок, делящийся не более чем на одно простое число из π.

Отметим, что включение $\mathscr{D}_\pi \subseteq \mathscr{BS}_\pi$, вообще говоря, строгое. Действительно, как видно из [9, теорема 3] или результатов [10], существует много примеров пар (G, π) таких, что G — конечная группа, π — множество простых чисел, $2 \notin \pi$ и $G \notin \mathscr{D}_\pi$. Вместе с тем $G \in \mathscr{BS}_\pi$ ввиду [8, теорема 1]. Оказывается, несложно доказать существенно более сильный результат.

Теорема 2. *Если π — некоторое множество простых чисел, то любая конечная группа*

(1) *изоморфна некоторой подгруппе,*

(2) *является гомоморфным образом*

некоторой группы из $\mathscr{BS}_\pi$.

Поскольку класс $\mathscr{D}_\pi$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, из теоремы 2 получаем

Следствие 3. *Для любого множества π простых чисел если $\mathscr{D}_\pi \neq \mathscr{G}$, то $\mathscr{D}_\pi \neq \mathscr{BS}_\pi$.*

Объединяя утверждения теоремы 1 и следствия 3, получаем

Следствие 4. *Для любого множества π простых чисел справедливо включение $\mathscr{D}_\pi \subseteq \mathscr{BS}_\pi \subseteq \mathscr{G}$, причем $\mathscr{D}_\pi \subset \mathscr{BS}_\pi$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{D}_\pi \subset \mathscr{G}$.*

Несложно установить также справедливость следующего утверждения, которое вместе со следствием 4 дает исчерпывающую информацию о строгости включения $\mathscr{D}_\pi \subseteq \mathscr{BS}_\pi$.

Теорема 5. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mathscr{B}_\pi = \mathscr{G}$;

(2) $\mathscr{D}_\pi = \mathscr{G}$;

(3) $\mathscr{C}_\pi = \mathscr{G}$;

(4) $\mathscr{E}_\pi = \mathscr{G}$;

(5) $|\pi| \leq 1$ *или* π *совпадает с множеством всех простых чисел.*

Отметим также, что теорема 5 дает также частичное решение вопроса [11, проблема 6] о том, для каких π одно или несколько включений в цепочке

$$\mathscr{B}_\pi \subseteq \mathscr{D}_\pi \subseteq \mathscr{C}_\pi \subseteq \mathscr{E}_\pi \subseteq \mathscr{G}$$

являются равенствами.

Результаты данной статьи можно рассматривать как иллюстрацию эффективности теории $\mathscr{D}_\pi$-групп, разработанной в [9, 12–19].

1. Обозначения, соглашения и предварительные результаты

Как было сказано, через π всегда обозначается некоторое подмножество множества всех простых чисел. Символом π' обозначено множество всех простых чисел, не лежащих в π. Для натурального числа n через $\pi(n)$ будем обозначать множество простых делителей числа n, а для конечной группы G через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$.

Классы $\mathscr{G}$, $\mathscr{E}_\pi$, $\mathscr{C}_\pi$, $\mathscr{D}_\pi$, $\mathscr{B}_\pi$, $\mathscr{BS}_\pi$ определены во введении. Мы используем также следующие обозначения:

$\mathscr{Z}(G)$ — центр группы G;

$\mathscr{O}^\pi(G)$ — π-корадикал группы G, т. е. наименьшая по включению нормальная подгруппа, фактор-группа по которой является π-группой;

$\mathscr{O}_\pi(G)$ — π-радикал группы G, т. е. наибольшая по включению нормальная π-подгруппа;

$\mathscr{N}_G(H)$ — нормализатор в группе G подгруппы H;

$\mathscr{C}_G(H)$ — централизатор в группе G подгруппы H;

$\mathscr{C}_G(x)$ — централизатор в группе G элемента x;

x^G — класс сопряженности группы G, содержащий элемент x;

$\mathrm{Aut}(G)$ — группа автоморфизмов группы G;

$\mathrm{Inn}(G)$ — группа внутренних автоморфизмов группы G.

Для конечной группы G и неотрицательного целого числа m положим

$$\mathscr{O}_\pi^m(G) = \{x \in G \mid \pi(\langle x_1, \dots, x_m\rangle) \subseteq \pi \text{ для любых } x_1, \dots, x_m \in x^G\}.$$

Заметим, что $\mathscr{BS}_\pi$ — это в точности класс всех конечных групп G, для которых

$$\mathscr{O}_\pi^2(G) \subseteq \mathscr{O}_\pi(G).$$

Лемма 6. *Пусть U — π'-подгруппа конечной группы G и $x \in \mathscr{N}_G(U) \setminus \mathscr{C}_G(U)$. Тогда $x \notin \mathscr{O}_\pi^2(G)$.*

Доказательство. Так как $x \notin \mathscr{C}_G(U)$, найдется элемент $u \in U$ такой, что $u^x \neq u$. Имеем

$$u^{-1}u^x = [u, x] = (x^u)^{-1}x \in \langle x, x^u\rangle.$$

Таким образом, $\langle x, x^u\rangle$ не является π-группой, поскольку содержит нетривиальный π'-элемент $u^{-1}u^x \in U$. Значит, $x \notin \mathscr{O}_\pi^2(G)$. $\square$

Лемма 7. *Пусть $\mathscr{X}$ — класс конечных групп, замкнутый относительно взятия нормальных подгрупп, гомоморфных образов и расширений и содержащий все π-группы простых порядков. Допустим, $\mathscr{X} \nsubseteq \mathscr{BS}_\pi$ и группа $G \in \mathscr{BS}_\pi \setminus \mathscr{X}$ выбрана так, что ее порядок является наименьшим из возможных. Тогда группа G содержит подгруппу L и элемент x такие, что*

(1) $L \trianglelefteq G$;

(2) *L является неабелевой простой группой;*

(3) *L не является π- или π'-группой;*

(4) $\mathscr{C}_G(L) = 1$;

(5) $x \in \mathscr{O}^2_\pi(G)$;

(6) *x имеет простой порядок $r \in \pi$;*

(7) $G = \langle x, L\rangle$.

Доказательство. См. [8, лемма 7]. □

Лемма 8. *Пусть G — конечная группа и A — ее нормальная подгруппа. Тогда $G \in \mathscr{D}_\pi$ в том и только в том случае, когда $A, G/A \in \mathscr{D}_\pi$.*

Доказательство. См. [17, теорема 7.7]. □

Лемма 9. *Если $2 \notin \pi$, то $\mathscr{BS}_\pi = \mathscr{G}$.*

Доказательство. См. [8, теорема 1]. □

Лемма 10. $\mathscr{B}_\pi \subseteq \mathscr{BS}_\pi$.

Доказательство. См. [8, теорема 5]. □

Следующее утверждение хорошо известно.

Лемма 11. *Пусть G — конечная группа, $u, v \in G$ — две инволюции. Справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\langle u, v\rangle$ — группа диэдра порядка $2|uv|$;*

(2) $\langle uv\rangle \trianglelefteq \langle u, v\rangle$;

(3) *каждый элемент из $\langle u, v\rangle \setminus \langle uv\rangle$ является инволюцией и инвертирует любой элемент из $\langle uv\rangle$;*

(4) *центр $\mathscr{Z}(\langle u, v\rangle)$ тривиален, если $|uv|$ нечетно, и совпадает с единственной подгруппой $\langle z\rangle$ порядка 2 группы $\langle uv\rangle$, если $|uv|$ четно;*

(5) *если $|uv|$ нечетно, то все инволюции в $\langle u, v\rangle$ сопряжены, а если четно, то $\langle u, v\rangle$ содержит ровно три класса сопряженных инволюций с представителями z, v и vz соответственно, где z — единственная инволюция из $\langle uv\rangle$.*

2. Некоторые свойства групп лиева типа

Необходимые сведения о группах лиева типа (например, об обозначениях, подгруппах и автоморфизмах) можно найти в [20, 21]. В частности, в [21] можно найти определение и необходимые свойства подгруппы Бореля, параболической подгруппы, максимального тора и т. д.

Лемма 12 (теорема Бореля — Титса). *Пусть $\widehat{L}$ — группа внутренне-диагональных автоморфизмов некоторой лиева типа L, определенной над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p, и пусть Q — p-подгруппа группы $\widehat{L}$. Тогда существует параболическая подгруппа $\widehat{P}$ группы $\widehat{L}$ такая, что $Q \le \mathscr{O}_p(\widehat{P})$ и $\mathscr{N}_{\widehat{L}}(Q) \le \widehat{P}$.*

Доказательство следует из [22, (13–1)]. □

Лемма 13. *Пусть L — простая группа лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$ нечетной характеристики p, P — собственная параболическая подгруппа группы L и $U = \mathscr{O}_p(P)$ — унипотентный радикал группы P. Тогда*[1] $\mathscr{C}_{\mathrm{Aut}(L)}(U) \leq U$.

Доказательство. См. [22, (13–2)]. □

Применительно к автоморфизмам групп лиева типа будем использовать следующую терминологию, близкую к принятой в [21] и несколько отличающуюся от принятой в [20]. Остановимся на этом более подробно.

Понятия внутренне-диагонального автоморфизма в [20] и [21] совпадают и не отличаются от используемого нами. В [21, определение 2.5.10] введены подгруппы Φ_K и Γ_K в группе автоморфизмов произвольной группы лиева типа K. Для групп лиева типа будем использовать обычно букву L, поэтому соответствующие подгруппы будем обозначать через Φ_L и Γ_L. Эти подгруппы можно отождествить соответственно с группами полевых и графовых автоморфизмов группы L в смысле [20]. Через $\widehat{L}$ будет обычно обозначаться группа внутренне-диагональных автоморфизмов группы L.

Лемма 14. *Пусть L — простая группа лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p. Тогда $\mathrm{Aut}(L)$ является расщепляемым расширением группы $\widehat{L}$ с помощью группы $\Phi_L\Gamma_L$. При этом $\Phi_L\Gamma_L \simeq \Phi_L \times \Gamma_L$, за исключением следующих случаев:*

(1) $L = B_2(q)$, *q является степенью 2 и $\Phi_L\Gamma_L$ — циклическая группа такая, что* $|\Phi_L\Gamma_L : \Phi_L| = 2$;

(2) $L = F_4(q)$, *q является степенью 2 и $\Phi_L\Gamma_L$ — циклическая группа такая, что* $|\Phi_L\Gamma_L : \Phi_L| = 2$;

(3) $L = G_2(q)$, *q является степенью 3 и $\Phi_L\Gamma_L$ — циклическая группа такая, что* $|\Phi_L\Gamma_L : \Phi_L| = 2$.

Доказательство. См. [21, теорема 2.5.12]. □

Для группы L нормального лиева типа автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(L) \setminus \widehat{L}$ будем называть

полевым по модулю $\widehat{L}$, если образ α в $\mathrm{Aut}(L)/\widehat{L}$ лежит в $\Phi_L\widehat{L}/\widehat{L}$; при этом элементы группы Φ_L будем называть *каноническими полевыми автоморфизмами* группы L;

графовым по модулю $\widehat{L}$, если L отлична от $B_2(2^n)$, $F_4(2^n)$ и $G_2(3^n)$ и образ α в $\mathrm{Aut}(L)/\widehat{L}$ лежит в $\Gamma_L\widehat{L}/\widehat{L}$; при этом элементы группы Γ_L будем называть *каноническими графовым автоморфизмами* группы L;

графово-полевым по модулю $\widehat{L}$ во всех остальных случаях; при этом элементы из $\Phi_L\Gamma_L \setminus \Phi_L$ для групп $B_2(2^n)$, $F_4(2^n)$ и $G_2(3^n)$ и элементы из $\Phi_L\Gamma_L \setminus (\Phi_L \cup \Gamma_L)$ для всех остальных нормальных групп лиева типа будем называть *каноническими графово-полевыми автоморфизмами* группы L.

Пусть L — скрученная группа лиева типа, отличная от групп Судзуки и Ри и полученная из соответствующей группы нормального типа с помощью автоморфизма порядка $d \in \{2, 3\}$ (см. [20, гл. 13]). В этом случае $\Gamma_L = 1$ (см. [21, теорема 2.5.12]). Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}(L) \setminus \widehat{L}$. Автоморфизм α будем называть

полевым по модулю $\widehat{L}$, если порядок образа α в $\mathrm{Aut}(L)/\widehat{L}$ не делится на d; при этом такие элементы из группы Φ_L будем называть *каноническими полевыми автоморфизмами* группы L;

[1] Здесь и далее мы отождествляем изоморфные группы L и $\mathrm{Inn}(L)$.

графовым по модулю $\widehat{L}$, если порядок образа α равен d; при этом такие элементы из группы Φ_L будем называть *каноническими графовыми автоморфизмами* группы L;

графово-полевым по модулю $\widehat{L}$, если порядок образа α делится на d, но не равен d; при этом такие элементы из группы Φ_L будем называть *каноническими графово-полевыми автоморфизмами* группы L.

Наконец, все автоморфизмы группы Судзуки или Ри L, не являющиеся внутренними, будем называть *полевыми по модулю* $\widehat{L}$.

Заметим, что введенные понятия полевого и графово-полевого по модулю $\widehat{L}$ автоморфизма α группы L совпадают с понятиями полевого и графово-полевого автоморфизма в [21, определение 2.5.13] соответственно в случае, когда $\langle\alpha\rangle\cap\widehat{L} = 1$ (в частности, когда α имеет простой порядок).

Лемма 15. *Пусть L — простая группа лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$ нечетной характеристики p. Пусть x и y — автоморфизмы группы L, имеющие один и тот же простой порядок, отличный от 3, и допустим, что x и y являются одновременно полевыми или графово-полевыми автоморфизмами по модулю группы $\widehat{L}$ внутренне-диагональных автоморфизмов группы L. Тогда подгруппы $\langle x\rangle$ и $\langle y\rangle$ сопряжены элементом из $\widehat{L}$.*

Доказательство. См. [21, предложение 4.9.1 (e)]. □

Лемма 16. *Пусть L — простая группа лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$ нечетной характеристики p, $\widehat{L}$ — группа ее внутренне-диагональных автоморфизмов и $x \in \widehat{L}$ — некоторая инволюция. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:*

(1) *$|\mathscr{C}_{\widehat{L}}(x)|$ делится на p;*

(2) *$L = A_1(q)$.*

Доказательство следует из [21, теорема 4.5.1, табл. 4.5.1]. □

Лемма 17. *Пусть $L = A_1(q)$ — простая группа лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$ нечетной характеристики p, $\widehat{L}$ — группа ее внутренне-диагональных автоморфизмов. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Группа $\widehat{L}$ обладает ровно двумя классами сопряженных инволюций, один из которых содержится в L, а другой — в $\widehat{L} \setminus L$.*

(2) *Если две инволюции из $\widehat{L}$ сопряжены, то они сопряжены элементом из L.*

(3) *Любая инволюция из $\widehat{L}$ нормализует, но не централизует некоторую подгруппу порядка $(q+\varepsilon)/2$ группы L, где $\varepsilon = (-1)^{(q-1)/2}$.*

Доказательство. Утверждение (1) известно (см. [21, теорема 4.5.1 и табл. 4.5.1]).

Далее, фактор-группа $\widehat{L}/L$ имеет порядок 2. Поэтому для инволюций из $\widehat{L} \setminus L$ утверждение 2 леммы очевидно. Зафиксируем некоторую инволюцию $u \in \widehat{L} \setminus L$. Предположим, что не все инволюции из L сопряжены в L. Тогда ввиду утверждения (1) в L имеется ровно два класса сопряженных инволюций, переставляемых элементом u. В частности, u не централизует никаких инволюций в L. Пусть v — инволюция из L. Рассмотрим произведение uv. Это произведение лежит в смежном классе Lu и поэтому имеет четный порядок. По лемме 11 элементы u и v централизуют единственную инволюцию w из циклической группы $\langle uv\rangle$. При этом $w \notin L$, так как u никаких инволюций в L. Но тогда $w \in \widehat{L} \setminus L$, поэтому инволюция w сопряжена с u. Поскольку w централизует инволюцию $v \in L$, u также централизует некоторую инволюцию из L; противоречие. Таким образом, (2) доказано.

Рассмотрим инволюции из L. В группе L имеется максимальный тор T, являющийся циклической группой нечетного порядка $(q+\varepsilon)/2$, а его нормализатор в L будет диэдральной группой порядка $q+\varepsilon$. Так как все инволюции в L сопряжены в силу утверждения (2), всякая инволюция из L содержится в такой диэдральной группе и поэтому нормализует, но не централизует циклическую группу порядка $(q+\varepsilon)/2$.

Группа $\widehat{L}$, в свою очередь, содержит максимальный тор $\widehat{T}$ порядка $q+\varepsilon$. Этот тор является циклической группой, и его единственная инволюция u лежит в $\widehat{L} \setminus L$. Нормализатор $\widehat{N} = \mathscr{N}_{\widehat{L}}(\widehat{T})$ этого тора является диэдральной подгруппой порядка $2(q+\varepsilon)$. При этом $u \in \mathscr{Z}(\widehat{N})$ по лемме 11. Рассмотрим произвольный элемент $v \in \widehat{N} \setminus \widehat{T}$. Так как $\widehat{N}$ — диэдральная группа, v является инволюцией. Если $v \in \widehat{L} \setminus L$, то требуемое доказано: v (а следовательно, любая инволюция из $\widehat{L} \setminus L$) нормализует, но не централизует циклическую подгруппу порядка $(q+\varepsilon)/2$, которая, очевидно, лежит в L, поскольку имеет нечетный порядок. Если же $v \in L$, то $w = uv \in \widehat{N} \setminus \widehat{T}$ также инволюция, причем $w \in Lu = \widehat{L} \setminus L$, и по доказанному любая инволюция из $\widehat{L} \setminus L$ удовлетворяет условию (3) леммы. □

Лемма 18. *Пусть группа лиева типа L над полем нечетной характеристики p обладает каноническим графовым автоморфизмом γ порядка 2. Пусть $\widehat{L}$ — ее группа внутренне-диагональных автоморфизмов и $\widehat{C} = \mathscr{C}_{\widehat{L}}(\gamma)$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(1) *Группа $C = \mathscr{O}^{p'}(\widehat{C})$ является присоединенной группой лиева типа, указанной в табл. 1.*

(2) *Группа $\widehat{C}$ индуцирует на C группу внутренне-диагональных автоморфизмов.*

(3) *Группа $\widehat{C}/C$ абелева порядка не больше 2.*

(4) $\mathscr{Z}(\widehat{C}) = 1$.

(5) $\mathscr{O}_{p'}(\widehat{C}) = 1$.

Таблица 1. Централизаторы канонических графовых автоморфизмов порядка 2 в простых группах лиева типа нечетной характеристики.

L	условия	C	$\widehat{C}/C$
$A_{n-1}(q)$	$n \geq 4$, n четно	$C_{n/2}(q)$	2
$A_{n-1}(q)$	$n \geq 3$, n нечетно	$B_{(n-1)/2}(q)$	2
${}^2A_{n-1}(q)$	$n \geq 4$, n четно	$C_{n/2}(q)$	2
${}^2A_{n-1}(q)$	$n \geq 3$, n нечетно	$B_{(n-1)/2}(q)$	2
$D_n(q)$	$n \geq 4$	$B_{n-1}(q)$	2
${}^2D_n(q)$	$n \geq 4$	$B_{n-1}(q)$	2
$E_6(q)$		$F_4(q)$	1
${}^2E_6(q)$		$F_4(q)$	1

Доказательство. См. [21, теорема 4.5.1 и табл. 4.5.1]. □

Лемма 19. *Пусть $2 \in \pi$ и $L \notin \mathscr{B}_\pi$ — конечная простая группа. Обозначим через τ множество $\pi \cap \pi(L) \setminus \{2\}$ и через φ — множество простых чисел Ферма из τ. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $L \in \mathscr{D}_\pi$;

(2) *L является группой лиева типа над некоторым полем $\mathbb{F}_q$ характеристики $p \notin \pi$, $\pi \cap \pi(L) \subseteq \pi(q-\varepsilon)$, где $\varepsilon = (-1)^{(q-1)/2}$ и выполнено условие $\mathscr{D}(L)$, указанное в табл. 2.*

Таблица 2. Простые группы $L \in \mathscr{D}_\pi \setminus \mathscr{B}_\pi$, $2 \in \pi$.

Общие условия и обозначения	L	$\mathscr{D}(L)$
$q = p^m$, p простое, $p \notin \pi$, $\tau = \pi \cap \pi(L) \setminus \{2\}$, $\varphi = \{s \in \tau \mid s$ — число Ферма$\}$, $\varepsilon = (-1)^{(q-1)/2}$, $\pi \cap \pi(L) \subseteq \pi(q-\varepsilon)$	$A_{n-1}(q)$, $n > 1$	$s > n$, если $s \in \tau$, $s > n+1$, если $s \in \varphi$
	${}^2A_{n-1}(q)$, $n > 2$	$s > n$, если $s \in \tau$, $s > n+1$, если $s \in \varphi$
	$B_n(q)$, $n > 1$	$s > 2n+1$, если $s \in \tau$
	$C_n(q)$, $n > 2$	$s > n$, если $s \in \tau$, $s > 2n+1$, если $s \in \varphi$
	$D_n(q)$, $n > 3$	$s > 2n$, если $s \in \tau$
	${}^2D_n(q)$, $n > 3$	$s > 2n$, если $s \in \tau$
	${}^3D_4(q)$	$3, 7 \notin \tau$
	$G_2(q)$	$3, 7 \notin \tau$
	${}^2G_2(q)$	$3, 7 \notin \tau$
	$F_4(q)$	$3, 5, 7 \notin \tau$
	$E_6(q)$	$3, 5, 7 \notin \tau$
	${}^2E_6(q)$	$3, 5, 7 \notin \tau$
	$E_7(q)$	$3, 5, 7, 11 \notin \tau$
	$E_8(q)$	$3, 5, 7, 11, 13 \notin \tau$

Доказательство следует из [9, теорема 3]. $\square$

Замечание 1. Если выполнены условие и утверждение (2) леммы 19, то (в обозначениях этой леммы) сделаем несколько наблюдений.

(1) Число q нечетно, так как $2 \in \pi$, а $p \notin \pi$.

(2) Число $\varepsilon = \pm 1$ выбрано так, что $q \equiv \varepsilon \pmod 4$.

(3) $3 \notin \pi$, как следует из условия $\mathscr{D}(L)$ для каждой группы L в табл. 2.

(4) $q \geq 19$. Действительно, ввиду условия $L \notin \mathscr{B}_\pi$ множество $\pi \cap \pi(L)$ содержит по крайней мере одно нечетное простое число s, причем $s \geq 5$ в силу наблюдения (3). Таким образом, поскольку $q \equiv \varepsilon \pmod 4$ и $\pi \cap \pi(L) \subseteq \pi(q-\varepsilon)$, число $q - \varepsilon$ делится на $4s \geq 20$, откуда следует требуемое.

(5) Число $(q+\varepsilon)/2$ является нетривиальным π'-числом. Если бы это было не так, то ввиду того, что $\pi \cap \pi(L) \subseteq \pi(q-\varepsilon)$ и g.c.d.$(q-\varepsilon, q+\varepsilon) = 2$, число $(q+\varepsilon)/2$ делилось бы на 2. Но $q \equiv \varepsilon \pmod 4$.

Замечание 2. Пусть выполнены условие и одно из эквивалентных утверждений (1) или (2) леммы 19. Обозначим через $\widehat{L}$ группу всех внутренне-диагональных автоморфизмов группы L. Тогда в обозначениях этой леммы всякая π-подгруппа группы $\widehat{L}$ обладает нормальной абелевой холловой τ-подгруппой [9, лемма 11].

3. Доказательство теоремы 1

Допустим, что теорема неверна и $\mathscr{D}_\pi \not\subseteq \mathscr{BS}_\pi$. Пусть $G \in \mathscr{D}_\pi \setminus \mathscr{BS}_\pi$ — группа наименьшего возможного порядка.

Из лемм 7 и 8 следует, что G — почти простая группа с простым цоколем L, в G имеется элемент x простого порядка, принадлежащего π, такой, что $x \in \mathscr{O}^2_\pi(G)$ и $G = \langle x, L\rangle$. Будем считать, что группа G выбрана среди групп наименьшего порядка из $\mathscr{D}_\pi \setminus \mathscr{BS}_\pi$ таким образом, что $L = \mathscr{O}^\pi(G)$ имеет наименьший порядок.

Обозначим через $\mathscr{D}^+_\pi$ класс конечных групп, у которых все неабелевы композиционные факторы принадлежат $\mathscr{D}_\pi$ и имеют порядки, меньшие чем $|L|$. Класс $\mathscr{D}^+_\pi$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп, гомоморфных образов и расширений, поэтому ввиду леммы 7 и выбора группы G имеем $\mathscr{D}^+_\pi \subseteq \mathscr{BS}_\pi$.

Из лемм 9, 10 и 19 следует, что L является группой лиева типа над некоторым полем $\mathbb{F}_q$ нечетной характеристики $p \notin \pi$, $\pi \cap \pi(L) \subseteq \pi(q-\varepsilon)$, где $\varepsilon = (-1)^{(q-1)/2}$, и выполнено условие $\mathscr{D}(L)$ в лемме 19.

Обозначим через $\widehat{L}$ группу внутренне-диагональных автоморфизмов группы L. Рассмотрим отдельно случаи, когда $x \in \widehat{L}$ и $x \notin \widehat{L}$. В ситуации, когда $x \notin \widehat{L}$, в свою очередь, отдельно рассмотрим случаи, когда x является полевым или графово-полевым автоморфизмом и когда x является графовым автоморфизмом по модулю $\widehat{L}$.

Случай 1. Элемент x лежит в группе $\widehat{L}$ внутренне-диагональных автоморфизмов группы L (эквивалентно $L \le G \le \widehat{L}$).

Докажем сначала, что в этом случае x является инволюцией. Допустим, x имеет нечетный порядок. Возьмем произвольный элемент $g \in G$ и рассмотрим группу $X = \langle x, x^g\rangle$. Она является π-подгруппой, так как $x \in \mathscr{O}^2_\pi(G)$, и согласно замечанию 2 обладает нормальной абелевой холловой τ-подгруппой Y, где $\tau = \pi \cap \pi(L) \setminus \{2\}$. Поскольку x и x^g являются τ-элементами, имеем $x, x^g \in Y$, откуда следует, что $\langle x, x^g\rangle = Y$. Таким образом, элемент x вместе с любым сопряженным с ним в G элементом порождает абелеву подгруппу. Но тогда и весь класс сопряженности x^G порождает абелеву подгруппу, нормальную в G. С другой стороны, L — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, поэтому $L \le \langle x^G\rangle$. Но L неабелева, в то время как $\langle x^G\rangle$ абелева; противоречие.

Теперь согласно лемме 16 либо $L = A_1(q)$, либо $|\mathscr{C}_{\widehat{L}}(x)|$ делится на p.

Если $L = A_1(q)$, то ввиду леммы 17 элемент x нормализует, но не централизует подгруппу порядка $(q+\varepsilon)/2$ группы $L \le G$. Согласно замечанию 1 эта подгруппа является π'-подгруппой и из леммы 6 следует, что $x \notin \mathscr{O}^2_\pi(G)$ вопреки выбору x.

Поэтому силовская p-подгруппа V группы $\mathscr{C}_{\widehat{L}}(x)$ нетривиальна. Согласно теореме Бореля — Титса (лемма 12) существует собственная параболическая подгруппа $\widehat{P}$ группы $\widehat{L}$ такая, что $\mathscr{N}_{\widehat{L}}(V) \le \widehat{P}$ и $V \le U$, где $U = \mathscr{O}_p(\widehat{P})$ — унипотентный радикал группы $\widehat{P}$. Так как $x \in \mathscr{C}_{\widehat{L}}(V) \le \widehat{P}$, элемент x нормализует U, и из леммы 6 получаем $U \le \mathscr{C}_{\widehat{L}}(x)$. Значит, $V = U$. Заметим, что

$U \leq \mathscr{O}^{p'}(G) = L$ и $U = \mathscr{O}_p(P)$, где $P = \widehat{P} \cap L$ — параболическая подгруппа группы L. Далее, ввиду леммы 13

$$x \in \mathscr{C}_{\widehat{L}}(U) \leq \mathscr{C}_{\mathrm{Aut}(L)}(U) \leq U,$$

т. е. x является p-элементом; противоречие.

Случай 2. Элемент x является полевым или графово-полевым автоморфизмом по модулю $\widehat{L}$.

В этом случае с учетом того, что $3 \notin \pi$ (см. замечание 1), ввиду леммы 15 элемент x имеет вид ψ^δ, где ψ — канонический полевой или графово-полевой, а δ — внутренне-диагональный автоморфизмы группы L. Поскольку ψ оставляет инвариантной, но не централизует максимальную унипотентную подгруппу U группы L, имеем $x = \psi^\delta \in \mathscr{N}_G(U^\delta) \setminus \mathscr{C}_G(U^\delta)$ вопреки лемме 6 и выбору x.

Случай 3. Элемент x является графовым автоморфизмом по модулю $\widehat{L}$.

Так как $3 \notin \pi$, элемент x является инволюцией. Обозначим через γ некоторый канонический графовый автоморфизм порядка 2 группы L такой, что $x \in \widehat{L}\gamma$. Рассмотрим подгруппу

$$D = \langle x, \gamma \rangle \leq \langle \widehat{L}, x \rangle = \langle \widehat{L}, \gamma \rangle,$$

которая является согласно лемме 11 группой диэдра. Так как $x, \gamma \in D \setminus \langle x\gamma \rangle$, с учетом той же леммы для некоторого элемента $\delta \in \langle x\gamma \rangle \leq \widehat{L}$ имеем либо $x = \gamma^\delta$, либо $x = (\gamma u)^\delta$, где u — инволюция из $\mathscr{Z}(D) \leq \langle x\gamma \rangle \leq \widehat{L}$.

Если $x = \gamma^\delta$, то, как и в случае полевых и графово-полевых автоморфизмов,

$$x = \gamma^\delta \in \mathscr{N}_G(U^\delta) \setminus \mathscr{C}_G(U^\delta),$$

где U — максимальная унипотентная подгруппа группы L, инвариантная относительно γ, и получаем противоречие с леммой 6.

Пусть $x = (\gamma u)^\delta$. В этой ситуации $u \in \widehat{C} = \mathscr{C}_{\widehat{L}}(\gamma)$. Из лемм 8, 18 и 19 следует, что $\widehat{C} \in \mathscr{D}_\pi$, причем из леммы 18 вытекает также, что $\widehat{C} \in \mathscr{D}_\pi^+ \subseteq \mathscr{BS}_\pi$.

Ввиду того, что согласно лемме 18

$$\mathscr{O}_\pi^2(\widehat{C}) = \mathscr{O}_\pi(\widehat{C}) \leq \mathscr{O}_{p'}(\widehat{C}) = 1,$$

имеем $u \notin \mathscr{O}_\pi^2(\widehat{C})$. Следовательно, для некоторой сопряженной в $\widehat{C}$ с u инволюции v группа $\langle u, v \rangle$ не является π-группой.

Так как $\langle u, v \rangle$ является группой диэдра, u инвертирует некоторый π'-элемент t из $\langle uv \rangle$. Этот элемент имеет нечетный порядок, поэтому любая инволюция в диэдральной группе $D_0 = \langle u, t \rangle$ сопряжена с u некоторым элементом из $\langle t \rangle$ и $D_0 = \langle u, w \rangle$ для некоторой такой инволюции w. Заметим, что

$$t \in [D_0, D_0] \leq [\widehat{C}, \widehat{C}] \leq [\widehat{L}, \widehat{L}] = L,$$

поэтому $u, w \in \widehat{C} = \mathscr{C}_{\widehat{L}}(\gamma)$ сопряжены элементом из $\widehat{C} \cap L = \mathscr{C}_L(\gamma)$.

Отсюда следует, что $u^\delta, w^\delta \in \mathscr{C}_{\widehat{L}}(\gamma)^\delta = \mathscr{C}_{\widehat{L}}(\gamma^\delta)$ сопряжены некоторым элементом $g \in \mathscr{C}_L(\gamma)^\delta = \mathscr{C}_L(\gamma^\delta) \leq L$. Имеем

$$x^g = (\gamma u)^{\delta g} = \gamma^{\delta g} u^{\delta g} = \gamma^\delta w^\delta = (\gamma w)^\delta.$$

Группа $\langle x, x^g \rangle$ является диэдральной группой порядка

$$2|xx^g| = 2|(\gamma u)^\delta (\gamma w)^\delta| = 2|(uw)^\delta| = 2|uw|$$

согласно лемме 11. Поэтому группа $\langle x, x^g \rangle \simeq \langle u, w \rangle = D_0$ не является π-группой, вопреки условию $x \in \mathscr{O}_\pi^2(G)$; противоречие. $\square$

4. Доказательство теорем 2 и 5

Доказательство теоремы 2. Пусть π — произвольное множество простых чисел и G — конечная группа. Построим группу $G^* \in \mathscr{BS}_\pi$ такую, что G изоморфна подгруппе группы G^* и одновременно является гомоморфным образом G^*.

Если $G \in \mathscr{BS}_\pi$, то положим $G^* = G$. Требуемое тривиально выполнено.

Если же $G \notin \mathscr{BS}_\pi$, то $\mathscr{BS}_\pi \neq \mathscr{G}$. В частности, множество π отлично от множества всех простых чисел и $\pi' \neq \varnothing$. Пусть $p \in \pi'$, F — конечное поле характеристики p и V — произвольный точный (например, регулярный) FG-модуль. Обозначим через G^* естественное расщепляемое расширение группы V с помощью G. По построению группа G изоморфна подгруппе и одновременно является гомоморфным образом группы G^*. Покажем, что $G^* \in \mathscr{BS}_\pi$. Допустим, $x^* \in \mathscr{O}^2_\pi(G^*)$ и x — образ элемента x^* в группе G относительно естественного эпиморфизма. Тогда для любого $v \in V$ имеем $v^{x^*} = v^x$. Как следует из леммы 6, $x^* \in \mathscr{C}_{G^*}(V)$, поэтому x действует на V тривиально и $x = 1$ ввиду точности модуля V. Это означает, что $x^* \in V$ и x^* является π'-элементом. С другой стороны, $x^* \in \mathscr{O}^2_\pi(G^*)$, и, следовательно x^* является π-элементом. Значит, $x^* = 1$. Таким образом,

$$\mathscr{O}^2_\pi(G^*) = \{1\} \subseteq \mathscr{O}_\pi(G^*)$$

и $G^* \in \mathscr{BS}_\pi$. $\square$

Доказательство следствия 3. Пусть множество π таково, что $\mathscr{D}_\pi \neq \mathscr{G}$, и пусть $G \in \mathscr{G} \setminus \mathscr{D}_\pi$. По теореме 2 существует группа $G^* \in \mathscr{BS}_\pi$ такая, что группа G является ее гомоморфным образом. Так как класс $\mathscr{D}_\pi$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов (лемма 8) и $G \notin \mathscr{D}_\pi$, имеем $G^* \notin \mathscr{D}_\pi$. Таким образом, $\mathscr{BS}_\pi \setminus \mathscr{D}_\pi \neq \varnothing$, и следствие доказано. $\square$

Доказательство следствия 4. Как уже говорилось, следствие 4 непосредственно вытекает из теоремы 1 и следствия 3 и является их объединением. $\square$

Доказательство теоремы 5. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (4) и (5) $\Rightarrow$ (1) очевидны. Осталось доказать (4) $\Rightarrow$ (5).

Допустим, что утверждение (5) неверно, и покажем, что (4) тоже неверно. Положим

$$n = \begin{cases} 1 + \min \pi', \text{ если } 2, 3 \in \pi, \\ \min(\pi \setminus \{\min \pi\}) \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Из описания холловых подгрупп в симметрических группах [1, теорема А4; 23] следует, что симметрическая группа S_n не принадлежит классу $\mathscr{E}_\pi$. Поэтому $\mathscr{E}_\pi \neq \mathscr{G}$ и (4) неверно. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 22, N 6. P. 286–304.
2. *Wielandt H.* Zum Satz von Sylow // Math. Z. 1954. Bd 60, Heft 4. S. 407–408.
3. *Sylow M. L.* Théorèmes sur les groupes de substitutions // Math. Ann. 1872. V. 5, N 4. P. 584–594.
4. *Suzuki M.* Group theory. II. New York: Springer-Verl., 1986.
5. *Baer R.* Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen // Math. Ann. 1957. Bd 133. S. 256–270.

6. *Suzuki M.* Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed // Ann. Math. 1968. V. 82, N 2. P. 191–212.
7. *Alperin J., Lyons R.* On conjugacy classes of p-elements // J. Algebra. 1971. V. 19, N 2. P. 536–537.
8. *Ревин Д. О.* О π-теоремах Бэра — Судзуки // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 430–440.
9. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в конечных простых группах // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 364–394.
10. *Gross F.* Odd order Hall subgrous of $\mathrm{G}L(n,q)$ and $\mathrm{S}p(2n,q)$ // Math. Z. 1984. Bd 187, Heft 2. S. 185–194.
11. *Ревин Д. О.* Вокруг гипотезы Ф. Холла // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. Т. 6. С. 366–380.
12. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Холловы подгруппы нечетного порядка конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 1. С. 15–56.
13. *Ревин Д. О.* Свойство D_π конечных групп в случае, когда $2 \notin \pi$ // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 13, № 1. С. 166–182.
14. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в линейных и унитарных группах // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 437–448.
15. *Ревин Д. О.* Характеризация конечных D_π-групп // Докл. РАН. 2007. Т. 417, № 5. С. 601–604.
16. *Мазуров В. Д., Ревин Д. О.* О холловом D_π-свойстве для конечных групп // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 106–113.
17. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Hall subgroups of finite groups // Contemp. Math. 2006. V. 402. P. 229–265.
18. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в одном классе конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 335–370.
19. *Ревин Д. О.* Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Мат. труды. 1999. Т. 2, № 1. С. 157–205.
20. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: John Wiley and Sons, 1972.
21. *Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.* The classification of the finite simple groups. Number 3. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998.
22. *Gorenstein D., Lyons R.* The local structure of finite groups of characteristic 2-type. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983. (Mem. Amer. Math. Soc.; N 276).
23. *Thompson J. G.* Hall subgroups of the symmetric groups // J. Comb. Theory. 1966. V. 1, N 2. P. 271–279.

Статья поступила 20 сентября 2010 г.

Ревин Данила Олегович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`revin@math.nsc.ru`